# Ueber die Schlichtheit der Abschnitte gewisser Potenzreihen

Von

**Akira Kobori**

(Eingegangen am 1, September 1931)

---

In seiner interessanten Arbeit hat Herr G. Szegö[1] den folgenden Satz bewiesen: Die Funktion

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

sei regulär und schlicht im Kreise $|z|<1$. Dann sind sämtliche Abschnitte

$$S_n(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n, \quad (n=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

schlicht im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$.

Daran anschliessend möchte ich hier die Potenzreihen

(1) $$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

und ihre sämtlichen Abschnitte

(2) $$S_n(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n, \quad (n=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

betrachten, die mit den Bedingungen

(A) $$a_1\neq 0, \quad |a_1|\geqq|a_n|, \quad (n=2,\ 3,\cdots\cdots)$$

charakterisiert sind.

**1.** Bevor ich zu Potenzreihen vom Typus A——in den folgenden Zeilen bezeichne ich die Potenzreihen mit den Bedingungen (A) mit „Potenzreihen vom Typus A"——übergehe, beschäftige ich mich mit den Potenzreihen (1), die mit noch allgemeineren Bedingungen

(B) $$a_1\neq 0, \quad a_n=O(1)$$

bedingt sind.

Diese Potenzreihen sind regulär im Kreise vom Radius nicht

---

1. G. Szegö: Zur Theorie der schlichten Abbildungen. Math. Annalen. **100**, (1928).

kleiner als Eins. Denn, da $f(z)$ vom Typus B ist, gibt es eine positive Zahl $m$ derart, dass

$$|a_n| \leqq m, \quad (n=1, 2, \cdots\cdots),$$

daher ist

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|}} \geqq \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m}} = 1.$$

Nun ist für zwei verschiedene Punkte $z_1$, $z_2$ des Kreises $|z| < r$

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} = a_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu (z_1^{\nu-1} + z_1^{\nu-2} z_2 + \cdots\cdots + z_1 z_2^{\nu-2} + z_2^{\nu-1}).$$

Sei $\rho$ die Schranke, die ich finden möchte, so ist für $|z_1| < \rho$, $|z_2| < \rho$

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| > |a_1| - \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |a_\nu| \rho^{\nu-1}.$$

Da aber $f(z)$ vom Typus B ist,

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| > |a_1| - m \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \rho^{\nu-1}.$$

Ferner ist

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \rho^{\nu-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2} - 1, \quad \text{für } \rho < 1,$$

so ist

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| > |a_1| + m - \frac{m}{(1-\rho)^2}. \tag{3}$$

In analoger Weise hat man

$$\left|\frac{S_n(z_1)-S_n(z_2)}{z_1-z_2}\right| > |a_1| + m - \frac{m}{(1-\rho)^2}. \tag{4}$$

Deswegen sind für $\rho$, für das die Gleichung

$$|a_1| + m - \frac{m}{(1-\rho)^2} = 0 \tag{5}$$

genügt, die rechten Seiten von (3) und (4) beide positiv, d. h., für

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{|a_1| + m}},$$

woraus folgt der

Satz I. Es sei $f(z)$ regulär im Kreise $|z|<r$. Dann sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte schlicht im Kreise

$$|z| < 1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{|a_1| + m}},$$

falls $f(z)$ vom Typus B ist.

Wenn man hier setzt

$$m = |a_1|,$$

so erhält man eine Potenzreihe vom Typus A. Damit hat man den

Satz 2. Es sei $f(z)$ regulär im Kreise $|z|<r$. Dann sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte schlicht im Kreise

$$|z| < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.292\cdots\cdots,$$

falls $f(z)$ vom Typus A ist.

Ist die Potenzreihe (1) bedingt mit

$$\text{(C)} \qquad |a_n| \geqq |a_{n+1}|, \quad (n=1,\ 2,\cdots\cdots),$$

so ist offenbar

$$|a_1| \geqq |a_n|, \quad (n=2,\ 3,\cdots\cdots).$$

Also ergibt sich hieraus als spezieller Fall des Satzes 2 folgender Satz.

