Sur les Conditions Thermiques d'un Météorite s'approchant du Soleil d'après la Loi de la Gravitation

par

Toshima Araki et Kiyosi Yamamura

(Reçu le 30 janvier, 1932)

On ne doute pas à présent que la comète soit constituée des météorites enumérables. Par conséquent, pour étudier la physique de la comète on doit examiner d'abord celle de l'amas des météorites. Il nous semble ainsi intéressant d'étudier, par exemple, les conditions thermiques des météorites.

Dans ce mémoire nous avons calculé la température d'un météorite faisant un mouvement keplérien autour du soleil.

§ 1. Les équations du mouvement d'un météorite sous la gravitation solaire s'écrivent facilement, en employant les coordonnées polaires :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r^2} = 0$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{cons.},$$

où M est la masse du soleil de manière que la constante de la gravitation soit égale à l'unité.

Une intégrale des équations ci-dessus est donnée par

$$(1) \qquad \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2M}\sqrt{\Phi(r)}.$$

Ici $\Phi(r)$ est une fonction de r seulement dont la forme dépend du caractère du mouvement. En effet, pour l'orbite elliptique, elle est exprimée par

$$(\text{Cas } 1) \qquad \Phi(r) = \frac{p}{2}\left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^2\right\},$$

où r_0 et p désignent la distance de l'aphélie et le paramètre de l'orbite respectivement.

Pour l'orbite parabolique

(Cas 2) $$\Phi(r)=\frac{1}{r}\left(1-\frac{q}{r}\right),$$

q étant la distance de la périhélie.

Comme un cas spécial de celle-ci, si le météorite tombe en ligne droite au soleil de l'infinité avec sa vitesse nulle, on a

(Cas 3) $$\Phi(r)=\frac{1}{r}.$$

Dans les paragraphes suivants nous allons discuter le problème sur ces trois cas.

§ 2. Considérons à une distance r du soleil un météorite dont la forme soit une sphère de rayon R, pour simplifier le problème. Puisque le météorite n'est probablement pas un corps noir parfait, nous prenons une fraction propre ψ comme la proportion entre la chaleur absorbée et la chaleur totale acquise.

Soit T sa température absolue, ρ sa densité, C_1 sa chaleur spécifique et C_2 sa chaleur latente qui est nécessaire à faire devenir gazeuse une gramme de solide. Supposons de plus le météorite comme un conducteur parfait de la chaleur. Il ne faut pas dire que cette supposition est correcte pour le météorite de petite dimension, tandis que pour celui de la dimension grande elle n'est pas déjà exacte ; mais si le météorite a une rotation assez rapide nous pourrons la prendre comme une approximation première.

Or, écrivant l'élévation de la température et la diminution du rayon du météorite dans la durée dt avec dT et dR respectivement, nous avons immédiatement une équation suivante :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 J C_1 \rho dT - 4\pi R^2 \cdot J C_2 \rho dR = \left(\frac{\psi S}{4\pi r^2}\pi R^2 - 4\pi R^2 \psi \sigma T^4\right)dt,$$

où S est la radiation totale du soleil par seconde, J l'équivalent dynamique de la chaleur et σ la constante de Stefan.

En tenant compte de la relation (1), cette équation deviendra

(2) $$-\frac{dT}{dr}+3\left(\frac{C_2}{C_1}\right)\frac{1}{R}\frac{dR}{dr} = \frac{3\psi}{J\sqrt{2M}\rho C_1 R}\left(\frac{S}{16\pi r^2}-\sigma T^4\right)\frac{1}{\sqrt{\Phi(r)}}.$$

Cette équation générale ne peut pas être résolue sans quelques hypothèses, car nous ne connaissons pas quelle partie de la chaleur acquise soit dissipée pour élever la température du météorite et quelle partie pour évaporer sa matière.

Nous allons ainsi simplifier le problème en considérant comme suivant :

(a) Jusqu'à ce que le météorite obtienne une température critique, par exemple le point de fusion, l'évaporation de la matière serait négligeable devant l'élévation de la température ;

(b) Après avoir atteindre cette température critique, le météorite perdrait sa matière par l'évaporation en tenant sa température constante.

