数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 20-36

ルート格子に付随したアフィン超平面配置について[1]

吉永正彦 (Masahiko Yoshinaga)
京都大学数理解析研究所
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
e-mail address: yosinaga@kurims.kyoto-u.ac.jp

概要

1 Introduction

ルート系やワイル群に付随した超平面配置, 特に "鏡映面配置" の性質については古くから多くの研究がある. 最近 Postnikov-Stanley [PS], Edelman-Reiner [ER], Athanasiadis [Ath1, Ath2, Ath4, Ath5] 等によって, ルート系の格子構造に付随した超平面配置の組合せ論的性質が観察/証明されている (この方面の Survey として [Ath3] がある). これらの問題について最近得られた結果の紹介を行う.

主結果はある超平面配置の自由性に関する **Conjecture 4.5** であるが, まず §2 においては, 超平面配置の中で最も重要な例である A 型の超平面配置の場合に限って, 古典的な結果から最近の結果までの紹介を行う.

§3 では一般の超平面配置に対してメビウス関数, 交叉半順序集合, 特性多項式などの概念を導入し, 実超平面配置の領域数, 複素超平面配置の補集合のベッチ数に関する結果を述べる. また自由性の概念を導入し, 「Terao の分解定理」を述べる. これは超平面配置の代数 (幾何) 的な性質と組合せ論的性質を結び付ける非常に重要な結果である.

2 A 型の場合

超平面配置

$$\mathcal{A}(A_{n-1}) := \{H_{ij} \mid 1 \le i < j \le n\},\ (\text{ただし } H_{ij} := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i = x_j\})$$

は A_{n-1} 型の超平面配置または Braid arrangement と呼ばれている. 上では明記しなかった定義体の選び方によって, 様々な問が $\mathcal{A}(A_{n-1})$ の補集合に対して立てられる. この超平面配置について最も古くから知られている組合せ論的性質は $\mathbb{R}$ 上での次の性質だろう.

(1) A_{n-1} 型の補集合 $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$ は $n!$ 個の領域に分かれる.

[1] 組み合わせ論的論的表現論の諸相, 2003 年 11 月 6 日

実際, 補集合の各領域は順列 $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_n}$ と一対一に対応する. 一般に体 $\mathbb{K}$ 上で A 型の超平面配置の補集合の性質が調べやすいのは補集合が帰納的に次の fibration の構造をもつことによる (この性質を一般化した超平面配置のクラスは "Fiber type arrangement" と呼ばれている).

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} - (n\,点) & \longrightarrow & \{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_i \neq x_j\} & \ni & (x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_i \neq x_j\} & \ni & (x_1,\cdots,x_n) \end{array}$$

つまり A_{n+1} 型の補集合は A_n 型補集合の上の $\mathbb{K} - (n\,点)$ fibration の構造を持つ. このことから次の性質が示される.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ (ただし $p > n$) の時, $\mathcal{A}(A_n)$ の補集合 $\mathbb{F}_p^{n+1} \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ の点の個数は $\prod_{k=0}^{n}(p-k)$.

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時, $\mathcal{A}(A_n)$ の補集合のポアンカレ多項式は $\prod_{k=0}^{n}(1+kt)$. (Arnold)

(4) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時補集合は $K(\pi, 1)$ 空間, すなわち高次のホモトピー群 $\pi_k (k \geq 2)$ が消える. (Fadell-Neuwirth, Fox-Neuwirth)

領域数 (1), 点の個数 (2), ポアンカレ多項式 (3) が非常に似た表示を持っていることが見て取れる. §3 で, これらのデータは一般の超平面配置に対しても互いに関係していることをみる.

A_n 型超平面配置の一般化として次のような超平面配置を導入する: 整数 $p, q \in \mathbb{Z}$ (ただし $p \leq q$) に対して,

$$\mathcal{A}_{A_n}^{[p,q]} := \{\ (x_i - x_j = k) \mid 1 \leq i < j \leq n+1,\ k = p, p+1, \cdots, q\ \}$$

$\mathcal{A}_{A_n}^{[0,0]}$ がもとの A_n 型の超平面配置である.

このようなタイプの超平面配置の研究は, (A_n 型) アフィン・ワイル群の元のある種の同値類の集合と Shi 配置 $\mathcal{A}_{A_n}^{[0,1]}$ (を $\mathbb{R}$ で考えた時) の領域が一対一に対応する, という Shi [Sh1, Sh2] の研究によって始まった.

Theorem 2.1 (Shi, [Sh1, Sh2], [AL])
Shi 配置 $\mathcal{A}_{A_n}^{[0,1]}$ の補集合の領域数は $(n+1+1)^n$, 有界領域数は $(n+1-1)^n$ □

その後, グラフや Tree の数え上げ [PS, Sta], 多面体やタイル張りの組合せ論的性質 [ER] を調べる際にも $\mathcal{A}_{A_n}^{[p,q]}$ というタイプの超平面配置が現れ, 盛んに研究されるようになった.

$[p, q] = [0, 1]$ 以外に対しては次のようなことが示された.

Theorem 2.2 整数 $m \geq 0$ に対して次が成り立つ ($h := n+1$ とおく)

(i) $\mathcal{A}_{A_n}^{[-m,m]}$ の領域数は $\prod_{k=1}^{n}(k+mh+1)$, 有界領域数は $\prod_{k=1}^{n}(k+mh-1)$.

(ii) $\mathcal{A}_{A_n}^{[1-m,m]}$ の領域数は $(mh+1)^n$, 有界領域数は $(mh-1)^n$.

□

またより次節で見るように単なる領域数よりも, 複素化補集合のポアンカレ多項式の方が精密な情報なのだが, それについては:

Theorem 2.3 上と同じ記号の下,

(i) $\mathcal{A}_{A_n}^{[-m,m]}$ の複素化補集合のポアンカレ多項式は $\prod_{k=1}^{n}(1+(k+mh)t)$.

