Sur l'Expansion de la Cavité Sphérique dans les Masses Fluides

Par

Kiugoro Kitagawa

(Reçu le 27 octobre 1930)

Sommaire

L'objet des recherches rapportées dans le présent mémoire a été d'étudier l'énonciation de la formule de l'hydrodynamique concernant les expansions de la cavité sphérique dans les masses fluides, soit en mer, soit en atmosphère, et de trouver l'accélération initiale, la vitesse maximum, la dépression de la pression qui est produite d'effectuer l'expansion de la cavité envisagée, le rayon de celle-ci qui résulte de nouveau de reposer les fluides, et qui s'accorde avec les expériences, et puis la durée de l'explosion.

(1) Préambule

Trouver le mouvement de la masse fluide en cas simple dans un état de s'écraser l'écume, c'est déja traité par Besant[1], Basset[2] et Lord Rayleigh[3], et le problème, au contraire, au point de vue de l'explosion de la torpille marine, c'est aussi adroitement étudié de la même équation de l'hydrodynamique que celle employée dans les recherches de se briser l'écume par M. H. Lamb.[4]

Nous cherchons ici les problèmes en le dernier cas, soit en mer, soit en atmosphère, avec les autres idées fondamentales pour apporter quelques arguments nouveaux, et nous nous proposons particulièrement de trouver la dépression de la pression du fluide intérieur, laquelle se produit après avoir effectué l'expansion de la cavité sphérique.

---

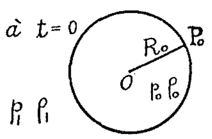
1. W. H. Besant, Hydrostatics and Hydrodynamics, 158 (1859).
2. A. B. Basset, An Elementary Treatise on Hydrodynamics and Sound, 25 (1890).
3. Lord Rayleigh, Phil. Mag. 34, 94 (1917). Scientific Papers, 6, 504.
4. M. H. Lamb, Phil. Mag. 14, 257 (1923).

Supposons qu'une couche sphérique solide, infiniment mince, entourée d'une masse fluide assez épaisse contient une masse gazeuse fort·compressée, et que le système est équilibre. À un instant donné, $t=0$, la couche solide est anéantie, les fluides se meuvent et la sphère, c'est à dire la surface limitée par les deux fluides s'enfle très vite jusqu'à la certaine distance, et puis se contracte, on en obtient un mouvement pendulaire.

Il est évident, par raison de symétrie, que chaque élément des fluides est dirigé du centre de la cavité vers l'extérieur, et qu'à chaque instant les éléments qui se trouvent à la même distance du centre ont la même vitesse, la surface commune conserve donc la forme sphérique.

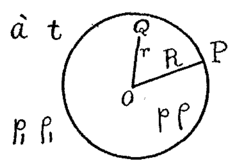
On prend comme l'origine le centre de la cavité sphérique, qui reste fixe pendant l'expansion.

Fig. 1



Appelons, à l'instant initial $t=0$, R_0 le rayon de la cavité sphérique, p_0 la pression, ρ_0 la densité du gaz intérieur (Fig. 1), et à l'instant t après avoir commencé l'explosion, R le rayon de la sphère, p la pression, ρ la densité du gaz intérieur (Fig. 2), et aussi p_1 la pression, ρ_1 la densité du fluide extérieur de la sphère envisagée.

Fig. 2



La vitesse des éléments fluides situés sur la surface du rayon R est vers l'extérieur $\frac{dR}{dt}=\dot{R}$, et on en a, grâce à la condition initiale $\dot{R}_0=0$.

Nous supposons que les deux fluides, intérieur et extérieur, sont dénués de la force extérieure, par exemple de la pesanteur, et que p et ρ sont liés par la formule de l'expansion adiabatique, nous en aurons

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \qquad \text{.......................................}(1)$$

où γ exprime le rapport des deux chaleurs spécifiques du gaz.

En vertu de ces restrictions que l'on a vues plus haut, il en résulte que s'il y a une fonction des vitesses à l'instant donné, par exemple à l'origine du temps $t=0$, il y aura, d'après le théorème de Lagrange, encore une fonction des vitesses à un instant t quelconque. Le fluide partant du repos, le mouvement est irrotationnel. Les vitesses dérivent donc d'un potentiel φ_i. Si l'on appelle r la distance du centre à un élément fluide, la fonction φ_i est par raison de symétrie, celle des seules variables r et t. On en a, dans la sphère $r<R$,

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\frac{r^2\dot{R}}{R}.$$

La vitesse des éléments situés à la distance r du centre est donnée par l'équation suivante

$$\dot{r} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial r} = \frac{r}{R}\dot{R}, \qquad \text{..................} (2)$$

la derivée étant prise le long du rayon de la sphère.

Si l'on suppose $r=R$, $\dot{r}$ devient $\dot{R}$, on a danc $\dot{R} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial r}$ lorsque r est égal à R.

