数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 115-123

環積のGelfand pairと多成分zonal多項式

水川 裕司

岡山大学理学部(学振特別研究員PD)
e-mail: mzh@math.okayama-u.ac.jp

概要

ゲルファントペア(S_{2n}, H_n)の一般化となるような環積のゲルファントペアを考え，帯球関数を調べる．そしてその特性写像による像が多成分のzonal多項式になる事を見る．

1 有限群の帯球関数

ここでは有限群の帯球関数の理論をそのひな形となるような例を通して紹介する．
有限群のペア

$$(H_n, S_n)$$

を考えよう．ここでH_nは B型ワイル群であり，S_nは対称群である．H_nの元は

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n; \sigma)$$

という形をしており，ここで $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \sigma \in S_n$ である．H_nのn変数多項式環$P = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$上の作用を

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n; \sigma) f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\varepsilon_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)}, \varepsilon_{\sigma(2)} x_{\sigma(2)}, \cdots, \varepsilon_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)})$$

で定める．そしてPの部分空間$V(k) (0 \leq k \leq n)$を

$$V(k) = \bigoplus_{I \subset \{1,2,\cdots,n\}, |I|=k} \mathbb{C} x_I$$

と定義する，ここで$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ に対して$x_I = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$としている．事実として，$V(k)$は$H_n$の既約表現を与え，$k$が異なれば同値ではない事が知られている[4]. $V(k)$は基本対称式 $e_k(x_1, \cdots, x_n)$ を含んでいる．基本対称式はS_n-不変なので

$$\langle \mathrm{Ind}_{S_n}^{H_n}, V(k) \rangle_{H_n} \neq 0$$

である．また$\dim \mathrm{Ind}_{S_n}^{H_n} = 2^n, \dim V(k) = \binom{n}{k}$だから，二項定理より

$$\mathrm{Ind}_{S_n}^{H_n} 1 \sim \bigoplus_{i=0}^{n} V(k)$$

がわかる．この分解はH_nの表現として無重複である．これより$V(k)$の中のS_n不変な元は定数倍を除いてただ一つである．

Definition 1.1. (G, H)を（有限）群のペアとする．$\mathrm{Ind}_{S_n}^{H_n} 1$が$G$の表現として無重複な時，$(G, H)$をゲルファントペアという．

つまり，(H_n, S_n)はゲルファントペアである．ここで，$a, b \in \mathbb{C}$と$I, I' \subset \{1, 2, \cdots, n\}$として，$V(k)$上の内積を

$$[ax_I, bx_{I'}] = \frac{1}{\binom{n}{k}} a\bar{b}\delta_{I,I'}$$

で定義する．この内積はH_n-不変である（有限群の通常表現は必ずユニタリ化出来ることに注意しておく）．この内積を使って$V(k)$をH_nの座標環に埋め込もう．$C(H_n/S_n)$を各右側剰余類上定値なG上の関数とする，つまり，

$$C(H_n/S_n) := \{f : H_n \to \mathbb{C};\ f(xh) = f(x)\ \forall x \in H_n,\ \forall h \in S_n\}.$$

そして埋め込みの写像

$$\varphi_k : V(k) \longrightarrow C(H_n/S_n)$$

を$g, h \in S_n$ and $v \in V(k)$に対して

$$\varphi_k(v)(g) = [v, ge_k(x_1, \cdots, x_n)]$$

で定義する．いま，

$$\begin{aligned}
\varphi_k(g_1 v)(g_2) &= [g_1 v, g_2 e_k(x_1, \cdots, x_n)] \\
&= [v, g_1^{-1} g_2 e_k(x_1, \cdots, x_n)] \\
&= \varphi_k(v)(g_1^{-1} g_2) \\
&= (g_1 \varphi_k(v))(g_2)
\end{aligned}$$