H. N. Russell[1] a discuté sur la diminution de la masse du météorite dans le cas 3 du paragraphe 1 dans l'occasion quand il considérait la matière de météorites au voisinage des étoiles.

§ 3. D'abord nous considérons le cas où l'évaporation de la matière est négligeable ; alors nous avons $\frac{dR}{dr}=0$ et ainsi il suit de l'équation (2),

$$\frac{dT}{dr}+\left\{\frac{A}{r^2}-\left(\frac{T}{B}\right)^4\right\}\frac{1}{\sqrt{\Phi(r)}}=0, \tag{3}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A&=\frac{3S}{16\pi J\sqrt{2M}}\,\frac{1}{R_1},\\ \frac{1}{B^4}&=\frac{3\sigma}{J\sqrt{2M}}\,\frac{1}{R_1}.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ici nous appellerons provisoirement $R_1=C_1\rho R/\psi$ le " rayon effectif ". C'est une constante dépendante de la dimension et des propriétés physiques du météorite. Par exemple pour le météorite de fer, R_1 est à peu près égal au rayon vrai R.

Prenons, comme l'unité de r et celle de R, le rayon du soleil et un centimètre respectivement. Alors on a

$$A=1.26\times 10^6\cdot R_1^{-1},\qquad B^4=2.16\times 10^8\cdot R_1. \tag{5}$$

(i) *Cas de l'orbite circulaire* :——C'est un cas spécial de Cas 1 du paragraphe 1. Ce cas a été discuté par J. H. Poynting[2] dans l'occasion quand il calculait la température des planètes et par H. N. Russell.[3]

---

1 H. N. Russell : Ap. J. **69** (1929) 49.
2 J. H. Poynting : Scientific Papers, Cambridge, 1920, pp. 304—331.
3 H. N. Russell : loc. cit.

Dans ce cas, comme nous avons $r=r_0=$constante et $\Phi(r)=0$, l'équation (3) s'écrira alors

$$\frac{A}{r_0^2}-\left(\frac{T}{B}\right)^4=0 \quad \text{ou bien} \quad T=\frac{A^{1/4}B}{\sqrt{r_0}}.$$

Les résultats des calculs sont donnés dans la première colonne de la Table I. Bien que la température à la surface du soleil soit 4059° après nos calculs, ce n'est pas autre chose qu'une conséquence de notre supposition que la radiation du soleil soit acquise par l'aire πR^2 du météorite, une supposition intenable au voisinage du soleil.

(ii) *Cas 3 du paragraphe 1*:——L'équation (3) prend une forme suivante,

$$r\sqrt{r}\frac{dT}{dr}+A-\left(\frac{T\sqrt{r}}{B}\right)^4=0. \tag{6}$$

On peut obtenir facilement la solution générale de cette équation différentielle, mais cela n'a pas de sens en pratique. Il suffit pour notre but d'obtenir une solution particulière qui satisfait à la condition initiale, c'est-à-dire $T=0$ pour $r=\infty$.

Une telle est donnée par la solution singulière

$$T=\frac{\mathfrak{T}}{\sqrt{r}} \tag{7}$$

où $\mathfrak{T}$ est une racine positive de l'équation du 4e degré suivante,

$$\mathfrak{T}^4+\frac{B^4}{2}\mathfrak{T}-AB^4=0. \tag{8}$$

En effet cette équation algébrique a une racine positive dans l'intervalle $0<\mathfrak{T}<2A$. En introduisant les valeurs A et B de (5), nous pouvons calculer $\mathfrak{T}$ pour quelques valeurs de R_1.

On voit les résultats dans la première ligne de la Table I.

Avec ces valeurs de $\mathfrak{T}$ l'équation (7) donne la température cherchée du météorite pour la distance donnée r du soleil, comme la Table I montre. Il va sans dire que pour $R_1=0$ les températures correspondent à celles dans le cas de l'orbite circulaire.

