Sur l'approximation successive et l'unicité de la solution de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

Par

Hirosi Okamura

(Reçu le 25 mars, 1931)

I. Introduction

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

et envisageons en particulier la solution qui passe par l'origine $x=0$, $y=0$. Nous admettrons pour le moment que $f(x,\ y)$ soit continue dans le domaine $D[0\leqq x\leqq a,\ -b\leqq y\leqq c]$ où $a, b, c>0$.

Définissons maintenant la fonction $N(x)$ dans l'intervalle $x(0, a)$ comme la borne supérieure (finie ou infinie) de la quantité

$$(2) \qquad \left|\frac{f(x,y)-f(x,\bar{y})}{y-\bar{y}}\right|,$$

quand on fait varier, x étant fixe, l'intervalle non nul $(\bar{y}, y)$ en sorte qu'il occupe toutes les positions contenues dans $(-b, c)$.

Telle fonction $N(x)$ est mesurable B, parce qu'on ne change pas $N(x)$ dans sa définition en se limitant aux seules valeurs rationelles de y et $\bar{y}$ à cause de la continuité de $f(x,y)$, et ainsi $N(x)$ est la borne supérieure d'une infinité dénombrable de fonctions continues de x (2).

Nous proposons, dans ce mémoire, de trouver la condition suffisante pour que l'approximation successive de M. Picard[1] soit con-

---

1. Traité d'analyse, t. II, 3e éd., p. 368 et suiv.

vergente, au cas plus précis que celui de Lipschitz ou de M. Rosenblatt[1]. Les conditions obtenues sont en même temps les conditions suffisantes pour que la solution soit unique. Pour l'unicité de la solution nous savons déjà plusieurs conditions de la même nature, qui sont plus générales en certains égards. Je veux donner à la fin une simple remarque qui nous a conduit à toutes les conditions.

II. Hypothèses faites sur $f(x, y)$

Nous nous servirons de l'intégrale de Lebesgue au cours des raisonnements suivants, et en outre, ne nous limitant plus à la fonction continue $f(x, y)$, nous adopterons les hypothèses un peu plus larges données par M. Carathéodory[2] sur $f(x, y)$.

Ainsi nous supposerons dans le suivant que

$f(x, y)$ est une fonction finie dans le domaine $D[0 \leqq x \leqq a,\ -b \leqq y \leqq c]$ $(a, b, c > 0)$, et, x étant fixe, elle est une fonction continue de y dans l'intervalle $y(-b, c)$ et y étant fixe, elle est une fonction mesurable de x dans l'intervalle $x(0, a)$. De plus elle satisfait à la condition

$$(3) \qquad |f(x, y)| \leqq M(x),$$

où $M(x)$ est une fonction (finie ou non) sommable dans l'intervalle $x(0, a)$.

C'est évident que la fonction continue répond à ces conditions. D'autre part si l'on constitue la fonction $N(x)$, par la même définition qu'au paragraphe précédent, de la fonction $f(x, y)$ satisfaisant les hypothèses, elle est aussi mesurable. On peut le démontrer tout de suite en remarquant que la fonction (2) est maintenant mesurable au lieu d'être continue au cas précédent. Mais on ne peut plus conclure qu'elle soit mesurable B.

Voici un lemme de M. Carathéodory[3] sur une telle fonction $f(x, y)$.

Si $y(x)$ est une fonction mesurable dans l'intervalle $x(0, a)$ et l'on a $-b \leqq y(x) \leqq c$, $f(x, y(x))$ est sommable dans $x(0, a)$.

D'autre part, correspondant à ces nouvelles hypothèses, il suffit de considérer l'équation

$$(4) \qquad y(x) = \int_0^x f(x, y(x))\, dx,$$

1. Arkiv för Math., Astron. och Fys., 5 (1909), 2, p. 1.

2. Vorlesungen über reelle Funktionen, 2e éd., p. 665 et suiv. J'ai fait ici une légère modification.

3. Carathéodory, loc. cit.

au lieu de (1); car si $f(x, y)$ est continue, (4) est équivalente à (1).