(ii) $\mathcal{A}_{A_n}^{[1-m,m]}$ の複素化補集合のポアンカレ多項式は $(1+mht)^n$.

□

Theorem 2.2, 2.3 両方とも (i) は Edelman-Reiner [ER], (ii) は Athanasiadis [Ath1] による.

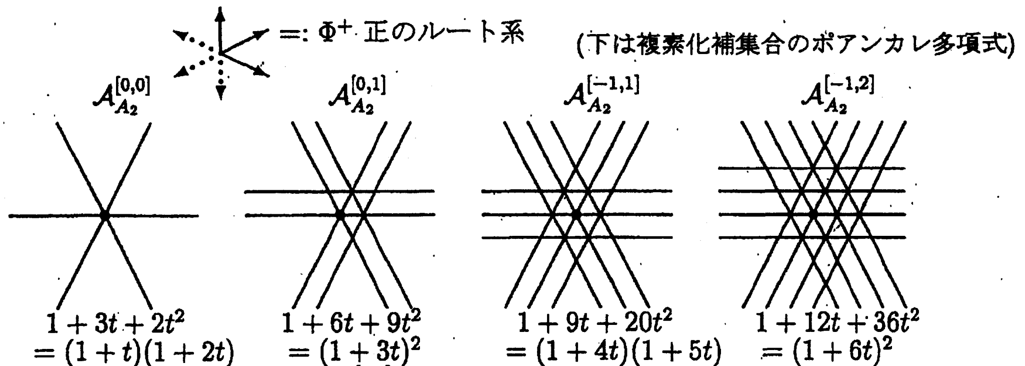


図 1: $\mathcal{A}_{A_2}^{[p,q]}$ とそのポアンカレ多項式の例

ある種の超平面配置のポアンカレ多項式が一次式に分解すること自体非常に興味深いが, この方面で最も神秘的なのは次の結果であろう.

Theorem 2.4 (Postnikov-Stanley, [PS]) $p<q$ の時, $\mathcal{A}_{A_n}^{[-p,q]}$ の複素化補集合のポアンカレ多項式が複素数の範囲で $\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k t)$ (ただし $\alpha_k \in \mathbb{C}$) と分解したとすると, α_k の実部は $\frac{(p+q+1)h}{2}$. □

有名な予想との類似から Postnikov-Stanley は "リーマン予想" と呼んでいる.

以上は全て既に証明されている結果であるが, これらの命題を一般のルート系に対して定式化したものについては完全に解かれてはいない. 今回の主結果は **Theorem 2.2, 2.3** を一般のルート系に一般化したものである.

3 超平面配置の一般論

本節では超平面配置の組合せ論, 自由性, Terao の分解定理, Ziegler [Zi] による重複度付き対数的ベクトル場に関する記号と幾つかの基本性質を述べる. $\mathbb{K}$ を体とする.

3.1 Combinatorics

Definition 3.1 ベクトル空間 $V \cong \mathbb{K}^\ell$ の中の有限個のアフィン超平面の集合

$$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$$

を**超平面配置**と呼ぶ. 各 $H_i \in \mathcal{A}$ が原点を通るとき**中心的な超平面配置**と呼ぶ. $\mathcal{A}$ に対して, 超平面達の幾つかの共通部分全体の集合,

$$L(\mathcal{A}) := \left\{ \bigcap_{i\in I} H_i \;\middle|\; I \subset \{1, 2, \cdots, n\} \right\}$$

を $\mathcal{A}$ の**交叉半順序集合**呼ぶ. □

$\phi \subset \{1, \cdots, n\}$ に対しては $\bigcap_{i\in\phi} H_i = V$ とみなして, $V \in L(\mathcal{A})$ とする. $L(\mathcal{A})$ は包含関係について自然な半順序集合となる. この半順序構造を使って, 次のようにメビウス (Möbius) 関数 $\mu : L(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を定義する.

$$\begin{aligned} \mu(V) &= 1, \\ \mu(X) &= -\sum_{Y \supsetneq X} \mu(Y), \quad \text{if } X \subsetneq V. \end{aligned}$$

Definition 3.2 V 上の超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して**特性多項式** $\chi(\mathcal{A}, t)$ を次で定義する,

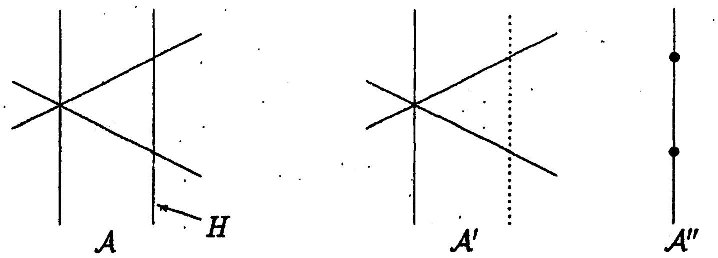
$$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L_{\mathcal{A}}} \mu(X) t^{\dim X}.$$

□

超平面の枚数を変えたときの特性多項式の振る舞いが次の定理で記述される. $H \in \mathcal{A}$ を固定したとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &:= \mathcal{A} \backslash \{H\} \\ \mathcal{A}'' &:= H \cap \mathcal{A}' \end{aligned}$$

とする. ただし, $\mathcal{A}''$ の右辺は H の上に自然に定まる超平面配置を表す. この時



$\mathcal{A}$ $\quad$ $\mathcal{A}'$ $\quad$ $\mathcal{A}''$

$\chi(\mathcal{A},t) = t^2 - 4t + 4$ $\qquad$ $\chi(\mathcal{A}',t) = t^2 - 3t + 2$ $\qquad$ $t - 2$

図 2: 超平面の枚数を一枚変えたときの特性多項式の変化

Theorem 3.3

$$\chi(\mathcal{A},t) = \chi(\mathcal{A}',t) - \chi(\mathcal{A}'',t).$$

□

§1 で述べたように, Braid arrangements に対して "複素化の補集合のポアンカレ多項式に $t=1$ を代入すると実超平面配置の領域数と一致する" という現象 (**M-property**) が Arnold によって観察されたが, この性質は次の緒定理によって一般化される. 証明は超平面の枚数に関する帰納法と上の **Theorem 3.3** による.