(iii) *Cas 2 de § 1 (L'orbite parabolique)*:——L'équation fondamentale est

$$r\sqrt{r}\sqrt{1-\frac{q}{r}}\,\frac{dT}{dr}+A-\left(\frac{T\sqrt{r}}{B}\right)^4=0. \tag{9}$$

Table I

$r/R_{\odot}$ \ R_1 (mètre)	0	1	5	10	20	30	50	100	500	1000
1	4059°	3890°	3190°	2270°	1250°	830°	500°	250°	53°	27°
2	2871	2751	2256	1605	884	587	354	177	37	19
4	2030	1945	1595	1135	625	415	250	125	27	14
9	1353	1297	1063	757	417	277	167	83	18	9
16	1015	973	798	568	313	208	125	63	13	7
25	812	778	638	454	250	166	100	50	11	5
36	677	648	532	378	208	138	83	42	9	4.5
49	580	556	456	324	179	119	71	36	8	4.0
64	508	486	399	284	156	104	62	31	7	3.4
81	451	432	354	252	139	92	56	28	6	3.0
100	406	389	319	227	125	83	50	25	5	2.7

Il est clair que la solution de cette équation différentielle est développable en série des puissances de $\frac{q}{r}$.

Puisque l'équation (9) ne diffère de (6) que le facteur $\sqrt{1-\frac{q}{r}}$, le premier terme de cette série est nécessairement égal à $\frac{\mathfrak{T}}{\sqrt{r}}$. En effet la forme de cette solution peut être écrite comme il suit,

$$T=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}_1\frac{q}{r}+\mathfrak{T}_2\left(\frac{q}{r}\right)^2+\ldots\ldots+\mathfrak{T}_n\left(\frac{q}{r}\right)^n+\ldots\ldots\right).$$

Les coefficients $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$,......sont déterminés par introduire cette expression dans l'équation (9). Nous les avons calculés pour $R_1=100$, 1000 et 10000 cm; ils se trouvent dans la Table II.

Table II

R_1	100 cm.	1000 cm.	10000 cm.
$\mathfrak{T}$	3890°	2270°	250°
$\mathfrak{T}_1$	78.3	330.5	41.7
$\mathfrak{T}_2$	20.6	137.7	18.8
$\mathfrak{T}_3$	10.2	78.1	11.1
$\mathfrak{T}_4$	6.4	51.0	7.5
$\mathfrak{T}_5$	4.5	36.9	5.5

Avec ces coefficients nous avons obtenu finalement les Tables IIIa, IIIb et IIIc, qui représentent les températures pour quelques valeurs de q.

Table III a ($R_1 = 100$ cm.)

q \ $r/R_{\odot}$	400	225	100	81	64	49	36	25	16	9	4	2	1
0	195°	259°	389°	432°	486°	556°	648°	778°	973°	1297°	1945°	2751°	3890°
0.5	195	259	389	432	486	556	648	778	974	1298	1950	2765	3936
1	195	259	389	432	486	556	648	779	974	1300	1956	2784	4010
2	195	259	389	432	486	556	649	779	975	1303	1967	2856	
9	195	259	390	433	487	558	651	784	985	1336			
16	195	259	390	434	489	560	654	788	1003				
25	196	261	394	438	494	566	663	802					

Table III b ($R_1 = 1000$ cm.)

q \ $r/R_{\odot}$	400	225	100	81	64	49	36	25	16	9	4	2	1
0	114	151	227	252	284	324	378	454	568	757	1135	1605	2270
0.5	114	151	227	252	284	324	379	455	571	763	1156	1669	2484
1	114	151	227	252	285	325	380	457	573	769	1180	1753	2904
2	114	151	228	253	286	326	381	459	579	784	1230	2053	
9	114	152	230	256	290	333	392	482	627	967			
16	114	152	232	259	294	339	406	509	726				
25	118	159	248	280	320	375	455	581					

Table III c ($R_1 = 10000$ cm.)

q \ $r/R_{\odot}$	400	225	100	81	64	49	36	25	16	9	4	2	1
0	13	17	25	28	31	36	42	50	63	83	125	177	250
0.5	13	17	25	28	31	36	42	50	63	84	128	184	278
1	13	17	25	28	31	36	42	50	64	85	131	196	335
2	13	17	25	28	31	36	42	51	64	87	138	237	
9	13	17	25	28	32	37	43	53	69	111			
16	13	17	26	29	3[illegible]	38	45	55	74				
25	13	18	28	32	36	42	52	67					