Es sei $f(z)$ regulär im Kreise $|z|<r$, so sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte $S_n(z)$ schlicht im Kreise

$$|z| < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

falls $f(z)$ vom Typus C ist.

Dies ist der Satz, der von Herrn T. Itihara[1] bewiesen wurde.

**2.** Nun gebe ich zwei Sätze, die unmittelbar aus dem Satz I folgen.

Satz 3. Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots\cdots \qquad a_1 \neq 0$$

---

1. T. Itihara: Eine Bemerkung über die Schlichtheit der Potenzreihe und ihrer Abschnitte. Japanese Jour. of Math. **6**, (1929).

regulär im Kreise $|z|<1$, so sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte schlicht im Kreise

$$|z|<1-\frac{1}{\sqrt{|a_1|+1}},$$

falls $|f(z)|\leqq 1$ für $|z|<1$.

Nach dem von Cauchy herrührenden Satz sind

$$|a_n|\leqq 1, \quad (n=0,\ 1,\cdots\cdots).$$

Also ist $f(z)$ vom Typus B, daraus folgt die Behauptung.

Herr C. Carathéodory[1] hat den Satz bewiesen, welcher lautet[2]:

Die Funktion

$$f(z)=\frac{1}{2}+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

sei im Kreise $|z|<1$ regulär und habe dort positiven Realteil. Dann sind

$$|a_n|\leqq 1, \quad (n=1,\ 2,\cdots\cdots).$$

Hierbei skizziere ich den Beweis flüchtig.

Man setze

$$a_n=\lambda_n+i\mu_n,\quad \lambda_n,\ \mu_n \text{ reell}$$
$$z=re^{i\vartheta},\quad 0\leqq\vartheta<2\pi,\quad 0<r<1,$$

so ist

$$f(z)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\cos n\vartheta-\mu_n\sin n\vartheta)r^n+i\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\sin n\vartheta$$
$$+\mu_n\cos n\vartheta)r^n.$$

Bezeichnet man mit $P(r,\vartheta)$ den Realteil der Funktion, so ist

$$P(r,\vartheta)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\cos n\vartheta-\mu_n\sin n\vartheta)r^n.$$

Daraus folgt

1. C. Carathéodory: Ueber den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. **32**, (1911).

2. Ich habe hier die Wortlaute von Herren Pólya und Szegö benutzt, die in dem von ihnen herausgegebenen Buche „Aufgaben und Lehrsätze" vorhanden sind.

$$a_n = \lambda_n + i\mu_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(r,\vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta.$$

Demnach ist

$$|a_n| \leqq \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(r,\vartheta) d\vartheta$$

$$= \frac{1}{r^n}.$$

Hierbei lasse man $r$ gegen 1 konvergieren.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man den Satz ableiten:

Satz 4. Es sei

$$f(z) = \frac{1}{2} + a_1 z + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots\cdots, \quad a_1 \neq 0$$

regulär und habe positiven Realteil im Kreise $|z| < 1$. Dann sind $f(z)$ und ihre sämtlichen Abschnitte schlicht im Kreise

$$|z| < 1 - \frac{1}{\sqrt{|a_1|+1}}.$$

Man sieht mit Hilfe des Carathéodoryschen Satzes, dass $f(z)$ vom Typus B ist. So folgt diese Behauptung unmittelbar nach dem Satz I.

**3.** Nun gehe ich zu schlichten Potenzreihen über.

Hilfssatz I (von Herrn Szegö)[1].