M. Carathéodory[1] a démontré l'existence de la solution à cette équation générale (4). Mais aux cas particuliers la démonstration par l'approximation successive est aussi possible, comme on le verra d'après ce qui suit.

III. Deux lemmes

Avant d'étudier l'approximation successive, nous donnerons, pour plus de netteté, deux lemmes préliminaires.

Le premier s'énonce comme il suit:

$\varphi'(x)$ et $\nu'(x)$ sont deux fonctions (finies ou non) sommables dans l'intervalle $x(\alpha, \beta)$ $(\alpha < \beta)$, et posons

$$\nu(x) = \int_\alpha^x \nu'(x)dx + C, \tag{5}$$

C étant arbitraire. D'autre part nous considérons la suite des fonctions, dans le même intervalle

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_\alpha^x \varphi'(x)dx, \\ \varphi_1(x) = \int_\alpha^x \varphi(x)\nu'(x)dx, \\ \varphi_{n+1}(x) = \int_\alpha^x \varphi_n(x)\nu'(x)dx \qquad (n = 1, 2, \ldots\ldots). \end{cases} \tag{6}$$

Alors la série

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots\ldots\ldots \tag{7}$$

est toujours convergente dans l'intervalle $x(\alpha, \beta)$, et sa somme est égale à

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots\ldots = e^{\nu(x)}. \int_\alpha^x \varphi'(x)e^{-\nu(x)}dx \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta). \tag{8}$$

Pour le démontrer[2], remarquons d'abord que la fonction $\varphi_n(x)$ est donnée par

$$\varphi_n(x) = \int_\alpha^x \varphi'(t)\frac{[\nu(x) - \nu(t)]^n}{n\,!}dt \qquad (n = 1, 2, \ldots\ldots). \tag{9}$$

On peut, en effet, le vérifier en différentiant le second membre. Pour

1. Carathéodory, loc. cit.

2. Pour montrer seulement la convergence de (7), on peut procéder un peu plus rapidement. Voir M. Müller, Math. Zeitschr., 26 (1927), p. 627. Mais il paraît ne pas considérer l'intégrale de Lebesgue.

l'effectuer, il faut développer la fonction intégrée par la formule du binôme, faire sortir une puissance de $\nu(x)$ en dehors du signe d'intégration dans chaque terme, et ensuite appliquer la règle de différentiation d'un produit de fonctions. Ainsi on obtient la dérivée du second membre, presque partout,

$$\int_\alpha^x \varphi'(t)dt \,.\, \nu'(x)$$

pour $n=1$, et en général

$$\int_\alpha^x \varphi'(t)\frac{[\nu(x)-\nu(t)]^{n-1}}{(n-1)!}dt \,.\, \nu'(x) \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots\ldots).$$

On voit d'autre part la continuité absolue du second membre de (9) par le développement indiqué, car la somme et le produit des fonctions absolument continues le sont aussi. Par conséquent la relation (9) s'établit successivement.

Or considérons la série

$$\varphi'(t)+\varphi'(t)\frac{\nu(x)-\nu(t)}{1\,!}+\varphi'(t)\frac{[\nu(x)-\nu(t)]^2}{2\,!}+\ldots\ldots,$$

x étant regardé comme paramètre arbitraire dans $x(\alpha,\beta)$. Cette série converge presque partout (sauf les points où $\varphi'(t)$ devient infinie) vers $\varphi'(t)e^{\nu(x)-\nu(t)}$, et la somme de quelques premiers termes ne surpasse jamais en valeur absolue la fonction sommable $|\varphi'(t)|e^{|\nu(x)-\nu(t)|}$. Donc, par le théorème de M. Lebesgue[1], nous avons

$$\int_\alpha^x \varphi'(t)dt+\int_\alpha^x \varphi'(t)\frac{[\nu(x)-\nu(t)]}{1\,!}dt+\int_\alpha^x \varphi'(t)\frac{[\nu(x)-\nu(t)]^2}{2\,!}dt$$
$$+\ldots\ldots=\int_\alpha^x \varphi'(t)e^{\nu(x)-\nu(t)}dt \qquad (\alpha\leqq x\leqq\beta).$$

C'est la relation demandée (8), en vertu de (9). (C. q. f. d.)