Theorem 3.4 (Zaslavsky [Za])
$\mathcal{A}$ を $V = \mathbb{R}^\ell$ 上の超平面配置とする. この時, 補集合 $V \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ は有限個の領域に分かれるが, 領域数を $r(\mathcal{A})$, 有界領域数を $b(\mathcal{A})$ とおくと

$$r(\mathcal{A}) = |\chi(\mathcal{A},-1)|$$
$$b(\mathcal{A}) = |\chi(\mathcal{A},1)|.$$

□

Theorem 3.5 (Orlik-Solomon [OS]) $\mathcal{A}$ を $V = \mathbb{C}^\ell$ 上の超平面配置とする. 補集合 $V \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ のポアンカレ多項式

$$P(\mathcal{A},t) := \sum_{k=1}^{\ell} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^k \left(V \backslash \bigcup\nolimits_{H \in \mathcal{A}} H, \mathbb{C} \right) t^k$$

は特性多項式 $\chi(\mathcal{A},t)$ によって

$$P(\mathcal{A},t) = (-t)^\ell \chi(\mathcal{A},-1/t)$$

と表される. □

また, 超平面配置が $\mathbb{Q}$ 上定義されているときは, 次も比較的容易に証明される.

Theorem 3.6 (Crapo-Rota, [CR]) $\mathcal{A}$を$V=\mathbb{Q}^\ell$上の超平面配置とする. 十分大きな標数pをもつ有限体$\mathbb{F}_q$(ただしqはpの冪)に対して, $\mathcal{A}$はmod$p$で$\mathbb{F}_q^\ell$上の超平面配置とみなすことができる. この時, 補集合の点の個数が特性多項式$\chi(\mathcal{A},t)$を使って,

$$\sharp\left(\mathbb{F}_q^\ell \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H\right) = \chi(\mathcal{A},q)$$

と表される. □

この定理において有限体であることは本質的でなく, 整数係数一次式で定義された超平面配置$\mathcal{A}$に対して, 係数達と十分に素な任意の自然数nに対して, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$に還元して点の個数を数えても同様のことが成り立つことを Athanasiadis [Ath1] が注意している.

3.2 Free arrangements

次に K. Saito により導入され Terao によって本格的に研究された自由超平面配置の緒結果を述べる. 超平面配置が "自由" であるとは, 超平面に接触する対数的ベクトル場全体のなす加群が自由加群になることである. 正確に述べるために, $V=\mathbb{K}^\ell$の座標$(z_1,z_2,\cdots,z_\ell)$を固定する. $S:=\mathbb{K}[V^*]=\mathbb{K}[z_1,z_2,\cdots,z_\ell]$を$V$上の関数環とする. Der_VでV上の多項式係数ベクトル場全体, Ω_V^pで多項式係数p次微分形式全体

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}_V &:= \bigoplus_{i=1}^{\ell} S\cdot\frac{\partial}{\partial z_i},\\ \Omega_V^p &:= \bigoplus_{1\le i_1\le\cdots\le i_p\le\ell} S\cdot dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\end{aligned}$$

を表すことにする. $\mathcal{A}$を中心的な超平面配置とすると, 各超平面$H\in\mathcal{A}$は原点$0\in V$を通るので, その定義式として$\alpha_H\in V^*$がとれる. これらの積を$Q:=\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H$と置く. ここでは少し一般化した, "多重に接触した対数的ベクトル場" 及び "対数的微分形式" を定義する.

Definition 3.7 中心的超平面配置$\mathcal{A}$と$\mathbf{k}$を写像$\mathbf{k}:\mathcal{A}\to\mathbb{Z}_{\ge0}$とする. に対して,

(i) $\delta\in\mathrm{Der}_V$が$\mathbf{k}$を重複度とする多重に接した対数的ベクトル場であるとは,

$$\delta\alpha_H\in(\alpha_H)^{\mathbf{k}(H)}\cdot S$$

を満たすことである (ただしδは微分作用素として多項式に作用). 対数的ベクトル場全体の集合を

$$D(\mathcal{A},\mathbf{k}):=\{\delta\in\mathrm{Der}_V\mid\delta\alpha_H\in(\alpha_H)^{\mathbf{k}(H)}\cdot S,\ \text{for all } H\in\mathcal{A}\}$$

で表す.

(ii) $Q(\mathcal{A},\mathbf{k}) := \prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{\mathbf{k}(H)}$ とおいたとき, $\omega \in \frac{1}{Q(\mathcal{A},\mathbf{k})}\Omega_V^p$ が高々重複度 $\mathbf{k}$ の極を持つ対数的微分形式であるとは, 各 $H \in \mathcal{A}$ に対して,

$$d\alpha_H \wedge \omega \text{ が } H \text{ に沿って極を持たない}$$

ものとする. 対数的微分形式全体を

$$\Omega^p(\mathcal{A},\mathbf{k}) = \left\{ \omega \in \frac{1}{Q(\mathcal{A},\mathbf{k})}\Omega_V^p \;\middle|\; Q(\mathcal{A},\mathbf{k})\cdot\frac{d\alpha_H}{\alpha_H^{\mathbf{k}(H)}} \wedge \omega \in \Omega_V^{p+1},\ \forall H \in \mathcal{A} \right\}$$

で表す.