かつ非退化性より $\varphi \neq 0$ なので，φ は単射なH_n-線形写像である．そして次を得る，

$$C(H_n/S_n) = \bigoplus_{i=0}^{k} \varphi_k(V(k)).$$

$\omega_k \in \varphi_k(V(k))$ を$g \in H_n$ に対して，$\omega_k(g) = [e_k(x_1, \cdots, x_n), ge_k(x_1, \cdots, x_n)]$で定義する．上での議論から，$\omega_k$ は$\varphi_k(V(k))$のユニークなS_n-不変元である．

Definition 1.2. (G,H)をゲルファントペア, Gの表現として

$$C(G/H)=\bigoplus_{i=0}^{s-1}V_i$$

と分解しているとき, 各既約成分中のH-不変な元で単位元で値1を取る関数ω_i $(1\leq i\leq s)$を(G,H) の帯球関数 とよぶ.

ここで帯球関数はその定義より両側S_n不変な元である. そしていま,

$$S_n\setminus H_n/S_n=\{(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-\ell},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{\ell};1)|0\leq\ell\leq n\}$$

なのに注意して帯球関数の両側剰余類上の値を求めてみよう. $g=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n;\sigma)$のとき,

$$\omega_k(g)=\frac{1}{\binom{n}{k}}e_k(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$$

であるから, $g=(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-\ell},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{\ell};1)$に対して

$$\omega_{k,\ell}=\omega_k(g)$$

と置く. そしてここでもう少し計算してやると([2]参照), 帯球関数はガウスの超幾何関数

$${}_2F_1(a,b,c|x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

を用いて次の定理のように書ける.

Theorem 1.3. *[2, 9]*

$$\omega_{k,\ell}={}_2F_1(-k,-\ell;-n|2).$$

ちなみに, この定理中の多項式の事をKrawtchouk多項式と呼ぶ. 帯球関数は$V(k)$の行列表現の成分なので次の直交関係を満たす

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}{}_2F_1(-k,-\ell;-n|2){}_2F_1(-k',-\ell;-n|2)=\binom{n}{k}^{-1}\delta_{k,k'}.$$

このようにして, 有限群のゲルファントペアから, 両側剰余類と誘導表現の分解の記述をする事で帯球関数の直交性が記述できる. 今見てきたように帯球関数はしばし

ば超幾何関数を用いて記述できる事が知られている[6, 1, 7]. この記事で扱うゲルファントペアに対しても実は超幾何関数との深い関係が得られるのだが, ここではそれは取り扱わない, ここでは帯球関数と対称関数の関係に焦点を当てて行きたい.

さて, 環積の定義をしておこう. Gを有限群としたとき, 対称群S_n は G^n 上に次のように作用する.

$$\sigma(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)}),\ (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n, \sigma \in S_n$$

環積 $G \wr S_n$ とはこの作用から得られる半直積群のことである[4].

つぎに, 対称群たちの包含関係をみてみよう.

$$\begin{array}{ccc} S_{2n} & \supset & H_n \\ \cup & & \cup \\ S_n \times S_n & \supset & S_n \end{array}$$

それぞれの群のS_{2n}への埋め込み方は：

$$H_n = \langle (2i-1, 2i), (2j-1, 2j+1)(2j, 2j+2); 1 \le i \le n, 1 \le j \le n-1 \rangle,$$

$$S_n \times S_n = \langle (2i-1, 2i+1), (2j, 2j+2); 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le n-1 \rangle$$

及び,

$$S_n = H_n \cap S_n \times S_n = \langle (2j-1, 2j+1)(2j, 2j+2); 1 \le j \le n-1 \rangle$$

である. ここで注目すべき点は, 上のどのペアもゲルファントペアである, ということである.