Passons maintenant au second lemme.

Cette fois supposons que les fonctions $\varphi'(x)$ et $\nu'(x)$ ne soient pas négatives, $\varphi'(x)$ sommable dans $x(\alpha,\ \beta)$ comme précédemment, mais $\nu'(x)$ ne sommable que dans l'intervalle $(\alpha+\eta,\ \beta)$, quel que soit le nombre positif η. Soit donc au lieu de (5)

$$\nu(x)=\int_\delta^x \nu'(x)dx+C,$$

1. De la Vallée Poussin, Intégrale de Lebesgue, etc., p. 49.

δ étant un nombre tel que $\alpha < \delta \leqq \beta$.

Alors pour qu'on puisse former les fonctions

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ldots\ldots$$

successivement par les formules (6), *c'est-à-dire que les fonctions*

$$\varphi(x)\nu'(x),\ \ \varphi_1(x)\nu'(x),\ \ldots\ldots\ldots$$

soient toutes sommables dans $x(\alpha,\ \beta)$, et de plus la série

$$\varphi(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots\ldots\ldots \tag{10}$$

formée de ces fonctions soit convergente dans $x\,(\alpha,\ \beta)$, il faut et il suffit que

$$\varphi'(x)e^{-\nu(x)}$$

soit sommable dans $x\,(\alpha,\ \beta)$.

Quand ces conditions sont remplies, nous avons aussi

$$\varphi(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots\ldots=e^{\nu(x)}.\int_\alpha^x\varphi'(x)e^{-\nu(x)}dx \quad (\alpha\leqq x\leqq\beta). \tag{11}$$

Nous prouverons ce lemme comme il suit:

Définissons, pour chaque valeur d'un paramètre $\gamma(\alpha<\gamma\leqq\beta)$, les fonctions $\Phi(x,\ \gamma),\ \Phi_1(x,\gamma),\ \Phi_2(x,\gamma),\ \ldots\ldots\ldots$ dans l'intervalle $x(\alpha,\beta)$ de façon qu'elles s'annulent toutes dans $x(\alpha,\gamma)$ et soient assujetties dans $x(\gamma,\beta)$ aux conditions suivantes analogues à (6)

$$\begin{cases}\Phi(x,\ \gamma)=\displaystyle\int_\gamma^x\varphi'(x)dx,\\ \Phi_1(x,\gamma)=\displaystyle\int_\gamma^x\Phi(x,\gamma)\nu'(x)dx=\int_\alpha^x\Phi(x,\gamma)\nu'(x)dx,\\ \Phi_{n+1}(x,\gamma)=\displaystyle\int_\gamma^x\Phi_n(x,\gamma)\nu'(x)dx=\int_\alpha^x\Phi_n(x,\gamma)\nu'(x)dx\ \ (n=1,2,\ldots).\end{cases} \tag{12}$$

Ces fonctions sont toutes non négatives, et quand on fait tendre γ à α, elles vont constamment en croissant à chaque point de $x(\alpha,\beta)$.

D'abord on a évidemment

$$\lim_{\gamma\to\alpha}\Phi(x,\gamma)=\varphi(x) \qquad (\alpha\leqq x\leqq\beta).$$

Donc $\Phi(x,\gamma)\nu'(x)$ tend en croissant vers $\varphi(x)\nu'(x)$ lorsque γ se rapproche de α. Par conséquent en appliquant le théorème donné par M. de la Vallée Poussin[1] on arrive aux résultats suivants.