□

特に重複度について断らない場合は $\mathbf{k} \equiv 1$ とし, $D(\mathcal{A},\mathbf{k})$, $\Omega^p(\mathcal{A},\mathbf{k})$ の代りに単に $D(\mathcal{A})$, $\Omega^p(\mathcal{A})$ と表すこともある. これらの加群に対して最も基本的な事実は,

Theorem 3.8 (K. Saito, [Sa1] [Zi])
$D(\mathcal{A},\mathbf{k})$ と $\Omega^1(\mathcal{A},\mathbf{k})$ は互いに双対な S 加群である. 特に $D(\mathcal{A},\mathbf{k})$, $\Omega^1(\mathcal{A},\mathbf{k})$ は反射的 (reflexive) である. □

Definition 3.9 $D(\mathcal{A},\mathbf{k})$ が S 加群として自由加群になる時, 中心的超平面配置 $\mathcal{A}$ は重複度 $\mathbf{k}$ を持つ多重自由配置であるという. また, $D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群となるとき単に自由配置という. □

$\mathcal{A}$ が重複度 $\mathbf{k}$ を持つ多重自由配置の時, 斉次ベクトル場達からなる基底 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell$ をとることができる. このベクトル場の次数 (pdeg $\delta_1, \cdots,$ pdeg δ_ℓ) は $(\mathcal{A},\mathbf{k})$ の不変量となり, これを $(\mathcal{A},\mathbf{k})$ の巾指数と呼ぶ. ただし, ベクトル場 $f_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_\ell\frac{\partial}{\partial z_\ell}$ が斉次であるとは, 係数 f_i が全て斉次多項式で, さらにその次数が一定であることをいう. またこの時, pdeg δ は係数の次数 pdeg f_i を表す. (微分作用素としての次数とは 1 ずれる)

一般に与えられた超平面配置 $\mathcal{A}$ と重複度 $\mathbf{k}$ に対して, $(\mathcal{A},\mathbf{k})$ が自由かどうか判定するのは難しい. 例えば「$\mathbf{k} \equiv 1$ の時, 束 $L(\mathcal{A})$ の構造によって自由性を特徴づけられるか?」(寺尾の問題) は 3 次元の場合すら分かっていない. しかし $D(\mathcal{A},\mathbf{k})$ の基底の候補を作ってしまえば, それが基底をなすかどうかは次の定理から直ちにチェックできる.

Theorem 3.10 (Saito's criterion, [Sa1])
ℓ 個の斉次な対数的ベクトル場 $\delta_1, \cdots, \delta_\ell \in D(\mathcal{A},\mathbf{k})$ に対して次は同値.

(i) $D(\mathcal{A},\mathbf{k})$ が自由 S-加群でさらに, $\delta_1, \cdots, \delta_\ell$ が基底をなす.

(ii) $\delta_i = \sum_{j=1}^{\ell} f_{ij}\frac{\partial}{\partial z_i}$ と置いたとき,

$$\det(f_{ij})_{i,j} \doteq Q(\mathcal{A},\mathbf{k}) := \prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{\mathbf{k}(H)}$$

(iii) $\delta_1, \cdots, \delta_\ell$ が S 上一次独立で，さらに

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{pdeg}\ \delta_i = \sum_{H \in \mathcal{A}} \mathbf{k}(H).$$

□

Example 3.11 2次元の超平面配置 $\mathcal{A}$ は (任意の重複度 $\mathbf{k} : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して) 自由である．なぜなら2次元の反射的加群は自由加群だからである．さらに $\mathbf{k} \equiv 1$ の場合は具体的に基底も書ける．実際 $Q := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$ とおくと

$$D(\mathcal{A}) = \{\delta \in \mathrm{Der}_V \mid \delta Q \in Q \cdot S\}$$

なので，

$$\delta_1 := z_1 \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} \quad (\text{Euler ベクトル場})$$
$$\delta_2 := \frac{\partial Q}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial Q}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2}$$

とおくと，δ_1，$\delta_2 \in D(\mathcal{A})$ となって，これらが基底をなすことは 3.10 から分かる．$\mathcal{A}$ の巾指数は $(1, \sharp(\mathcal{A}) - 1)$ である． □

Remark 3.12 なお2次元の場合でも一般に重複度 $\mathbf{k}$ を付けると，$D(\mathcal{A}, \mathbf{k})$ の基底は原理的には求まるが，上のように簡明に書き下す方法は知られていない．巾指数すら $(\mathcal{A}, \mathbf{k})$ の組合せ論的情報だけからは決まらないことが知られている [Zi].

Example 3.13 $\mathbb{R}^\ell$ の座標 $(x_1, \cdots, x_\ell)$ を固定し，A 型の超平面配置

$$\mathcal{A} := \{\ \{x_i - x_j = 0\} \mid 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

を考える．この時

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{\ell} x_i^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \in D(\mathcal{A}),\ k = 1, 2, \cdots, \ell$$

であるが，これが $D(\mathcal{A})$ の基底をなすことは **Theorem 3.10** からすぐ分かる． □

既述のように $\mathcal{A}$ の組合せ論的性質と加群 $D(\mathcal{A})$ や $\Omega^p(\mathcal{A})$ の構造の関係は分かっていないことが多いが，特性多項式は $D(\mathcal{A})$ や $\Omega^p(\mathcal{A})$ の構造から復元できることが知られている．特に著しいのは自由配置の場合である．

Theorem 3.14 (Terao, [Te2])
$\mathcal{A}$ を $V=\mathbb{K}^\ell$ 上の自由超平面配置とし, その巾指数を $(d_1,\cdots,d_\ell)$ とする. この時 $\mathcal{A}$ の特性多項式 $\chi(\mathcal{A},t)$ は

$$\chi(\mathcal{A},t)=\prod_{i=1}^{\ell}(t-d_i)$$

と表される. □

一般の (自由とは限らない) 中心的超平面配置に対しては, 特性多項式は一次式には分解しない. しかし $\Omega^p(\mathcal{A})$ の次数付き加群としての構造から特性多項式を導く公式が知られている. ([ST1])

$\Omega^p(\mathcal{A})$ は微分形式の多項式次数 pdeg によって (つまり $\mathrm{pdeg}\, f dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}:=\deg f$) 次数付き S 加群となる. 一般に次数付き S 加群 $M=\bigoplus_{p\in\mathbf{Z}}M_p$ の Hilbert 級数を

$$P(M,x)=\sum_{p\in\mathbf{Z}}(\dim_{\mathbb{K}}M_p)x^p$$

と表す.