帯球関数はどうなっているかというと, 上で見た通り(H_n, S_n)からはKrawtchouk多項式である. また$(S_{2n}, S_n \times S_n)$からは再び選点系直交多項式のHahn多項式というものが出てくる[8]. そして, 一番下の$(S_n \times S_n, S_n)$は対称空間で言うところの群多様体のケースであり, その帯球関数は対称群の指標をその次数で割ったものである, それを$\chi^\lambda_\rho / d_\lambda$ (χ^λ_ρ は共役類$\rho \vdash n$の既約指標$\lambda \vdash n$ での値. d_λは表現の次元) の様に書くと良く知られているようにシューア関数は,

$$\frac{1}{d_\lambda} s_\lambda = \sum_{\rho \vdash n} z_\rho^{-1} \chi^\lambda_\rho / d_\lambda p_\rho$$

と書ける. そして, (S_{2n}, H_n)の帯球関数(nの分割でパラメトライズされる) を ω^λ_ρ と書いたとき,

$$z_\lambda = |H_n| \sum_{\rho \vdash n} z_{2\rho}^{-1} \omega^\chi_\rho p_\rho$$

を考えると，これはzonal多項式と呼ばれる$(U(2n), O(n))$の帯球関数である．シューア関数が $(U(n) \times U(n), U(n))$の帯球関数である事を考えると，この事実は納得が行くであろう．

環積の表現論は対称群の表現論の言わば多成分版であり，これに対応して環積に対するシューア関数も通常のシューア関数の積で定義することが出来る．従いここでの目的は次のように書ける．「(S_{2n}, H_n)の環積バージョンを考え，多成分の zonal多項式を捕まえる．」

そのために両側剰余類の記述，既約表現の記述をしよう．

2 (S_{2n}, H_n)の環積による一般化

導入でも書いたようにここでは(S_{2n}, H_n)の環積による一般化を考えるのであった．

さてS_{2n}のG^{2n}への順番の入れ換えによる作用を θと置いたとき，θのH_nへの制限は

$$\Delta G^n = \{(g_1, g_1, g_2, g_2, \cdots, g_n, g_n); g_i \in G\}$$

を不変にする，これをθ'とかき，

$$H(\Delta G)_n = \Delta G^n \rtimes_{\theta'} H_n$$

とおく．我々のターゲットは

$$(G \wr S_{2n}, H(\Delta G)_n)$$

である．

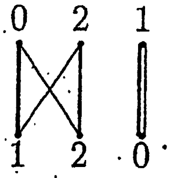
3 両側剰余類の記述

$G \wr S_{2n}$の元$x = (g_1, g_2, \cdots, g_{2n}; \sigma)$ に対して，G-colored graph $\Gamma_G(x) = \{V_G(x), E_G(x)\}$ を次のように定義する： $V_G(x) = \{g_1, g_2, \cdots, g_{2n}\}$ を頂点集合．$E_G(x)$ を g_{2i-1} と g_{2i} そして $g_{\sigma(2i-1)}$ と $g_{\sigma(2i)}$が結ばれている辺の集合とする．g_{2i-1} to g_{2i} を結ぶ辺を'青' そして $g_{\sigma(2i-1)}$と$g_{\sigma(2i)}$ を結ぶ辺を'赤'と呼ぼう．

Example 3.1. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$と$n = 6$として例を見てみよう．

$$x = (0, 1, 2, 2, 1, 0; (123)(56)).$$

とすると，

$\Gamma(x) =$ 

細線で赤，太線で青を表した．

こうして作ったグラフの各ループ(ここではこのグラフの連結成分の事をループと呼ぶことにする．本来はこれはサイクルと呼ぶのが正しい)に注目して次のような積を考える．いまループの一つ $L = (g_{i_1}$ -b- g_{i_2} -r- g_{i_3} -b- $\cdots$ -r- $g_{i_{2k-1}}$ -b- $g_{i_{2k}}$ -r- $g_{i_1})$, -b- が青，-r-で赤を表している，を考える．ここでL のループ積を

$$p(L) = \prod_{j=1}^{k} g_{i_{2j-1}}^{-1} g_{i_{2j}}$$

で定義する．上の例ではループ積は右側のループが1か2，左側のループも1か2である．ループ積の集合

$$\{p(L); L\text{は}\Gamma_G(x)\text{のループ}\}$$

を考え次の定義をする．

Definition 3.2. Gの共役類を$\{C_1, C_2, \cdots, C_c\}$ と置く．

$$R_G = \{C_i \cup C_i^{-1}\} = \{R_1, \cdots, R_{t_0+t_1}\},$$

ここで $C_i^{-1} = \{g^{-1}; g \in C_i\}$ とし，t_0 は共役類のうち $C_i = C_i^{-1}$ を満たすものの個数，t_1 は $C_i \neq C_i^{-1}$であるものの個数．さらに

$$m_k(R_i) = \sharp\{L; L \text{ は}\Gamma_G(x) \text{ の長さ}k\text{のループで } p(L) \in R_i\}.$$