(iv) *Cas* 1 *du paragraphe* 1 (*L'orbite elliptique*) :——Il n'est pas facile d'obtenir la solution dans ce cas. Mais puisque nous avons déjà traité les orbites circulaire et parabolique, nous nous contenterons dans ce cas général de calculer la limite supérieure de la température du météorite ; cette limite T' est donnée immédiatement, en négligeant le terme $\left(\dfrac{T}{B}\right)^4$ dans l'équation (3) :

$$\frac{dT'}{dr}+\frac{A}{r^2\sqrt{\Phi(r)}}=0$$

où

$$\Phi(r)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}-\frac{p}{2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right).$$

L'intégrale de cette équation est

$$T'=\frac{A}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\arcsin\frac{1-\frac{p}{r}}{1-\frac{p}{r_0}}+\text{cons.}$$

§ 4. Dans les paragraphes précédants nous avons supposé que l'évaporation de la matière de la surface soit négligeable.

Nous traiterons ici du cas où l'élévation de la température du météorite est négligeable, la chaleur acquise étant toute dissipée pour l'évaporation. Ce sera peut-être correct après que le météorite a atteint une certaine température critique T_1 s'approchant du soleil. Alors $\frac{dT}{dr}=0$ et en posant $R_2=C_2\rho R/\psi$ l'équation fondamentale (2) deviendra

$$\frac{dR_2}{dr}=\left(\frac{\alpha}{r^2}-\beta\right)\frac{1}{\sqrt{\Phi(r)}} \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{S}{16\pi J\sqrt{2M}}=4.19\times10^5\\ \beta&=\frac{\sigma}{J\sqrt{2M}}T_1^4=1.54\times10^{-9}T_1^4\end{aligned} \tag{11}$$

dans le même système des unités que celui de (4).

La solution de l'équation différentielle (10) est très facilement obtenue, à savoir:

pour l'orbite elliptique (Cas 1)

$$\text{Cons.}-R_2=\alpha\sqrt{\frac{2}{p}}\arcsin\left(\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{r_0}}\right) \tag{12}$$

$$+\frac{\beta\sqrt{2pr_0^2}}{2r_0-p}\,r\sqrt{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_0}\right)^2-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)^2}$$

$$+\frac{\beta\sqrt{2}\,r_0^3}{(2r_0-p)^{2/3}}\arcsin\frac{\frac{r}{a}-1}{e};$$

pour l'orbite parabolique (Cas 2)

$$\text{Cons.}-R_2=\frac{2\alpha}{\sqrt{q}}\theta+\frac{2\beta q\sqrt{q}}{3}(3\cot\theta-\cot^3\theta) \tag{13}$$

où

$$\frac{q}{r}=\sin\theta;$$

et enfin pour Cas 3 du paragraphe 1

$$\text{Cons.}-R_2=\frac{2\alpha}{\sqrt{r}}+\frac{2}{3}\beta r\sqrt{r}. \tag{14}$$

§ 5. Quand on veut appliquer les résultats des paragraphes précédents, on ne peut pas éviter de rencontrer quelques difficultés pratiques.

En effet nous n'avons pas non seulement les connaissances suffisantes sur les matières qui constituent la comète, mais encore il y a plusieurs matières dont la chaleur de la fusion et celle de l'évaporation ne sont pas connues. Mais il nous semble possible que du moins nous considérions qualitativement par notre théorie les conditions thermiques de la comète considérée comme l'amas des météorites, en s'appuyant sur quelques supposition plausibles.

(1) D'abord nous allons constater les conclusions de nos discussions des paragraphes précédents sur un météorite qui tombe au soleil,—à part de la comète. Provisoirement supposons que le météorite soit de fer. Puisque la densité et la chaleur spécifique de fer sont entre 7.0—7.9 et 0.08—0.15 respectivement, $R_1=C_1\rho R/\psi$ donne approximativement le rayon vrai du météorite. Or le point de fusion et celui d'ébullition du fer sont à 1800° et 3272° abs. respectivement.