Theorem 3.15 (Solomon-Terao, [ST1])
ℓ 次元ベクトル空間 V の中心的超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して 2 変数の Hilbert 級数を

$$\Phi(\mathcal{A};x,y)=\sum_{p=0}^{\ell}P(\Omega^p(\mathcal{A}),x)y^p$$

と定義する (x については形式的 Laurent 級数, y については多項式). この時 $\Phi(\mathcal{A};x,y)$ は x については Laurent 多項式となり,

$$\chi(\mathcal{A},t)=\lim_{x\to1}\Phi(\mathcal{A};x,t(1-x)-1)$$

となる. □

超平面配置の重複度や重複度付きの自由性は Ziegler [Zi] によって導入, 研究された. 重複度付の超平面配置の概念は中心的な超平面配置 $\mathcal{A}$ をその一つの超平面 $H_1\in\mathcal{A}$ に制限するときに現れる. 特性多項式など組合せ論的な対象を見ている限りは重複度は現れない (**Theorem 3.3**). しかし制限の自由性を論じる際には重複度の概念が自然に現れることを Ziegler は発見した. $\mathcal{A}^{H_1}$ を

$$\mathcal{A}^{H_1}:=\{H_1\cap H\mid H\in\mathcal{A},H\neq H_1\}$$

$\mathcal{A}$ が H_1 上に自然に引き起こす超平面配置とする. この時 $\mathcal{A}^{H_1}$ の超平面に対して, 何枚の $\mathcal{A}$ に含まれているかを数えることによって, $\mathcal{A}^{H_1}$ 上の自然な重複度 $\mathbf{k}^{H_1}_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}^{H_1}\to\mathbf{Z}_{>0}$ が次で定義される:

$$\mathbf{k}^{H_1}_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}^{H_1}\ni X\longmapsto\sharp(\{H\in\mathcal{A}\mid H\cap H_1=X\}),$$

(上の右辺において, H_1 は数えられていないことに注意).
Euler ベクトル場 $E := \sum_{i=1}^{\ell} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ は斉1次式に $\alpha \in V^*$ に対して,

$$E\alpha = \alpha \tag{1}$$

を満たすので, $E \in D(\mathcal{A})$ である. ここで $H_1 \in \mathcal{A}$ を固定し, 座標を $z_1 = \alpha_{H_1}$ となるようにとる. $\mathcal{A}$ が自由配置であるとすると, 式 (1) を使うと $D(\mathcal{A})$ の基底 $\delta_1, \cdots, \delta_\ell$ で次のようなものが取れることが分かる:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= E \quad (\text{Euler ベクトル場}) \\ \delta_i z_1 &= 0, \quad \text{for } i = 2,\ 3,\ \cdots, \ell. \end{aligned}$$

上の式の二つ目の条件は $\delta_i (i = 2, \cdots, \ell)$ が H_1 に平行なベクトル場であることを表している. 一般の中心的超平面配置 $\mathcal{A}$ と $H_1 \in \mathcal{A}$ に対して

$$D_0(\mathcal{A}) := \{\delta \in D(\mathcal{A}) \mid \delta\alpha_{H_1} = 0\} \tag{2}$$

とおく. 上と同様に

$$D(\mathcal{A}) = S \cdot E \oplus D_0(\mathcal{A})$$

と分解することがわかり, $D_0(\mathcal{A})$ は Euler ベクトル場の補空間となる. 次の定理と系は Saito's criterion (3.10) から容易に分かる.

Theorem 3.16 (Ziegler, [Zi])
$\mathcal{A}$ を $V \cong \mathbb{K}^\ell$ の中心的超平面配置, $H_1 \in \mathcal{A}$ を一つの超平面とする. この時 $\delta \in D_0(\mathcal{A})$ に対して, $\delta|_{H_1}$ は重複度 $\mathbf{k}_{\mathcal{A}}^{H_1}$ で $\mathcal{A}^{H_1}$ に接する. つまり $\delta|_{H_1} \in D(\mathcal{A}^{H_1}, \mathbf{k}_{\mathcal{A}}^{H_1})$. さらに $\mathcal{A}$ が自由で, $\delta_2, \cdots, \delta_\ell \in D_0(\mathcal{A})$ を上のようにとると, $\delta_2|_{H_1}, \cdots, \delta_\ell|_{H_1}$ が $D(\mathcal{A}^{H_1}, \mathbf{k}_{\mathcal{A}}^{H_1})$ の基底となる. □

Corollary 3.17 $H_1 \in \mathcal{A}$ に対して次は同値

(i) $\mathcal{A}$ は自由で巾指数は $(1, d_2, d_3, \cdots, d_\ell)$.

(ii) 制限 $(\mathcal{A}^{H_1}, \mathbf{k}_{\mathcal{A}}^{H_1})$ は自由で巾指数は $(d_2, d_3, \cdots, d_\ell)$.

□

4 Edelman-Reiner の予想

Φ をユークリッド空間 $V = \mathbb{R}^\ell$ の既約 (かつ被約) なルート系とする. Positive system $\Phi^+ \subset \Phi$ を一つ固定し, Exponents と Coxeter 数をそれぞれ $(e_1, \cdots, e_\ell)$ と h とする. 整数 $k \in \mathbb{Z}$ とルート $\alpha \in \Phi$ に対して超平面 $H_{\alpha,k}$ と

$$H_{\alpha,k} := \{x \in V \mid \alpha(x) = k\}$$

とおく. $\alpha \in \Phi^+$ に対して $H_{\alpha,0}$ を集めてきたものが**鏡映面配置** (または **Weyl arrangements**) である. 一般に $p, q \in \mathbb{Z}$ $(p \le q)$ に対して $\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}$ を

$$\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]} := \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi^+,\ k \in \mathbb{Z},\ p \le k \le q\}.$$