1. De la Vallée Poussin, loc. cit., p. 49.

Si $\varphi_1(x)$ existe c'est-à-dire si $\varphi(x)\nu'(x)$ est sommable dans $x(\alpha, \beta)$, on a

$$\lim_{\gamma\to\alpha}\int_\alpha^x \Phi(x,\gamma)\nu'(x)dx = \int_\alpha^x \varphi(x)\nu'(x)dx \qquad (\alpha\leqq x\leqq\beta),$$

ou, par (12),

$$\lim_{\gamma\to\alpha}\Phi_1(x,\gamma)=\varphi_1(x) \qquad (\alpha\leqq x\leqq\beta).$$

Au contraire si $\varphi(x)\nu'(x)$ n'est pas sommable dans $x(\alpha, \beta)$, il en est ainsi au voisinage arbitraire de α et l'on a

$$\lim_{\gamma\to\alpha}\int_\alpha^x \Phi(x,\gamma)\nu'(x)dx = +\infty \qquad (\alpha< x\leqq\beta),$$

ou, par (12),

$$\lim_{\gamma\to\alpha}\Phi_1(x,\gamma)=+\infty \qquad (\alpha< x\leqq\beta).$$

Nous avons expliqué ici sur $\Phi_1(x,\gamma)$ et $\varphi_1(x)$, mais quand $\varphi_1(x)$ existe c'est la même chose pour $\Phi_2(x,\gamma)$ et $\varphi_2(x)$, et ainsi de suite successivement.

Donc, en somme, quand $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...toutes existent, pour n arbitraire, on a

$$\lim_{\gamma\to\alpha}\Phi_n(x,\gamma)=\varphi_n(x) \qquad (\alpha\leqq x\leqq\beta). \tag{13}$$

Mais quand $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{i-1}(x)$ seules existent, et $\varphi_i(x)$ n'existe plus, (13) est vraie pour $n\leqq i-1$, et

$$\lim_{\gamma\to\alpha}\Phi_i(x,\gamma)=+\infty \qquad (\alpha< x\leqq\beta). \tag{14}$$

D'autre part, en vertu du premier lemme, on sait

$$\Phi(x,\gamma)+\Phi_1(x,\gamma)+\Phi_2(x,\gamma)+\ldots\ldots=e^{\nu(x)}\cdot\int_\gamma^x\varphi'(x)e^{-\nu(x)}dx. \tag{15}$$

Dans le premier membre chaque terme n'est pas négatif et il ne décroît pas quand on fait tendre γ à α. A cause de (13) et (14) la limite de ce premier membre est finie, si et seulement si la série (10) est convergente. Dans ce cas la limite est la somme de (10). Ainsi l'égalité (15) devient (11) par le passage à la limite. (C. q. f. d.)

IV. Approximation successive

Revenons à (4).

Prenons une fonction $y_0(x)$, mesurable dans $x(0, a')$ $(0<a'\leqq a)$ et bornée entre $-b$ et c, d'ailleurs arbitraire. Choisissant a' convenablement, on peut former les fonctions

(16) $$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots$$

successivement par les formules

(17) $$y_{n+1}(x) = \int_0^x f(x, y_n(x))dx \qquad (n=0, 1, 2, \ldots\ldots),$$

ceci étant possible en vertu du lemme de II. Il suffit de prendre a' tel que

$$\begin{cases} 0 < a' \leqq a, \\ \int_0^{a'} M(x)dx \leqq b, c. \end{cases}$$

Quelquefois on peut prendre a' plus grand, mais nous n'insisterons pas sur cette question.

Lorsque la suite (16) converge dans $x(0, a')$, sa limite $Y(x)$ satisfait à l'équation (4)[1]. C'est la conséquence du passage à la limite de (17). Le premier membre tend manifestement vers $Y(x)$, et le second membre, à cause de (3) et de la continuité de $f(x, y)$ par rapport à y, a pour limite

$$\int_0^x f(x, Y(x))dx,$$

par le théorème de M. Lebesgue.

Cette suite des fonctions (16) converge si $N(x)$ est sommable dans $x(0, a)$. Elle converge aussi lorsqu'au moins, $N(x)$ est sommable dans $x(\eta, a)$ pour tout nombre positif η et si les conditions suivantes sont remplies.