On voit aisément que φ_i vérifie l'équation de Poisson.[1]

$$\varDelta\varphi_i = 3\frac{\dot{R}}{R}, \qquad \text{..................} (3)$$

Il en résulte que l'on a, d'après Lagrange, encore un potentiel de la vitesse dans la région extérieure de la sphère, lorsque p_1 et ρ_1 restent constants au point de vue des variables r et t. $r>R$,

$$\varphi_e = -\frac{R^2\dot{R}}{r},$$

alors on a la vitesse dans cette région

$$\dot{r} = \frac{\partial\varphi_e}{\partial r} = \frac{R_2\dot{R}}{r^2}, \qquad \text{..................} (4)$$

Puis, le potentiel φ_e vérifie en dehors l'équation de Laplace.

$$\varDelta\varphi_e = 0.$$

Si l'on suppose que le point Q situé à l'intérieur se déplace à l'extérieur d'une manière continue (Fig. 2), la vitesse varie d'une manière continue, et elle donne la valeur unique sur la sphère si le point Q s'y approche du dedans ou du dehors, la composante normale de la vitesse est en effet égale à l'une et l'autre.

$$\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial\varphi_e}{\partial r}\right|_{r=R} = \dot{R},$$

et aussi la composante tangentielle

1. M. V. Bjerknes, Vorlesungen über Hydrodynamischen Fernkräfte, 1,26 (1900).

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial s} = 0.$$

Voilà, la vitesse varie ainsi d'une manière continue dans tout l'espace dedans, dehors et sur la sphère.

Quant à la densité et à la pression de la masse fluide, ils se changent brusquement à la sphère, lorsque le point Q la traverse, ils s'y trouvent discontinus.

(2) L'equation fondamentale

Pour l'équation de l'hydrodynamique, on a comme d'abitude

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \int_{\Sigma} p(lu + mv + nw)d\sigma + \int p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau, \qquad \text{......................(5)}$$

où T et V expriment respectivement la demi-force vive et le potentiel de la force extérieure, en outre l, m, n les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$ de la surface fermée Σ dirigée vers l'intérieur de celle-ci, et u, v, w les composantes de la vitesse dirigée dans le sens positif des axes coordonnés. Il s'agit ici de les calculer en tout l'espace. T est égal à la somme des demi-forces vives, intérieure T_i et extérieure T_e de la sphère du rayon R.

On doit d'abord calculer l'intégrale définie

$$T_i = \int_{l'intérieur} \frac{1}{2}\rho \dot{r}^2 d\tau = 4\pi \int_0^R \frac{1}{2}\rho r^2 \frac{r^2 \dot{R}^2}{R^2} dr,$$

remplaçant $\dot{r}$ par $\dot{R}$, d'après (2)

$$= \frac{2}{5}\pi\rho \dot{R}^2 R^3,$$

car ρ n'est que la fonction du R

$$= \frac{2}{5}\pi\rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 R^3 \dot{R}^2,$$

en vertu de la relation (1), il se conduit à

$$= \frac{2}{5}\pi\rho_0 R_0^3 \dot{R}^2. \qquad \text{..(6)}$$

On a d'autre part

$$T_e=\int_{l'extérieur}\frac{1}{2}\rho_1\dot{r}^2d\tau=4\pi\int_R^{\infty}\frac{1}{2}\rho_1\dot{r}^2r^2dr,$$

en vertu de l'équation (4),

$$=2\pi\rho_1\int_R^{\infty}\frac{R^4\dot{R}^2}{r^2}dr,$$

car ρ_1 est constant

$$=2\pi\rho_1R^3\dot{R}^2, \qquad \text{...(7)}$$

Il en résulte

$$T=T_i+T_e=\frac{2}{5}\pi\rho_0R_0^3\dot{R}^2+2\pi\rho_1R^3\dot{R}^2. \qquad \text{.........................(8)}$$

D'après l'hypothèse, on trouve $V=0$, la première intégrale du côté droit de (5) se conduit à

$$\int p(lu+mv+nw)d\sigma=-\int_\Sigma p_1\dot{r}d\sigma=-4\pi p_1R^2\dot{R},$$

la seconde intégrale

$$\int p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau=\int p\Delta\varphi_i d\tau=\int_0^R p\frac{3\dot{R}}{R}4\pi r^2dr,$$

utilisant la relation (3)

$$=4\pi pR^2\dot{R}=4\pi p_0R_0^{3\gamma}R^{2-3\gamma}\dot{R}.$$

On a donc au lieu de (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}\pi\rho_0R_0^3\dot{R}^2+2\pi\rho_1R^3\dot{R}^2\right)=-4\pi p_1R^2\dot{R}+4\pi p_0R_0^{3\gamma}R^{2-3\gamma}\dot{R}.$$

$$\text{...(9)}$$

C'est à dire

$$\frac{2}{5}\pi\rho_0R_0^3\dot{R}^2+2\pi\rho_1R^3\dot{R}^2=-4\pi p_1\int_0^t R^2\dot{R}dt+4\pi p_0R_0^{3\gamma}\int_0^t R^{2-3\gamma}\dot{R}dt.$$

Notre équation prendra la forme

$$\left(\frac{\rho_0}{5}R_0^3+\rho_1R^3\right)\dot{R}^2+\frac{2p_1}{3}R^3+\frac{2p_0R_0^{3\gamma}}{3\gamma-3}R^{3-3\gamma}-$$

$$-\frac{2p_1}{3}R_0^3-\frac{2p_0}{3\gamma-3}R_0^3=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Cette équation différentielle est celle du premier ordre qui ne comprend que deux variables $\dot{R}$ et R. Nous allons la chercher pour nos buts.