で定める. この超平面配置の組合せ論的性質, とくに特性多項式の振る舞いが我々の興味の中心である. V の座標 $(x_1, \cdots, x_\ell)$ を固定すると, $\alpha \in \Phi$ は $x_1, \cdots, x_\ell$ の斉一次式である. 1次元上げたベクトル空間 $\mathbb{R} \times V$ の座標 $(x_0, x_1, \cdots, x_\ell)$ に関して次の超平面配置を $\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}$ の **Coning** と呼ぶ.

$$\mathrm{c}\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]} := \big\{\{\alpha = kx_0\} \mid \alpha \in \Phi^+,\ k = p, p+1, \cdots, q\big\} \cup \{\{x_0 = 0\}\}.$$

$x_0 = 1$ で切ったものが元の超平面配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}$ である. また $H_\infty := \{x_0 = 0\}$ を無限遠平面と呼ぶ. 特性多項式のレベルでは元の $\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}$ とは次の関係で結ばれている.

$$\chi(\mathrm{c}\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}, t) = (t-1) \cdot \chi(\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}, t).$$

さてこれらの超平面配置に関して, 最も古い結果として:

Theorem 4.1 (Arnold, Brieskorn)
上の記号の下, $\mathcal{A}_\Phi^{[0,0]}$ の特性多項式は

$$\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[0,0]}, t) = \prod_{k=1}^{\ell} (t - e_k).$$

□

この定理と §2 の緒結果を比べると A 型の超平面配置の不思議な性質が, 一般の Weyl arrangement でも定式化できる. §2 と対応させて並べると,

Conjecture 4.2 整数 $m \ge 0$ に対して次が成り立つ.

(i) $\mathcal{A}_\Phi^{[-m,m]}$ の領域数は $\prod_{k=1}^{\ell}(e_k + mh + 1)$, 有界領域数は $\prod_{k=1}^{\ell}(e_k + mh - 1)$.

(ii) $\mathcal{A}_\Phi^{[1-m,m]}$ の領域数は $(mh+1)^\ell$, 有界領域数は $(mh-1)^\ell$.

□

Conjecture 4.3 (Edelman-Reiner, [ER])
上と同じ記号の下,

(i) $\mathcal{A}_\Phi^{[-m,m]}$ の特性多項式は $\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[-m,m]}, t) = \prod_{k=1}^{\ell}(t - (e_k + mh))$.

(ii) $\mathcal{A}_\Phi^{[1-m,m]}$ の特性多項式は $\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[1-m,m]}, t) = (t - mh)^n$.

□

Conjecture 4.4 (Postnikov-Stanley, "Riemann 予想" [PS])
$p<q$ の時, $\mathcal{A}_\Phi^{[-p,q]}$ の特性多項式が複素数の範囲で $\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[-p,q]},t)=\prod_{k=1}^{\ell}(t-\alpha_k)$ (ただし $\alpha_k\in\mathbb{C}$) と分解したとすると, α_k の実部は $\frac{(p+q+1)h}{2}$. □

これらは独立な予想ではなく, 例えば Zaslavsky の Theorem 3.4 より

$$\textbf{Conj. 4.3} \overset{\text{Zaslavsky}}{\Longrightarrow} \textbf{Conj. 4.2}$$

また "Riemann 予想" における $q-p=1$ の場合は **Conjecture 4.3** (ii) から導かれる.
超平面配置の Coning を使うと, 4.3 から自然に $(\ell+1)$ 次元超平面配置の自由性に関する予想が得られる. Terao の分解定理 3.14 を使うと次の **Conjecture 4.5** から特性多項式の分解 4.3 が導かれる.

Conjecture 4.5 (Edelman-Reiner, [ER])

(i) $\mathbf{c}\mathcal{A}_\Phi^{[-m,m]}$ は自由で, 冪指数は $(1,e_1+mh,\cdots,e_\ell+mh)$.

(ii) $\mathbf{c}\mathcal{A}_\Phi^{[1-m,m]}$ は自由で, 冪指数は $(1,\underbrace{mh,mh,\cdots,mh}_{\ell\text{個}})$

□

Remark 4.6 (部分結果)
4.3 の (i) は Athanasiadis [Ath5] によって解かれた. (ii) については $ABCD$ 型ルート系 Φ に対しては [Ath1] によって, $m=1$ の場合は任意の Φ に対して Headley [He].
4.5 は A 型の場合しかこれまで手が出なかった. A 型の場合, (i) は Edelman-Reiner [ER], (ii) は Athanasiadis [Ath2].
4.4 については A 型の場合は Postnikov-Stanley [PS], $ABCD$ 型の場合は Athanasiadis [Ath4].

なお, 次の結果も "部分結果" と言えなくはないが, むしろ自由配置の理論の源である.

Theorem 4.7 (K. Saito, [Sa1]) $\mathcal{A}_\Phi^{[0,0]}$ は自由配置で, 冪指数は $(e_1,\cdots,e_\ell)$.

(この結果は Crystallographic でなく, 有限 Coxeter 群で良い) 実際, ワイル群 W を使って, 不変式論的にベクトル場の基底が構成できる. I を V 上の W 不変な内積とする. I によって V と V^* が同一視され, Der_V と Ω_V^1 が $S(V^*)$-加群として同一視される.

$$I:\Omega_V^1\xrightarrow{\cong}\mathrm{Der}_V$$

不変式環 $S(V^*)^W$ の生成元を $P_1,P_2,\cdots,P_\ell$ としたとき, $I(dP_1),I(dP_2),\cdots,I(dP_\ell)$ が $D(\mathcal{A}_\Phi)$ の基底をなす. □

本稿の主結果は次である.

Theorem 4.8 ([Yo3]) 自由性に関する予想 4.5 は正しい. □

Edelman-Reine, Athanasiadis による 4.5 へのアプローチは共に帰納的に自由性を証明していくという方法による. つまり, 超平面の数を一枚変えたときに, 自由性がどういう影響を受けるのかを調べ (Addition-Deletion, [Te1]), 目的の超平面配置の自由性を示すのである. この証明により, $c\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}$ というタイプだけでなく, これらを補間する膨大な自由配置のリストが得られる. しかしこの様な組合せ論的手法では A 型以外を扱うのは非常に難しいようである. これに対して, Solomon-Terao [ST2] によって別の試みがなされた. $D(c\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]})$ ($[p,q]$ は $[-m,m]$ または $[1-m,m]$ のどちらか) の基底を不変式論的に構成しようと言うものである. 次の定理はその主結果の証明で重要なステップである.