Pour certain nombre entier positif (ou nul) j, on a

(18) $$|y_{j+1}(x) - y_j(x)| \leqq \int_0^x \psi'(x)dx \qquad (0 \leqq x \leqq a'),$$

où $\psi'(x)$ est une fonction non négative sommable dans $x(0, a')$ en même temps que la fonction $\psi'(x)e^{-L(x)}$ où $L(x)$ est, par définition,

(19) $$L(x) = \int_\delta^x N(x)dx \qquad (0 < \delta \leqq a').$$

De plus, au cas où ces conditions sont remplies, on a sur la limite $Y(x)$ de (16) la formule

(20) $$|Y(x) - y_j(x)| \leqq e^{L(x)} \cdot \int_0^x \psi'(x)e^{-L(x)}dx \qquad (0 \leqq x \leqq a'),$$

et $Y(x)$ satisfait à l'équation (4) dans $x(0, a')$.

---

1. Le raisonnement d'ici se trouve déjà dans le mémoire de M. Nikliborc, Studia Mathematica, 1 (1929), p. 203. Voir aussi le mémoire cité de M. Müller, p. 621.

La vérité de ces résultats est la conséquence immédiate des lemmes du paragraphe précédent. Faisons correspondre en effet $\psi'(x)$, $N(x)$ et $L(x)$ aux $\varphi'(x)$, $\nu'(x)$ et $\nu(x)$ des lemmes et définissons les fonctions $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ...pareillement aux $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...

Alors il résulte de (17) et (18) successivement

$$|y_{j+n+1}(x)-y_{j+n}(x)|\leqq\psi_n(x) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots),$$

et, par conséquent, la série

$$(y_{j+1}(x)-y_j(x))+(y_{j+2}(x)-y_{j+1}(x))+\ldots\ldots\ldots$$

est majorée par la série convergente

$$\psi(x)+\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots\ldots \quad =e^{L(x)}\cdot\int_0^x\psi'(x)e^{-L(x)}dx,$$

d'où l'on conclut la convergence de (16) et la formule (20).

Il faut remarquer deux cas simples où la suite (16) remplit ces conditions quelle que soit la fonction de départ $y_0(x)$. Ce sont les cas :

1° *où $N(x)$ est sommable dans $x(0,\ a)$;*

2° *où, plus généralement, $N(x)$ est sommable dans $x(\eta,\ a)$ pour tout nombre positif η et la fonction $M(x)e^{-L(x)}$ est sommable dans $x(0,\ a)$.*

Dans ces cas la condition de convergence (18) est satisfaite, comme on le voit par

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqq\int_0^x|f(x,\ y_1(x))-f(x,\ y_0(x))|\,dx\leqq\int_0^x 2M(x)dx.$$

Enfin dans ces deux cas la solution de (4) est unique. Car si $y(x)$ est une solution quelconque, on a

$$|y(x)-y_1(x)|\leqq\int_0^x|f(x,\ y(x))-f(x,\ y_0(x))|\,dx\leqq\int_0^x 2M(x)dx,$$

et regardant $2M(x)$ et $N(x)$ comme $\varphi'(x)$ et $\nu'(x)$ des lemmes du paragraphe précédent, on a successivement

$$\begin{aligned}|y(x)-y_{n+1}(x)|&\leqq\int_0^x|f(x,\ y(x))-f(x,\ y_n(x))|\,dx\\&\leqq\int_0^x|y(x)-y_n(x)|\,N(x)dx\leqq\int_0^x\varphi_{n-1}(x)N(x)dx=\varphi_n(x).\end{aligned}$$

Or $\varphi_n(x)$ tend vers zéro par les lemmes et

$$\lim_{n\to\infty}|y(x)-y_{n+1}(x)|=|y(x)-Y(x)|=0.$$

Donc

$$y(x)=Y(x).$$

On verra une autre démonstration de l'unicité de la solution dans VI.

M. Carathéodory[1] a appelé la *condition de Lipschitz* celle du cas 1°, et il a donné une démonstration de l'unicité de la solution.