(3) L'accélération initiale

On va trouver l'accélération initiale, c'est à dire la valeur $\ddot{R}=\frac{d^2R}{dt^2}$ en ce point $R=R_0$.

En différentiant avec t l'équation (10), on a

$$\frac{2\rho_0R_0^3}{5}\ddot{R}+3\rho_1R^2\dot{R}^2+2\rho_1R^3\ddot{R}-2p_0R_0^{3\gamma}R^{2-3\gamma}+2p_1R^2=0,\ldots\ldots(11)$$

considérant l'hypothèse, $\dot{R}=0$ lorsque $R=R_0$, l'équation (11) devient alors

$$\ddot{R}=\frac{p_0-p_1}{\left(\frac{\rho_0}{5}+\rho_1\right)R_0}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

qui donne l'accélération initiale $t=0$, $R=R_0$, elle ne dépend des manières expansives du gaz, car l'équation (12) ne comprend pas le constant γ.

Prenons un cas spécial dans la mer où soient

$$p_1=2\times10^6\frac{dynes}{cm^2},\ \rho_1=1,$$

$$p_0=10^6\times10^3\quad ,, \quad,\ \rho_0=0.0013\times10^3,\ R_0=100\ cm.,$$

autrement dit, si l'une explosion est éclatée, qui exerce la pression de mill atmosphères dans la mer de dix mètres de profondeur, on en calcule l'accélération

$$\ddot{R}=7.92\times10^6\frac{cm}{sec^2},$$

beaucoup plus grande que celle de la gravité, il vérifie que l'on la néglige en plus haut.

(4) Vitesse maximum

Nous cherchons la vitesse maximum qui se produit au cours de l'explosion. Soumise à la condition du maximum $\ddot{R}=0$, l'équation (11) donne

$$3\rho_1 R^3 \dot{R}^2 - 2p_0 R_0^{3\gamma} R^{3-3\gamma} + 2p_1 R^3 = 0,$$

l'on peut l'écrire à la forme suivante

$$\dot{R}^2 = \frac{2p_0}{3\rho_1} x^{3\gamma} - \frac{2p_1}{3\rho_1}, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (13)$$

où $$x = \frac{R_0}{R}, \quad 0 < x < 1, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (14)$$

changeant aussi la forme du (10) par x

$$\left(\frac{\rho_0}{5} x^3 + \rho_1\right)\dot{R}^2 + \frac{2}{3\gamma - 3} p_0 x^{3\gamma} + \frac{2}{3} p_1$$
$$-\left(\frac{2}{3\gamma - 3} p_0 + \frac{2}{3} p_1\right) x^3 = 0. \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (10) \text{ bis}$$

En éliminant $\dot{R}$ entre ces deux dernières équations (13) et (10) bis, on a

$$\frac{2\rho_0 p_0}{15\rho_1} x^{3\gamma+3} + \frac{2\gamma p_0}{3(\gamma - 1)} x^{3\gamma} - \left(\frac{2p_1 p_0}{15\rho_1} + \frac{2}{3\gamma - 3} p_0 + \frac{2}{3} p_1\right) x^3 = 0,$$

en posant $x \neq 0$ et $\gamma = \frac{4}{3}$ dans celle-ci, on a

$$x^4 + 20\frac{\rho_1}{\rho_0} x - \left(\frac{p_1}{p_0} + 15\frac{\rho_1}{\rho_0} + 5\frac{p_1\rho_1}{p_0\rho_0}\right) = 0, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (15)$$

à l'aide de (15), on peut simplifier (13)

$$\dot{R}^2 = -\frac{40}{3}\,\frac{p_0}{\rho_0} x + \frac{10}{\rho_0}\left(p_0 + \frac{p_1}{3}\right). \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (13) \text{ bis}$$

On peut aisément trouver la vitesse maximum, si l'on connaît la racine $x = \frac{R_0}{R}$ de l'équation (15) entre nul et unité, remplaçant cette valeur dans l'équation (13) bis.

Alors, on se propose de la calculer en cas spécial.