と置く．$(t_0 + t_1)$個の分割の組

$$\underline{\rho}(x) = (\rho^i(x); 1 \leq i \leq t_0 + t_1)$$

ここで，$\rho^i(x) = (1^{m_1(R_i)} 2^{m_2(R_i)} \cdots n^{m_n(R_i)})$として，$\underline{\rho}(x)$ をxのループタイプと呼ぶ．

上の例だと，$R_{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ループタイプは$(\emptyset, (2, 1))$である．この下で次のことが言える．

Theorem 3.3. $G \wr S_n$の二つの元が，同一の両側剰余類に入ることの必要十分条件はループタイプが一致することである．さらに，任意の元とその逆元は同じ両側剰余類に属する．

この後半の主張から次が言える[5].

Theorem 3.4. $(G \wr S_{2n}, H(\Delta G)_n)$はゲルファントペア.

Proposition 3.5. xはループタイプが $\underline{\rho} = (\rho^i; 1 \leq i \leq t_0 + t_1)$ であるような元とする. ここで, $\rho^i = (1^{m_1(R_i)}, 2^{m_2(R_i)}, \cdots, n^{m_n(R_i)})$ このとき

$$|H(\Delta G)_n x H(\Delta G)_n| = \frac{|H_n|^2 |G|^{2n}}{\prod_{i=1}^{t_0+t_1} z_{2\rho(R_i)}} \times \frac{\prod_{i=1}^{t_0+t_1} |R_i|^{\ell(\rho(R_i))}}{|G|^{\ell(\rho)}}$$
$$= |H_n|^2 |G|^{2n} \prod_{i=1}^{t_0} \frac{1}{z_{2\rho(R_i)} \zeta_{C_i}^{\ell(\rho(R_i))}} \times \prod_{i=t_0+1}^{t_0+t_1} \frac{1}{z_{\rho(R_i)} \zeta_{C_i}^{\ell(\rho(R_i))}}.$$

4 誘導表現の既約分解

環積の表現であるが, 次のように構成する: $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \cdots, \lambda^c)$を分割の組で, $|\lambda^i| = n_i, \sum_{i=1}^c n_i = n$とする. また$\{V_i; 1 \leq i \leq c\}$を Gの既約表現とする.

$$V(\underline{\lambda}) = \bigotimes_{i=1}^{c} V_i^{\otimes n_i}$$

この上の$G \wr S_{2n}$の作用を

$$(g_1, \cdots, g_n; \sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = g_1 v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g_n v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

で定義する. さらに$\prod_{i=1}^c S_{n_i}$ の既約表現 $S(\underline{\lambda}) = \bigotimes_{i=1}^c S^{\lambda_i}$ をGの作用は自明なものを考えることで$G \wr \prod_{i=1}^c S_{n_i}$ の既約表現と思う. このとき,

$$W(\underline{\lambda}) = S(\underline{\lambda}) \otimes V(\underline{\lambda}) \uparrow_{G \wr \prod S_{n_i}}^{G \wr S_{2n}}$$

は$G \wr S_{2n}$の既約表現を与える, またこれは$\underline{\lambda}$ により一意的に定まり全ての既約表現はこの形で表される. そして今のケースでは次のように記述される.