Le cas 2° comprend comme cas particulier celui où $f(x, y)$ est bornée et $e^{-L(x)}$ est sommable. La sommabilité est satisfaite si

$$N(x) \leqq \frac{k}{x} \qquad (0 < k < 1).$$

C'est la condition de M. Rosenblatt.

V. Exemples

Comme exemple, considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y| + [\omega(x)]^2},$$

où $\omega(x)$ est une fonction continue s'annulant une infinité de fois au voisinage de 0, mais son inverse $\dfrac{1}{\omega(x)}$ étant sommable. Dans ce cas on a évidemment

$$N(x) = \frac{1}{2\,|\omega(x)|}.$$

Donc cet exemple appartient au cas 1° du paragraphe précédent. Pour la fonction $\omega(x)$, posons, par exemple,

$$\omega(x) = \left(x \sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

La sommabilité de $\dfrac{1}{\omega(x)}$ vient de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{(n+1)\pi}}^{\frac{1}{n\pi}} \frac{dx}{\left|x \sin\frac{1}{x}\right|^{\frac{1}{3}}}.$$

C'est facile à voir si l'on change le variable

$$\int_{\frac{1}{(n+1)\pi}}^{\frac{1}{n\pi}} \frac{dx}{\left|x \sin\frac{1}{x}\right|^{\frac{1}{3}}} = \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{(\xi + n\pi)^{\frac{5}{3}} (\sin \xi)^{\frac{1}{3}}}, \quad \left(\frac{1}{x} = \xi + n\pi\right)$$

$$\leqq \frac{1}{(n\pi)^{\frac{5}{3}}} \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{(\sin \xi)^{\frac{1}{3}}}.$$

---

1. Carathéodory, loc. cit.

Autrefois M. Nagumo[1] a étudié le cas critique

$$N(x) \leqq \frac{1}{x},$$

qui ne rentre pas dans le cas 2°. Dans ce cas il peut arriver qu'une infinité de solutions satisfassent à l'équation (4), comme on le voit par le simple exemple suivant,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ 1 & \left(x \neq 0,\ \dfrac{y}{x} > 1\right), \\ \dfrac{y}{x} & \left(x \neq 0,\ \left|\dfrac{y}{x}\right| \leqq 1\right), \\ -1 & \left(x \neq 0.\ \dfrac{y}{x} < -1\right). \end{cases}$$

$f(x, y)$ satisfait aux conditions de II pour un domaine convenable D, quoique (4) ait une infinité de solutions

$$y = cx, \qquad |c| \leqq 1.$$

Cet exemple nous montre que le théorème de M. Nagumo n'est pas vrai sous les seules conditions de II, et il nous faut une autre condition que nous étudierons dans le paragraphe suivant.

VI. Remarque sur les conditions d'unicité

Bornons-nous au cas où $N(x)$ ou plus généralement $N_1(x)$ est sommable au moins dans $x(\eta, a)$, si petit qu'il soit le nombre positif η. $N_1(x)$ est définie tout à fait pareillement à $N(x)$, excepté que l'on prend au lieu de (2)

$$(21) \qquad \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}},$$

pas la valeur absolue. Comme $N(x)$, $N_1(x)$ est mesurable, et manifestement on a

$$(22) \qquad |N_1(x)| \leqq N(x),$$

$N_1(x)$ pouvant être négative.

En effet, supposons qu'on ait deux solutions distinctes $y(x)$ et $\bar{y}(x)$ de l'équation (4) au voisinage de $x = 0$. Il est admissible de supposer qu'une d'elles ne soit jamais inférieure à l'autre. Pour l'assurer