(i) Dans la mer

Nous reprendrons le même cas que l'on a traité plus haut.

$$x = \frac{R_0}{R} = 0.73,$$

$$R = 137 \textit{ cm.}$$

On a donc $\dot{R} = 1.6 \times 10^4 \frac{cm.}{sec.}$

(ii) Dans l'air

Posant $p_1 = 10^6 \dfrac{dynes}{cm^2}$, $\rho_1 = 0.0013$,

$p_0 = 10^6 \times 50$ „ , $\rho_0 = 0.0013 \times 50$, $R_0 = 100\ cm$,

on en a $x = \dfrac{R_0}{R} = 0.55$,

$R = 180\ cm.$,

et $\dot{R} = 4.6 \times 10^3 \dfrac{cm.}{sec.}$.

(5) Dépression de la pression du gaz

Pendant l'explosion, les particles sur la sphère du rayon R s'enflent avec la vitesse variable $\dot{R}$ et arrivent très vite jusqu'à la plus grande sphère du rayon R_1 où la vitesse $\dot{R}$ s'annulent de nouveau, et puis le mobile partant la sphère R_1 se retire, c'est oscillatoire. On va chercher plus tard la durée t_1 de cette demi-oscillation. On se propose de trouver la dépression dans la sphère produite par l'explosion, lorsque R devient R_1.

D'après les équation (10) et (10) bis, on a d'abord

$$\dot{R}^2 = \frac{-\frac{2}{3}p_1 R^4 + \left(\frac{2}{3}p_1 + 2p_0\right)R_0^3 R - 2p_0 R_0^4}{R\left(\frac{\rho_0 R_0^3}{5} + \rho_1 R^3\right)}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

ensuite

$$\dot{R}^2 = \frac{-2p_0 x^4 + \left(\frac{2}{3}p_1 + 2p_0\right)x^3 - \frac{2}{3}p_1}{\frac{\rho_0}{5}x^3 + \rho_1}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

Le numérateur du côté droit se change

$$y = -2p_0(x-1)\left[x^3 - \frac{1}{3}\frac{p_1}{p_0}(x^2 + x + 1)\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

$$= -10^8(x-1)(x-0.20)(x^2 + 0.193x + 0.032), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

lorsque $\dfrac{p_1}{p_0} = \dfrac{1}{50}$ d'un cas que l'on voit plus haut,

ou $= -2 \times 10^9(x-1)(x-0.07)(x^2 + \ldots\ldots)$, $\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(20)$

lorsque $\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1000}$ d'autre cas.

Pour $\dot{R}=0$, on a, dans le premier cas, comme deux racines réelles de l'équation $y=0$, $x=1$, $x=0.20$, dont la première $x=1$, c'est à dire $R=R_0$ exprime l'etat initial, la deuxième $x=0.20$, c'est à dire $\frac{R_0}{R}=0.20$ donne $R_1=5R_0=500\ cm$, posant $R_0=1m$.

Au moment, la pression dans la sphère R_1 se trouve par (1).

$$p=0.08\ bar. \qquad \text{.........................} (21)$$

Dans le deuxième cas, comme on a traité le premier cas,

$$x=0.07,\ R_1=1420\ cm.$$

On peut trouver la pression

$$p=0.024\ bar. \qquad \text{.........................} (22)$$

Il faut conserver le numérateur de (17) le signe positif afin que la vitesse existe. Cela posé, ses deux facteurs reels conservent le signe contraire, positif et négatif. Dans le premier cas, par exemple, on a donc la restriction

$$1>x>0\ 20.$$

c'est à dire, $R_0<R<5R_0(=R_1)$. ....(23)

On le traitera encore plus tard.

On voit que $p=0.080$ et $p=0.024$ respectivement suivant que $p_0=50\,p_1$ et $p_0=1000\,p_1$. Eh bien, est-ce qu'il y a la dépression maximum, considérant une série des explosions, lorsque l'on suppose que dernière dépression est une fonction inconnue de la pression initiale p_0?

D'après (18), on a

$$y_1=x^3-\frac{1}{3}\frac{p_1}{p_0}(x^2+x+1)=0, \qquad \text{.........................} (24)$$

il faut discuter cette équation.

En posant dans l'équation (24)

$$x=u+\lambda,\ \frac{p_1}{3p_0}=a, \qquad \text{.........................} (25)$$

il se conduit à

$$u^3-\left(\frac{a^2}{3}+a\right)u-\left(\frac{2a^3}{27}+\frac{a^2}{3}+a\right)=0, \qquad \text{.........................} (26)$$

si l'on admet $\lambda=\frac{a}{3}$. On a donc

$$4u^3-g_2u-g_3=0, \qquad \text{.........}(27)$$

où $\quad g_2=4\left(\frac{a^2}{3}+a\right),\ g_3=4\left(\frac{2a^3}{27}+\frac{a^2}{3}+a\right)$

et l'on met,[1] $g=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2)=(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$

$$=-\frac{1}{9}a^6-a^5-6a^4-17a^3-27a^2<0,$$

il en est clair que les deux racines de l'équation (25) sont imaginaires conjuguées et l'autre est réelle.