Theorem 4.9 (Terao [Te3])
m を自然数, $\mathcal{A}_\Phi := \mathcal{A}_\Phi^{[0,0]}$ とする.

(i) $(\mathcal{A}_\Phi, 2m+1)$ は多重自由配置で巾指数は $(e_1+mh,\cdots,e_\ell+mh)$.

(ii) $(\mathcal{A}_\Phi, 2m)$ は多重自由配置で巾指数は $\underbrace{(mh, mh, \cdots, mh)}_{\ell\text{個}}$

ただし $(\mathcal{A}, n)$ 重複度が定数 n の多重配置を表す. □

ちなみに **4.9** は Ziegler の制限定理 **3.16** を $c\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}$ と H_∞ に適用すると, 予想 **4.5** から得られる.

5 Edelman-Reiner の予想の証明

Theorem 5.1 [OSS, Theorem 2.3.2] $\mathcal{E}$ は複素射影空間 $\mathbb{P}^\ell$ の上の正則ベクトル束とする. (Linear な) 超平面 $H \cong \mathbb{P}^{\ell-1}$ に対して次は同値.

(a) $\mathcal{E}$ は直線束の直和に分かれる.

(b) $\mathcal{E}|_H$ が直線束の直和に分かれる. □

(a)⇒(b) は自明だが, 逆は耳を疑ってしまう.

$V=\mathbb{C}^{\ell+1}$ 上の中心的超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して, $D(\mathcal{A})$ は次数付き $S=S(V^*)$-加群である. 代数幾何の一般論により, Proj $S\cong\mathbb{P}^\ell$ 上に自然に連接層 $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ が定まる. この文脈で自由性は $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ が直線束の直和に分かれることと同値である.

$\mathcal{A}$ は自由で巾指数が $(d_0,d_1,\cdots,d_\ell) \Longleftrightarrow \widetilde{D(\mathcal{A})} \cong \mathcal{O}(-d_0)\oplus\mathcal{O}(-d_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(-d_\ell)$

Edelman-Reiner の予想 4.5 の証明の出発点は, 定理 5.1 をうまく応用できないか? というものである. つまり, $\mathcal{A} := \mathrm{c}\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]}$ とおくと, $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ が直線束の和に分かれることを証明したいのだが, これを H_∞ から決まる超平面 $\mathbb{P}(H_\infty) \subset \mathbb{P}^\ell$ に制限した層の直線束への分解を Terao の定理 4.9 から示せないか, ということである. 5.1 (の (b)$\Longrightarrow$(a)) に帰着しようとする際には次の 2 点が問題になる.

(1) $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ は反射層だが, 一般にはベクトル束にすらならない. ベクトル束になることをどうやって示すか?

(2) 制限 $\widetilde{D(\mathcal{A})}|_{\mathbb{P}(H_\infty)}$ は $\mathbb{P}(H_\infty)$ 上の連接層 $\widetilde{D(\mathcal{A}, n)}$ と同型か?

(1) は問題としてそれほど簡単になっていない.

(2) は Ziegler の制限写像の Stalk レベルでの全射性を要求することになる. つまり $x \in H_\infty \setminus \{0\}$ が定める $\mathbb{P}(H_\infty)$ の点を $\bar{x}$ で表すことにすると, 制限写像 $\widetilde{D(\mathcal{A})}_{\bar{x}} \to \widetilde{D(\mathcal{A}, n)}_{\bar{x}}$ が全射となればよい. これは再び, Ziegler の定理より, $\bar{x}$ の周りで局所的に $\mathcal{A}$ が自由であること, つまり

$$\mathcal{A}_x := \{H \in \mathcal{A} \mid H \ni x\}$$

が自由配置となることを要請する. $(\mathrm{c}\mathcal{A}_\Phi^{[p,q]})_x$ の自由性は, **階数の低いルート系に対する Edelman-Reiner の予想から導かれる.** この様に階数の低いルート系に対する Edelman-Reiner を仮定すると, $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ が $\mathbb{P}(H_\infty)$ の近傍で locally free であることが分かる. 一般に反射層の "locally free でない点" 全体は, closed subscheme をなすので, $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ は $\mathbb{P}^\ell$ 上高々有限個の点以外では locally free であることが分かる. この性質に注目し, Hartshorne [Ha, Theorem 2.4.] と同じ議論を使うことにより,

Theorem 5.2 $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^\ell, \widetilde{D(\mathcal{A})}(d)) = 0, \ \forall d \ll 0.$ □

この結果と制限写像の完全列

$$0 \longrightarrow \widetilde{D(\mathcal{A})}(d-1) \longrightarrow \widetilde{D(\mathcal{A})}(d) \longrightarrow \widetilde{D(\mathcal{A}^{H_0}, n)}(d) \longrightarrow 0.$$

に関するコホモロジーの完全系列を使うと, $D(\mathcal{A})$ の自由性が示される. 帰納法により, 階数 2 のルート系に対する Edelman-Reiner 予想に帰着されるが, A_2, B_2, G_2 を個別にチェックすれば予想が証明される.

6 補遺

Theorem 6.1 (Mustaţă-Schenck, [MS])
$\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^{\ell+1}$ の中心的超平面配置とする. $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ が $\mathbb{P}^\ell$ 上のベクトル束だと仮定すると, 特性多項式 $\chi(\mathcal{A}, t)$ と Chern 多項式

$$c_t(\widetilde{D(\mathcal{A})}) = \sum_i c_i(\widetilde{D(\mathcal{A})})t^i$$

は等価. □

この定理は Terao の分解定理 **3.14** を幾何的に見事に説明している. しかし $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ がベクトル束でない場合は, 特性多項式と Chern 多項式の関係は分からない. 特性多項式の (代数) 幾何的な解釈が望まれる.