1. Japanese Jour. Math., 3 (1926), p. 107, et 4 (1927), p. 307.

il suffit de décomposer l'intervalle d'intégration $(0, x)$ du second membre de (4) à l'ensemble fermé E où l'on a $y(x)=\bar{y}(x)$ et aux intervalles contigus à E. Ainsi nous savons que la fonction prenant à chaque point la valeur plus grande ou plus petite de $y(x)$ et $\bar{y}(x)$ satisfait à (4). Donc nous admettrons toujours

$$y(x) \geqq \bar{y}(x).$$

Alors nous avons deux relations fondamentales

$$y(x)-\bar{y}(x)=\int_0^x [f(x, y(x))-f(x, \bar{y}(x))]dx, \tag{23}$$

et, presque partout (sauf les points où $N_1(x)=+\infty$),

$$f(x, y(x))-f(x, \bar{y}(x)) \leqq N_1(x)\ [y(x)-\bar{y}(x)]. \tag{24}$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\begin{cases} \chi(x)=y(x)-\bar{y}(x)=\displaystyle\int_0^x [f(x, y(x))-f(x, \bar{y}(x))]dx, \\ \chi'(x)=f(x, y(x))-f(x, \bar{y}(x)). \end{cases} \tag{25}$$

En combinant (23) et (24)[1] avec les notations de (25), on a

$$\chi'(x) \leqq N_1(x)\chi(x)$$

ou

$$e^{-L_1(x)}.\ [\chi'(x)-N_1(x)\chi(x)] \leqq 0,$$

où, par définition,

$$L_1(x)=\int_\delta^x N_1(x)dx \qquad (0<\delta \leqq a).$$

Donc la fonction absolument continue et non négative de $x (x>0)$

$$e^{-L_1(x)}.\ \chi(x)$$

ne croît jamais, et l'on a ensuite

$$\lim_{x\to 0} e^{-L_1(x)}.\ \chi(x)>0. \tag{26}$$

Cette inégalité joue un rôle essentiel. Nous en déduirons plusieurs conditions suffisantes pour que la solution de (4) soit unique. Nous les démontrons par l'absurde en montrant sous quelques hypothèses que

$$\lim_{x\to 0} e^{-L_1(x)}.\ \chi(x)=0. \tag{27}$$

D'abord si $f(x, y)$ est continue à l'origine, c'est-à-dire si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=f(0, 0), \tag{28}$$

1. Ce mode de combinaison est nouveau, à notre connaissance.

en vertu du théorème de la moyenne appliqué sur

$$\int_0^x [f(x, y(x)) - f(x, \bar{y}(x))] dx,$$

on aura la condition

$$(29) \qquad e^{-L_1(x)} . x < P,$$

P étant une constante, d'où l'on conclut (27).

M. Fukuhara[1] a déjà trouvé la condition de cette forme au cas plus restreint.

Cette condition (29) contient comme cas particuliers les conditions

$$N(x) \leqq \frac{1}{x}$$

de M. Nagumo et

$$N(x) \leqq \frac{1+\varepsilon(x)}{x}$$

de M. Shimizu[2], où $\varepsilon(x)$ $(x>0)$ est continue et positive, $\dfrac{\varepsilon(x)}{x}$ étant intégrable dans $x(0, a)$.

Au lieu de la continuité (28) si nous savons seulement que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x^p f(x, y) = 0 \qquad (0 < p < 1),$$

il nous suffit pour conclure (27), ou bien

$$e^{-L_1(x)} . x^{1-p} < P_1,$$

P_1 étant une constante, ou bien la condition plus forte

$$N(x) \leqq (1-p) \frac{1+\varepsilon(x)}{x},$$

$\varepsilon(x)$ ayant le même sens. C'est la condition de M. Watanabe[3].

Enfin pour conclure (27) il suffit aussi

$$\lim_{x \to 0} e^{-L_1(x)} . \int_0^x M(x) dx = 0.$$

Ceci implique le cas où $e^{-L(x)} . M(x)$ est sommable, la condition 2° du paragraphe IV, parce que, $e^{-L(x)}$ étant non croissant, on a au voisinage de $x=0$

$$\int_0^x e^{-L(x)} . M(x) dx \geqq e^{-L(x)} . \int_0^x M(x) dx \geqq e^{-L_1(x)} . \int_0^x M(x) dx.$$

---

1. Japanese Jour. Math., 5 (1928), p. 246.
2. Proc. Imp. Acad., 4 (1928), p. 328.
3. Japanese Jour. Math., 7 (1930), p. 209.