Cherchons en effet les racines de l'équation (26). On a

$$u^3-bu-c=0, \qquad \text{.........}(28)$$

posant $\quad g_2=4b,\ g_3=4c$

Si l'on y remplace dans l'équation (28)

$$u=\frac{\alpha+\beta v}{1+v}, \qquad \text{.........}(29)$$

avec les relations

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=-\frac{3c}{2b}+\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}-\frac{b}{3}},\\ \beta&=-\frac{3c}{2b}-\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}-\frac{b}{3}}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{.........}(30)$$

il vient immédiatement

$$\alpha^3-b\alpha-c+(\beta^3-b\beta-c)v^3=0. \qquad \text{.........}(31)$$

On en trouve une racine réelle $v=-\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$, ...(32)

il vient $\quad u=\frac{\alpha+\beta v}{1+v}=\frac{\alpha\beta^{\frac{1}{3}}-\beta\alpha^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}},$

on a donc la valeur réelle

$$x=u+\lambda=\frac{\alpha\beta^{\frac{1}{3}}-\beta\alpha^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}}+\frac{a}{3}. \qquad \text{.........}(33)$$

1. J. Tannery et J. Molk, Eléments de la Théorie des Fonctions Elliptiques, *2*, 251 (1896).

Dans le cas où t est réel, nous posons

$$x=w. \qquad \text{(34)}$$

Puisque c'est ainsi, nous allons chercher la relation entre p_0 et p.

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}=x^4$$

tenant compte de l'équation (14) et la valeur $\gamma=\frac{4}{3}$.

Il se conduit ainsi

$$p=p_0x^4, \qquad \text{(35)}$$

en la différentiant avec p_0

$$\frac{dp}{dp_0}=w^3\left(w+4p_0\frac{dw}{dp_0}\right),$$

en vertu de (34).

Pour trouver la valeur extrême de p, il faut poser $\frac{dp}{dp_0}=0$. On a alors

$$w+4p_0\frac{dw}{dp_0}=0, \qquad \text{(36)}$$

ou $$w-4a\frac{dw}{da}.$$

Si l'on peut trouver les racines réelles de p_0 en (36), on peut donc calculer la pression minimum de p. Nous allons ainsi discuter les racines en détail.

En ce qui conserne (30), on peut simplifier

$$\frac{3c}{2b}=\frac{1}{2}+\frac{a}{3}+\left(1-\frac{a}{3}+\frac{a^2}{9}-\frac{a^3}{27}+\ldots\ldots\right),$$

remarquant la condition $0<a<\frac{1}{3}$

$$=\frac{3}{2}+\frac{a^2}{9}-e,$$

posant $e=\frac{a^3}{27+9a}<0.002$,

et $$\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}-\frac{b}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{a}{9}+\frac{17a^2}{243}-f$$

posant $f=\frac{209}{6561}a^3-\cdots\cdots$.

En les remplaçant dans l'équation (30), on a

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=-\frac{a}{9}-\frac{10}{243}a^2,\\ \beta&=-3+\frac{a}{9}-\frac{44}{243}a^2. \end{aligned}\right\} \qquad\qquad (37)$$

Ce sont les séries convergentes, car elles sont derivées au moyen de la théorème de la binome. On en a

$$v=-\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}=-\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\left(1+\frac{11}{81}a-\frac{220}{6561}a^2\right),$$

alors $\quad x=w=\frac{\alpha+\beta v}{1+v}+\frac{a}{3},$

il vient $\quad w=a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}a+\cdots\cdots, \qquad\qquad (38)$

c'est la convergente absolue.

Si l'on suppose a être assez petit, on en a

$$w=a^{\frac{1}{3}}$$

il donne $w=0.0693$ lorsque $\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{1000}$, quoiqu'il donne $w=0.142$ lorsque $\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{50}$. Ce s'accordent avec les valeurs (19) et (20). Il donne aussi le rayon R_1 de la sphère explosive dont les masses fluides s'arrêtent de nouveau

$$R_1=R_0\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{p_0}{p_1}}, \qquad\qquad (38)\text{ bis}$$

car $\quad w=\frac{R_0}{R_1} \quad$ et $\quad a=\frac{p_1}{3p_0}.$

Cette formule (38) bis se rapporte avec celle de M. Ramsauer[1] qui l'a trouvée d'après des expériences

$$R_1=const.\sqrt{\frac{M}{p_1}},$$

désignant M la masse explosive, à la grâce de la formule sur l'explosion

---

1. M. C. Ramsauer, Ann. d. Phys., 72, 4 (1923).

de la torpille marine représentée par M. Nomitsu[1] qui donne la proportionnalité de la pression y produite et la masse explosive.