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots\cdots$$

regulär und schlicht im Kreise $|z| < 1$. Dann gilt für $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ die Ungleichung

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqq |a_1| \left(\frac{1 - |z_1|}{1 + |z_1|}\right)^2 \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|}{(|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|)^2}. \tag{6}$$

Beweis. Wie man leicht nachprüft, ist

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(z_1) - f\left(\dfrac{-\zeta + z_1}{1 - \bar{z}_1 \zeta}\right)}{f'(z_1)(1 - |z_1|^2)}$$

---

1. G. Szegö. loc. cit. Mit Hilfe des Kunstgriffes, der in dem von Herrn L. Bieberbach bearbeiteten „Lehrbuch der Funktionentheorie" vorhanden ist, habe ich im Beweise geringe Modifikation gemacht.

auch im Kreise $|\zeta|<1$ regulär und schlicht und besitzt eine in $|\zeta|<1$ gültige Potenzreihenentwicklung, die so beginnt

$$\varphi(\zeta)=\zeta+\gamma_2\zeta^2+\cdots\cdots.$$

Es sei hier

$$z_2=\frac{-\zeta_2+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta_2}, \quad \text{wo } |\zeta_2|<1 \text{ ist,} \quad \text{damit ist } |z_2|<1,$$

so ist

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)}\right| \geqq \frac{|\zeta_2|}{(1+|\zeta_2|)^2}.$$

Also ist

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqq |f'(z_1)|(1-|z_1|^2)\cdot\frac{|1-\bar{z}_1z_2|}{(|1-\bar{z}_1z_2|+|z_1-z_2|)^2}.$$

Da aber

$$|f'(z_1)| \geqq |a_1|\frac{1-|z_1|}{(1+|z_1|)^3}$$

ist, so folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. Es sei $f(z)$ vom Typus A. Setzt man

$$f(z)=S_n(z)+\sigma_n(z),$$

wo

$$S_n(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n$$

und

$$\sigma_n(z)=a_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots,$$

so gilt die Ungleichung

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| > \left|\frac{\sigma_n(z_1)-\sigma_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|, \tag{7}$$

für $|z_1|<\frac{1}{3}$, $|z_2|<\frac{1}{3}$ und $n\geqq 4$.

Beweis. Nach dem Hilfssatz I ist

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqq |a_1|\left(\frac{1-|z_1|}{1+|z_1|}\right)^2\cdot$$

$$\frac{1}{|1-\bar{z}_1z_2|+2|z_1-z_2|+\left|\frac{(z_1-z_2)^2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}.$$

Ich unterscheide zwei Fälle:

i) $$|z_1-z_2|\geqq 0.2.$$

Man hat

$$\left|\frac{1-\bar{z}_1z_2}{z_1-z_2}\right|<5\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)=\frac{50}{9}$$

und

$$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|<1.$$

Daher ist

$$\left|\frac{1-\bar{z}_1z_2}{z_1-z_2}\right|+2+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|<3+\frac{50}{9}=\frac{77}{9},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}|a_1|\left(\frac{1-|z_1|}{1+|z_1|}\right)^2\cdot\frac{1}{|1-\bar{z}_1z_2|+2|z_1-z_2|+\left|\frac{(z_1-z_2)^2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}\\ >\frac{|a_1|}{|z_1-z_2|}\times\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{77}\\ >\frac{|a_1|}{|z_1-z_2|}\times 0.029.\end{aligned}$$

Da aber $f(z)$ vom Typus A ist, so ist

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu\frac{z_1^\nu-z_2^\nu}{z_1-z_2}\right|&\leqq\frac{|a_1|}{|z_1-z_2|}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|z_1^\nu-z_2^\nu|\\ &<\frac{|a_1|}{|z_1-z_2|}2\cdot\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^\nu\\ &<\frac{|a_1|}{|z_1-z_2|}\times 0.013,\ \text{für } n\geqq 4.\end{aligned}$$

ii) $$|z_1-z_2|<0.2.$$

Man hat wieder

$$|1-\bar{z}_1z_2|<1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$$

$$2|z_1-z_2|<\frac{2}{5}$$

und

$$\left|\frac{(z_1-z_2)^2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|<\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{200}.$$

Daher hat man

$$|1-\bar{z}_1 z_2|+2|z_1-z_2|+\left|\frac{(z_1-z_2)^2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|<\frac{10}{9}+\frac{2}{5}+\frac{9}{200}$$
$$=\frac{2801}{1800}.$$