Theorem 4.1. 誘導表現の既約分解は次のように記述される.

$$\mathrm{Ind}_{H(\Delta G)_n}^{G \wr S_{2n}} 1 = \bigoplus_{*} W(\underline{\lambda}),$$

ηをGの既約表現, η^*はηの半傾表現とすると,

$$* = \{\underline{\lambda} = (\underbrace{2\lambda_1, \cdots 2\lambda_{t_0}}_{\eta=\eta^* \text{に対応}}, \underbrace{\mu_1, \mu_1, \cdots, \mu_{t_1}, \mu_{t_1}}_{\eta \neq \eta^* \text{に対応}}) | \sum |\lambda^i| + \sum |\mu^i| = n\},$$

である.

5　多成分zonal多項式

Theorem 3.3とTheorem 4.1を元に帯球関数が決定する．定理中の$W(\underline{\lambda})$に属する帯球関数のループ積が

$$\underline{\rho} = (\rho^1, \rho^2, \cdots . \rho^{t_0+t_1})$$

であるような両側剰余類上での値を

$$\Omega^{\underline{\lambda}}_{\underline{\rho}}$$

とかく事にする．また，

$$Z^{-1}_{\underline{\rho}} = |H(\Delta G)_n x H(\Delta G)_n|/|G|^{2n} 2n!$$

そして

$$d(\underline{\lambda}) = \dim W(\underline{\lambda})$$

と書くと，直交関係

$$\sum_{\underline{\rho}} Z^{-1}_{\underline{\rho}} \Omega^{\underline{\lambda}}_{\underline{\rho}} \Omega^{\underline{\nu}}_{\underline{\rho}} = \delta_{\underline{\nu},\underline{\lambda}} d(\underline{\lambda})^{-1}$$

が得られる．そして，

$$\mathcal{Z}_{\underline{\lambda}} = \sum Z^{-1}_{\underline{\rho}} \Omega^{\underline{\lambda}}_{\underline{\rho}} P_{\underline{\rho}},$$

とおく，これを帯球関数の特性写像による像と呼ぶ．ここで$(x,y) = (x^{(1)}, \cdots, x^{(t_0)}, y^{(1)}, \cdots, y^{(t_1)})$なる変数の組．$P_{\underline{\rho}} = \prod_{i=1}^{t_0+t_1} p_{\rho^i}(x,y)$，としてこれが多成分のzonal多項式と呼ぶべきものになっている．

それを見るためにはまずは既約表現の内，他は空集合でどこか一ヶ所だけが横一本のヤング図形が出てくるようなものの特性写像による像を特定する．これはそのヤング図形が前半の指標が実数になる部分に登場するときは完全対称式において各冪和関数の部分を2のレングス乗したもの（[5]の７章でg_nと書かれているもの），後半の複素数になる部分に登場するときは完全対称式になる事がわかる．これらを用いて変換行列を見る事で次の定理が得られる．

Theorem 5.1.

$$\mathcal{Z}_{\underline{\lambda}} = \prod_{i=1}^{t_0} z_{\lambda_i}(x^{(i)}) \prod_{j=1}^{t_1} \frac{1}{d_{\mu^i}} s_{\mu^j}(y^{(j)}).$$

参考文献

[1] H. Akazawa and H. Mizukawa, *Orthogonal polynomials arising from the wreath products of dihedral group,* to appear in Journal of Combinatorial Theory series A.

[2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I. Association Schemes,* The Benjamin/Cummings Publishing Co. CA, 1984

[3] C. Dunkl, A Krawtchouk polynomial addition theorem and wreath products of symmetric groups, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), no. 4, 335-358.

[4] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 16, 1981.

[5] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd. ed.* , Oxford, 1995.

[6] H. Mizukawa, *Zonal spherical functions on the complex reflection groups and $(n+1, m+1)$-hypergeometric functions,* to appear in Adv. Math.

[7] H. Mizukawa and H. Tanaka, *$(n+1, m+1)$-hypergeometric functions associated to character algebras,* to appear Proc. A.M.S .

[8] D. Stanton, Three addition theorems for some q-Krawtchouk polynomials, Geom. Dedicata 10 (1981), no. 1-4, 403-425

[9] D. Vere-Jones, *Finite bivariate distributions and semigroups of non-negative matrices.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 22 1971 247-270.