Différentiant l'équation (38) avec a, on a donc

$$\frac{dw}{da}=\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{9}a^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots ,$$

alors on a

$$-w+4a\frac{dw}{da}=\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{9}a^{\frac{2}{3}}+a+\cdots\cdots, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

il se conduit immédiatement à l'inégalité suivante

$$\frac{dp}{dp_0}=w^3\left(w-4a\frac{dw}{da}\right)<0,$$

tenant compte des relations

$$w>0 \quad \text{et} \quad w-4a\frac{dw}{da}<0.$$

Parsque la derivée $\frac{dp}{dp_0}$ reste essentiellement négative, la pression dérivée p diminue constamment et tend donc sans alternatives vers sa valeur minimum, si la pression initiale p_0 augmente. Il n'y a pas de dépression maximum, considérant une série des explosions, car la dépression conduite est une fonction monotone de la pression initiale p_0.

(6) Durée de l'explosion

Il s'agit ici de la durée de l'explosion qui est trouvée par l'intégral du temps t en l'équation (10). Celle-ci donne directement

$$\dot{R}^2=-\frac{\frac{2}{3}p_1R^3-\left(2p_0+\frac{2}{3}p_1\right)R_0^3+2p_0R_0^4R^{-1}}{\frac{\rho_0R_0^3}{5}+\rho_1R^3}$$

en posant $z=\frac{R}{R_0}>1$, il vient

$$R_0^2\dot{z}^2=-\frac{\frac{2}{3}p_1z^4-\left(2p_0+\frac{2}{3}p_1\right)z+2p_0}{\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z}$$

1. M. T. Nomitsu, Suityû Bakuhatu no Rironteki Kenkyû, 27 (1917).

il se conduit à

$$\left.\begin{aligned} t=\int_1^z \frac{R_0\left(\rho_1 z^4+\frac{\rho_0}{5}z\right)^{\frac{1}{2}}dz}{\left[-\frac{2}{3}p^1z^4+\left(\frac{2}{3}p_1+2p_0\right)z-2p_0\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \text{où} \qquad z>1, \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

en décomposant le dénominateur de la même manière de (18)

$$y=-\frac{2}{3}p_1z^4+\left(\frac{2}{3}p_1+2p_0\right)z-2p_0$$

$$=-2p_0(z-1)\left[a(z^3+z^2+z)-1\right]$$

ou $$=-2p_0\frac{1}{x^4}(x-1)\left[x^3-a(x^3+x^2+x)\right]$$

tenant en compte de la relation $z=\dfrac{1}{x}$

$$=-2p_0\frac{1}{x^4}(x-1)(x-w)(x^2+kx+l)$$

étant k et l les constants

$$=-2p_0\frac{1}{x^4}(x-1)(x-w)(x-w_2)(x-w_3)$$

où w est rèel, w_2 et w_3 sont imaginaires conjuguées

ou $$=2p_0(z-1)(1-wz)(1-w_2z)(1-w_3z), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

posant $$w=\frac{a+\beta v}{1+v}+\frac{a}{3}, \quad w_2=\frac{a+i\beta v}{1+iv}+\frac{a}{3}, \quad w_3=\frac{a-i\beta v}{1-iv}+\frac{a}{3}.$$

En ayant la condition complète de (40), $1<z<\dfrac{1}{w}$,

il nous donne

$$t_1=\int_1^{\frac{1}{w}}\frac{R_0\left(\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z\right)^{\frac{1}{2}}dz}{\left[2p_0w(z-1)\left(\frac{1}{w}-z\right)(1+kz+lz^2)\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

qui représente la durée de l'explosion, c'est à dire le temps depuis où l'explosion va commencer jusqu'à celui où le mouvement s'arrête de nouveau.

Nous nous proposons ici d'intégrer un cas spécial où la pression intérieure est égale à cinquante atmosphères et $\dfrac{p_0}{p_1}=50$, $R_0=100\ cm$, $w=0.20$. On a donc le dénominateur

$$y=-2p_0w(z-1)\left(z-\frac{1}{w}\right)(1+0.1933z+0.032z^2)$$
$$=-2\times 50\times 10^6\times 0.20(z-1)(z-5)(1+0.1933z+0.032z^2),$$

au moyen de (19) et (41). On a alors

$$t_1=\frac{1}{10}\int_1^5\frac{1}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{T}{S}\right]^{\frac{1}{2}}dz,$$

où $\quad S=0.64z^2+3.866z+20,\ \ T=0.0013z^4+0.013z.$

S et T sont uniformément croissants, lorsque z augmente de 1 vers 5, et on en a aisément

	S	T	$\left(\frac{T}{S}\right)^{\frac{1}{2}}$
$z=1$:	24.506	0.0143	0.02416
$z=5$:	55.330	0.8125	0.1212

en appliquant ces valeurs dans l'équation t_1,

$$\frac{0.02416}{10}\int_1^5\frac{dz}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}}<t_1<\frac{0.1212}{10}\int_1^5\frac{dz}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

on a d'ailleurs

$$\int_1^5\frac{dz}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}}=\pi,$$

on a donc

$$7.6\times 10^{-3}<t_1<3.8\times 10^{-2}, \qquad\qquad (43)$$

celui-ci nous donne la durée de l'explosion en ce cas spécial que nous supposons plus haut.