Yuzvinsky [Yuz1, Yuz2, Yuz3] は束 $L(\mathcal{A})$ 上の (チェック) コホモロジーを定義し, $\mathcal{A}$ の自由性をそのコホモロジーの消滅で特徴づけた. 一方ベクトル束では, 直線束の分解に関して次のような特徴付けがある.

Theorem 6.2 ([OSS, Theorem 2.3.1.])
$\mathbb{P}^\ell$ 上の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$ が直線束の直和に分かれるための必用十分条件は,

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^\ell, \mathcal{E}(d)) = 0, \text{ for } i = 1, \cdots, \ell - 1, \ \forall d \in \mathbb{Z}.$$

□

$\widetilde{D(\mathcal{A})}$ がベクトル束にならない場合も含めて, $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ のコホモロジーと Yuzvinsky のコホモロジーとの関係が気になる.

参考文献

[Ar] V. I. Arnold, The cohomology ring of the group of dyed braids. Mat. Zametki **5** 1969 227–231.

[Ath1] C. A. Athanasiadis, Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields. Adv. Math. **122** (1996), no. 2, 193–233.

[Ath2] C. A. Athanasiadis, On free deformations of the braid arrangement. European J. Combin. **19** (1998), no. 1, 7–18.

[Ath3] C. A. Athanasiadis, Deformations of Coxeter hyperplane arrangements and their characteristic polynomials, in Arrangements - Tokyo 1998, pp.1-26, Advanced Studies in Pure Mathematics **27**, Kinokuniya, Tokyo, 2000.

[Ath4] C. A. Athanasiadis, Extended Linial hyperplane arrangements for root systems and a conjecture of Postnikov and Stanley. J. of Alg. Combin. **10** (1999), 27–39.

[Ath5] C. A. Athanasiadis, Generalized Catalan numbers, Weyl groups and arrangements of hyperplanes. (Preprint)

[AL] C. A. Athanasiadis, S. Linusson, A simple bijection for the regions of the Shi arrangement of hyperplanes. Discrete Mathematics **204** (1999), 27-39.

[CR] H. Crapo, G. -C. Rota, On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial geometries. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1970

[ER] P. H. Edelman and V. Reiner, Free arrangements and rhombic tilings. Discrete Comput. Geom. **15** (1996), no. 3, 307–340.

[Ha] R. Hartshorne, Stable reflexive sheaves. Math. Ann. **254** (1980), no. 2, 121–176.

[He] P. Headley, On a family of hyperplane arrangements related to the affine Weyl groups. J. Algebraic Combin. **6** (1997), no. 4, 331–338.

[MS] M. Mustaţă and H. Schenck, The module of logarithmic p-forms of a locally free arrangement. J. Algebra **241** (2001), no. 2, 699–719.

[OSS] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces. Progress in Mathematics, **3**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980. vii+389 pp.

[OS] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. Invent. Math. 56 (1980), no. 2, 167–189.

[OT] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992

[PS] A. Postnikov, R. P. Stanley, Deformations of Coxeter hyperplane arrangements. J. Combin. Theory Ser. A **91** (2000), no. 1-2, 544–597.

[Sa1] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), no. 2, 265–291

[Sa2] K. Saito, On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), no. 4, 535–579.

[Sa3] K. Saito, Finite reflexion group and related geometry (A motivation to the period mapping for primitive forms). preprint, 2000

[Sa4] K. Saito, Uniformization of the orbifold for a finite reflection group. To appear in Proceeding of the conference "Frobenius manifolds, quantum cohomology and singularities".

[Sc] H. K. Schenck, A rank two vector bundle associated to a three arrangement, and its Chern polynomial. Adv. Math. **149** (2000), no. 2, 214–229.

[ST1] L. Solomon and H. Terao, A formula for the characteristic polynomial of an arrangement. *Adv. in Math.* **64** (1987), no. 3, 305–325.

[ST2] L. Solomon and H. Terao, The double Coxeter arrangement. Comment. Math. Helv. **73** (1998), no. 2, 237–258.

[Sh1] J.-Y. Shi, The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups. Lecture Notes in Math., **1179**, Springer Verlag, 1986

[Sh2] J.-Y. Shi, Sign types corresponding to an affine Weyl group. J. London Math. Soc. (2) **35** (1987), no. 1, 56–74.

[Sta] R. P. Stanley, Hyperplane arrangements, interval orders, and trees. Proc. Nat. Acad. Sci. **93** (1996) 2620–2625.

[Te1] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness. I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), no. 2, 293–312.

[Te2] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula. Invent. Math. **63** (1981), no. 1, 159–179

[Te3] H. Terao, Multiderivations of Coxeter arrangements. Invent. Math. **148** (2002), no. 3, 659–674.

[Te4] H. Terao, The Hodge filtration and contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. (Preprint, math.CO/0205058)

[Te5] H. Terao, Bases of the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. (Preprint, math.CO/0206204)

[Yo1] M. Yoshinaga, The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **78** (2002), no. 7, 116–119.

[Yo2] M. Yoshinaga, On the freeness of 3-arrangements. Bull. London Math. Soc. To appear.

[Yo3] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. Invent. Math. To appear.

[Yuz1] S. Yuzvinsky, Cohomology of local sheaves on arrangement lattices. Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), no. 4, 1207–1217.

[Yuz2] S. Yuzvinsky, The first two obstructions to the freeness of arrangements. Trans. Amer. Math. Soc. **335** (1993), no. 1, 231–244.

[Yuz3] S. Yuzvinsky, Free and locally free arrangements with a given intersection lattice. Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 3, 745–752.

[Za] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. Mem. Amer. Math. Soc. 1 (1975) no. 154

[Zi] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness, in Singularities (Iowa City, IA, 1986), pp. 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.