Nous pouvons ainsi constater par les résultats de § 3 (i) que les météorites de fer, quelque soient ses dimensions, ne peuvent pas survivre en écrivant une orbite circulaire à l'éloignement moins grand que 4-fois de rayon solaire : il faut qu'ils aient été tout évaporés depuis déjà bien longtemps.

Pour une distance donnée du soleil, le météorite acquiert la température la plus basse dans le Cas 3, où il tombe en ligne droite de l'infinité au soleil. Dans ce cas les résultats de § 3 (ii) nous permettent de constater que le météorite de fer avec un diamètre au-dessus de 5 mètres peut arriver à la surface du soleil sans évaporation. Avec un diamètre au-dessous de cette valeur il s'annulerait en chemin. Si l'on considère un peu plus généralement le cas de l'orbite parabolique, d'après § 3 (iii) on voit qu'il n'y a pas de météorite avec le rayon de 1 mètre quand il a une distance de la périhélie moins grande que $2R_{\odot}$.

Quant aux autres matières nous pouvons poursuivre les discussions similaires.

(2) Les comètes du groupe de Jupiter ont déjà tourné plusieurs fois autour du soleil jusqu'aujourd'hui depuis qu'elles avaient été capturées par Jupiter. Dans telles comètes les météorites avec la température de fusion très basse se seraient tout annulés en évaporation.

Notre théorie permet de donner quelques considérations numériques de tel phénomène. La diminution Δm de la masse m d'un météorite correspondante à celle du rayon effectif ΔR_2, est donnée par l'inégalité suivante :

$$\frac{\Delta R_2}{R_2} < \frac{\Delta m}{m} < \frac{3\Delta R_2}{R_2}.$$

Prenons comme un exemple la comète d'Encke ($q=0.3$, $e=0.9$).

Considérons les météorites de la matière ordinaire dont la température critique est entre 350° et 150° absolument mesurée. La distance r qu'ils font telle température est calculée par § 3 (iv) et ensuite ΔR_2 se trouve, d'après (12), de l'ordre de 10^4—10^5 cm. pendant une révolution. Puisque $R_2 = C_2\rho R/\psi$, la chaleur latente C_2 est de l'ordre de 10^2 et la densité ρ de l'ordre de 10 pour plusieurs matières, tous les météorites de telle matière s'annuleraient dans les révolutions pendant des milliers ou dizaines de milliers d'années. En conséquence les comètes considérées comme appartenantes aujourd'hui à Jupiter ne sont entièrement composées que des météorites tels que ceux de fer ou de pierre dont la température critique est trés haute.

(3) Si l'éclat absolu de la comète est déterminé seulement par les conditions géométriques, il doit être en proportion réciproque à la 2^e puissance de la distance du soleil. Mais en pratique son éclat est en proportion à r^{-s}, où $s>2$, au lieu de r^{-2}.

Par exemple l'éclat de la grande comète en 1910 janvier[1] était proportionnel à $r^{-4.6}$. La distance de la périhélie de cette comète est à peu près égale à $28\ R_{\odot}$. En appliquant les valeurs de T pour $q=25\ R_{\odot}$ et $R_1 = 10000$ cm. dans la Table III c, on trouve que T se varie

1. S. Orlow: A. N. **189**, pp. 1—6.

avec $r^{-0.58}$ approximativement. Si l'on peut supposer que l'éclat de la comète dépende indirectement, en quelque façon, de la température de ses météorites, celle-ci exerçant une influence sur la luminosité du gazeux qui remplit la comète et de plus que la loi de cette dépendence soit T^4, alors son éclat sera en proportion à $r^{-4.3}$. Cet accord avec des observations serait bien attribué à l'accident, car la cause de la luminescence cométaire n'est pas tellement simple.

Les matières constitutives de la comète sont diverses. Ainsi elles commenceraient à évaporer graduellement selon sa température critique, suivant que la comète s'approche du soleil, en devenant la queue et le coma. Par conséquent, quand nos connaissances sur les composants de la comète seront accrues par l'étude spéctroscopique etc., il y aura une possibilité d'appliquer notre théorie à l'étude de la physique cométaire.