Cherchons ensuite le cas générale. On peut changer la forme du numérateur de l'intégrale (42).

$$\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z=\frac{\rho_0}{5}z^4\left(\frac{5\rho_1}{\rho_0}+\frac{1}{z^3}\right)=\frac{\rho_0}{5}z^4(\varepsilon+1-\eta),$$

posant $\quad \dfrac{5\rho_1}{\rho_0}=\varepsilon<1\quad$ et $\quad \dfrac{1}{z^3}=1-\eta,$

donc $\quad \rho_1z^4+\dfrac{\rho_0}{5}z=\dfrac{\rho_0}{5}z^4(1+\delta),$

posant $\quad \delta=\varepsilon-\eta<1,$

il vient

$$\sqrt{\rho_1 z^4+\frac{\rho_0}{5}z}=\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}z^2(1+\delta)^{\frac{1}{2}}\cong\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}z^2\left(1+\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)z^2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\cdot\frac{1}{z}$$

on a donc l'équation suivante au lieu de (40)

$$t_1=\frac{R_0}{\sqrt{2p_0w}}\int_1^{\frac{1}{w}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)z^2dz}{\left[(z-1)\left(\frac{1}{w}-z\right)(1-w_2z)(1-w_3z)\right]^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{R_0}{\sqrt{2p_0w}}\int_1^{\frac{1}{w}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}dz}{z\left[(z-1)\left(\frac{1}{w}-z\right)(1-w_2z)(1-w_3z)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

il se ramène en effet aux intégrales élliptiques dont l'une s'appelle le premier type et l'autre le second type.[1]

D'autre part, on a

$$1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}>\frac{1}{z^3}$$

car $\quad 0<\frac{5\rho_1}{\rho_0}<1, \quad 0<\frac{1}{z^3}<1$

$$\left.\begin{aligned}&\text{donc}\quad \frac{1}{2}H<\sqrt{\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z}<H,\\ &\text{où}\quad H=\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)z^2,\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(44)$$

en prenant pour $\sqrt{\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z}$ les valeur, petite et grande de (44), il se conduit à

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}I<t_1<I,\\ &\text{où}\quad I=\frac{R_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)\int_1^z\frac{z^2dz}{\sqrt{-\frac{p_1}{3}z^4+\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)z-p_0}},\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(45)$$

1. M. E. Picard, Traité d'Analyse, 1, 60 (1922).

celui-ci donne la durée qui est bornée supérieurement et intérieurement.

Cherchons par suite l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = -\frac{p_1}{3A^2}z^4 + \frac{1}{A^2}\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)z - \frac{p_0}{A^2} \doteq R(z), \qquad \ldots(46)$$

où $$A = \frac{R_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right).$$

En comparant cette équation avec

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4^1,$$

on obtient les cinq équations

$$a_0 = -\frac{p_1}{3A^2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0,$$

$$4a_3 = \left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)\frac{1}{A^2}, \quad a_4 = -\frac{p_0}{A^2},$$

de plus

$$g_2 = 3a_2^2 - 4a_1a_3 + a_0a_4 = \frac{p_1p_0}{3A^4},$$

$$g_3 = 2a_1a_2a_3 + a_0a_2a_4 - a_4a_1^2 - a_2^2 - a_0a_3^2$$

$$= \frac{p_1}{3A^6}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)\right]^2.$$

En remplaçant z par $\dfrac{A}{\sqrt{-\dfrac{p_1}{3}}}y$ en (46), on a

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = y^4 + 6B_2y^2 + 4B_3y + B_4, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

les constants étant donnés par les équations

$$B_2 = 0$$

$$B_3 = \sqrt{a_0}\,a_3 = \sqrt{-\frac{p_1}{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)\frac{1}{A^3}$$

$$B_4 = a_0a_4 = \frac{p_1p_0}{3A^4}.$$

Rappelons d'ailleurs les formules fondamentales

1. J. Tannery et J. Molk, loc. cit., 4, 63.

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = y^4 - 6y^2 P_a + 4y P'_a + 9P_a^2 - 2P''_a,$$

où a est une constante, et

$$P'^2_a = 4P_a^3 - g_2 P_a - g_3,$$

on a alors

$$\left.\begin{aligned} -P_a &= B_2 = 0. \\ P'_a &= B_3 = \sqrt{a_0}\, a_3 = \frac{1}{4A^3}\sqrt{-\frac{p_1}{3}}\left(\frac{p_1}{3} + p_0\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(48)$$

en vertu des deux égalités, on peut directement déterminer la constante a, à des multiples près des deux périodes.

En tenant compte de la fonction

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{P'_u - P'_a}{P_u - P_a},$$

qui vérifie l'équation en y, il en résulte que l'équation

$$z = \frac{A}{\sqrt{-\frac{p_1}{3}}}\,y = \frac{A}{2\sqrt{-\frac{p_1}{3}}}\,\frac{P'_u - P'_a}{P_u - P_a},$$

est la racine trouvée de l'équation (46).