Daraus folgt

$$|a_1|\left(\frac{1-|z_1|}{1+|z_1|}\right)^2\cdot\frac{1}{|1-\bar{z}_1 z_2|+2|z_1-z_2|+\left|\frac{(z_1-z_2)^2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}$$
$$>|a_1|\times\frac{1}{4}\cdot\frac{1800}{2801}$$
$$>|a_1|\times 0.16.$$

Ferner ist

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu\frac{z_1^\nu-z_2^\nu}{z_1-z_2}\right|<|a_1|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1}$$
$$=|a_1|\times\frac{11}{108},\quad \text{für } n\geqq 4,$$
$$<|a_1|\times 0.102.$$

Also ist die Behauptung bewiesen.

Satz 5. Es sei $f(z)$ regulär und schlicht im Kreise $|z|<1$, dann sind sämtliche Abschnitte schlicht im Kreise

$$|z|<\frac{1}{3}=0.333\cdots\cdots,$$

falls $f(z)$ vom Typus A ist.

Beweis. Es ist

$$\left|\frac{S_n(z_1)-S_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|>\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|-\left|\frac{\sigma_n(z_1)-\sigma_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|.$$

Nach dem Hilfssatz 2 ist für $n\geqq 4$

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|>\left|\frac{\sigma_n(z_1)-\sigma_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|, \text{ wo}$$

$$|z_1|<\frac{1}{3}, \quad |z_2|<\frac{1}{3}.$$

Für $n=3$ und $n=2$ ist die Behauptung leicht zu beweisen.
Für $n=3$ ist

$$|a_1+a_2(z_1+z_2)+a_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)|$$
$$\geqq |a_1|-|a_2(z_1+z_2)+a_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)|.$$

Da aber $f(z)$ vom Typus A ist, ist

$$\geqq |a_1|\{1-(|z_1|+|z_2|)-(|z_1|^2+|z_1||z_2|+|z_2|^2)\}$$
$$>|a_1|\left(1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=0.$$

Für $n=2$ ist

$$|a_1+a_2(z_1+z_2)|\geqq|a_1|\{1-(|z_1|+|z_2|)\}$$
$$>|a_1|\left(1-\frac{2}{3}\right)>0.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

**4.** Die hiermit gewonnene obere Schranke $\frac{1}{3}$ für die Schlichtheit sämtlicher Abschnitte aller im Einheitskreise schlichten Potenzreihen vom Typus A scheint mir kaum die wahre obere Schranke zu sein.

Herr L. Fejér[1] hat den Satz bewiesen:

Das Polynom

(9) $$1+z+\cdots\cdots+z^n$$

wo $n\geqq 1$, ist im Kreise $|z|<\rho_n$ schlicht, wenn $\rho_n$ die einzige positive Wurzel der Gleichung

(10) $$1-(n+1)\rho^n-n\rho^{n+1}=0$$

bezeichnet.

Ich sehe hierbei das Polynom als die Abschnitte der im Einheitskreise schlichten Potenzreihe

(11) $$1+z+\cdots\cdots+z^n+\cdots\cdots$$

an. So ist die Potenzreihe (11) vom Typus A, daher müssen nach dem

1. L. Fejér: Ueber die Grenzen der Abschnitte gewisser Potenzreihen. Acta litterarum ac scientiarum. **4**, (1928).

Satz 5 ihre sämtlichen Abschnitte im Kreise $|z|<\frac{1}{3}$ schlicht sein. In den folgenden Zeilen aber beweise ich einen Satz und mit dessen Hilfe schliesse ich, dass sämtliche Abschnitte

$$(9') \qquad 1+z+\cdots\cdots+z^n, \quad (n=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

in ein wenig grösseren Kreise schlicht sind.