Utilisant la formule générale sur la réduction

$$\int \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{\sqrt{R(z)}}\,dz = C' - \zeta(u+a) - \zeta u,$$

où C' est une constante arbitraire, on a ici

$$a_0 \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{R(z)}} = C' - \zeta(u+a) - \zeta u$$

car $a_1 = a_2 = 0$, de là

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{R(z)}} = C + \frac{3A^2}{p_1}[S(u+a) + \zeta u], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

où C est une constante arbitraire.

Il en résulte que la durée de l'explosion s'exprime par l'équation suivante

$$t_1 = A\int_1^{\frac{1}{w}} \frac{z^2 dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en conséquence

$$t_1 = \frac{3A^3}{p_1}\Big[\zeta(u+a)+\zeta u\Big]_{u(1)}^{u\left(\frac{1}{w}\right)}, \quad \text{.................................(50)}$$

On peut ainsi calculer la valeur de la durée t_1, au moyen des séries infinies.

(7) Résumé et Conclusion

Nous avons formé pour l'équation fondamentale sur les quelques problèmes concernants les expansions de la cavité sphérique dans les masses fluides

$$\left(\frac{\rho_0}{5}R_0^3+\rho_1 R^3\right)\dot{R}^2+\frac{2p_1}{3}R^3+\frac{2p_0 R_0^{3\gamma}}{3\gamma-3}R^{3-3\gamma}$$
$$-\frac{2p_1}{3}R_0^3-\frac{2p_0}{3\gamma-3}R_0^3=0$$

applant, à l'instant initial $t=0$, p_0 la pression, ρ_0 la densité du gaz qui a la forme sphérique du rayon R_0, et à l'instant t après avoir commencé l'explosion, p, ρ, R les quantités correspondantes respectivement, et de même p_1, ρ_1 les quantités du fluide extérieur de la sphère.

L'accélération initiale ($t=0$, $R=R_0$) s'exprime par la formule

$$\ddot{R}=\frac{p_0-p_1}{\left(\frac{\rho_0}{5}+\rho_1\right)R_0},$$

il vient $\ddot{R}=7.92\times 10^6\frac{cm}{sec^2}$ en cas spécial dans la mer.

La vitesse maximum $\dot{R}$ se donne par l'équation

$$\dot{R}^2=-\frac{40}{3}\frac{p_0}{\rho_0}x+\frac{10}{\rho_0}\left(p_0+\frac{p_1}{3}\right),$$

avec $x^4+20\frac{\rho_1}{\rho_0}x-\left(\frac{p_1}{p_0}+15\frac{\rho_1}{\rho_0}+5\frac{p_1\rho_1}{p_0\rho_0}\right)=0,$

lorsque $\gamma=\frac{4}{3}$.

Dans la mer, par exemple, on a d'abord la vitesse maximum $\dot{R}=1.6\times 10^4\frac{cm}{sec}$ où $R=137\,cm$. On a ensuite, en cas spécial dans l'air, $\dot{R}=4.6\times 10^3\frac{cm}{sec}$, où $R=180\,cm$.

Pendant l'explosion, la sphère s'enfle très vite avec la vitesse $\dot{R}$ du rayon R_0 au plus grand R_1 où la vitesse s'annule de nouveau.

En le second cas dans l'air où $R_1 = 5\ m.$, on a pour la dépression conduite la valeur 0.080 bar. En le premier cas dans la mer où $R_1 = 1420\ cm.$, la dépression 0.024 bar.

A l'appui de l'équation $w = a^{\frac{1}{3}}$, lorsque l'on suppose a être assez petit, on trouve le rayon R_1 de la sphère où le mouvement est nul de nouveau

$$R_1 = R_0 \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{\frac{p_0}{p_1}},$$

il s'accorde avec la formule empirique.

Car la dérivée $\frac{dp}{dp_0}$ reste négative, la pression conduite p diminue constamment et tend donc sans alternatives vers sa valeur minimum, quand on augmente la pression initiale p_0.

La durée t_1 de l'explosion en le second cas dans l'air s'exprime par l'inégalité,

$$7.6 \times 10^{-3} < t_1 < 3.8 \times 10^{-2},$$

elle se représente en cas général par les fonctions élliptiques

$$t_1 = \frac{3A^3}{p_1}\Big[\zeta(u+a) - \zeta u\Big]_{u(1)}^{u\left(\frac{1}{w}\right)}$$

posant $$A = \frac{R_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1 + \frac{5\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Puisque c'est ainsi, on peut calculer la valeur t_1, au moyen des séries infinies.

Nous ne saurions terminer ce mémoire sans exprimer nos remerciements à M. le professeur K. Tamaki qui a bien voulu revoir les épreuves, et nous guida avec la bienveillance particulièrement agréable.