Hilfssatz 3. Versteht man unter $\rho_n$ die positive Wurzel der trinomischen Gleichung

$$(10) \qquad 1-(n+1)\rho^n-n\rho^{n+1}=0,$$

so ist

$$\rho_2<\rho_3<\cdots\cdots<\rho_n<\cdots\cdots$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=1.$$

Beweis. Nach der Voraussetzung sind

$$(12) \qquad n\rho_n^{n+1}+(n+1)\rho_n^n=1$$

und

$$(13) \qquad (n+1)\rho_{n+1}^{n+2}+(n+2)\rho_{n+1}^{n+1}=1.$$

Aus der Relation (12) ist

$$(14) \qquad \frac{\rho_n}{n+1}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n+1)\rho_n^n},$$

daraus folgt

$$\rho_n=\frac{1}{n\rho_n^n}-\frac{n+1}{n}.$$

In analoger Weise hat man

$$\rho_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\rho_{n+1}^{n+1}}-\frac{n+2}{n+1}.$$

Wäre nun

$$\rho_n>\rho_{n+1},$$

so wäre

$$\frac{1}{n\rho_n^n}-\frac{n+1}{n}>\frac{1}{(n+1)\rho_{n+1}^{n+1}}-\frac{n+2}{n+1},$$

oder

$$\frac{1}{n\rho_n^n}-\frac{1}{(n+1)\rho_{n+1}^{n+1}}>\frac{1}{n(n+1)}.$$

Wegen der Relation

$$\frac{1}{\rho_n} < \frac{1}{\rho_{n+1}}$$

würde

$$\frac{1}{n\rho_n^n} - \frac{1}{(n+1)\rho_n^{n+1}} > \frac{1}{n(n+1)}$$

sein. Aus der Relation (14) aber sind

$$\frac{1}{n\rho_n^n} = \rho_n + \frac{n+1}{n}$$

und

$$\frac{1}{(n+1)\rho_n^{n+1}} = \frac{1}{\rho_n} + \frac{n}{n+1}.$$

Daher müsste

$$\rho_n - \frac{1}{\rho_n} > -\frac{2}{n+1}$$

sein, d. h.

$$\rho_n^2 + \frac{2}{n+1}\rho_n - 1 > 0,$$

woraus folgte

$$\rho_n > \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}-1}{n+1}.$$

Man hat aber aus der Relation (12)

$$n\rho_n^{n+1} + (n+1)\rho_n^{n+1} < 1,$$

daher ist

$$\rho_n < \frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\frac{\sqrt{1+(n+1)^2}-1}{n+1} > \frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{n+1}}}, \quad \text{für } n \geqq 2,$$

was führt *ad absurdum*.

Dass $\rho_n$ gegen 1 konvergiert, kann folgendermassen bewiesen werden. Aus der Relation (12) hat man

$$\rho_n^n = \frac{1}{n\rho_n + n + 1},$$

daraus folgt

$$n \log \rho_n = -\log(n\rho_n + n + 1).$$

Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \log \rho_n = 0,$$

d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1.$$

Also ist der Hilfssatz bewiesen.

Hinsichtlich dieses Hilfssatzes kann man behaupten:

Satz 6. Es seien

$$1 + z + \cdots\cdots + z^n, \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

Abschnitte der Potenzreihe

$$1 + z + \cdots\cdots + z^n + \cdots\cdots,$$

dann sind diese sämtlichen Abschnitte schlicht im Kreise $|z| < \frac{1}{2}$. Diese Schranke kann durch keine grösseren Werte ersetzt werden, weil

$$1 + z + z^2$$

$\frac{1}{2}$ als die genaue Schranke für Schlichtheit hat.

Also aus der Sätze 5 und 6 erhalte ich schliesslich den Satz:

Unter die Potenzreihen, die im Einheitskreise regulär-schlicht und vom Typus A sind, gibt es eine Potenzreihe, deren sämtlichen Abschnitte im Kreise $|z| < \tau$ schlicht sind, wo

$$\frac{1}{3} < \tau < \frac{1}{2}$$

ist.

Zum Schlusse bemerke ich, dass ich dem Herrn Prof. Toshizô Matsumoto für seine Bemerkung und Anregung zu Dank verpflichtet bin.