

Théorie de l'Écoulement des Eaux Souterraines

par

Kiugoro Kitagawa

(Reçu le 18 mai, 1932)

Sommaire

Pour établir la théorie de l'écoulement des eaux souterraines, on suppose qu'il se compose des tubes capillaires dans le sous-sol, et obéit à la loi de Poiseuille. Calculant la probabilité pour qu'il suive chacun des circuits, on en déduit le circuit moyen parcouru $\bar{S} = x\sqrt{1 + \frac{2}{\pi}}$, x étant l'épaisseur du sous-sol borné de deux surfaces perpendiculaires à la direction du gradient maximum.

Supposant que le sous-sol se compose des sables du diamètre moyen d , on en discute la manière de les ranger sur la section, dont on distingue deux cas les plus probables, et la manière de les emballer dans l'espace, dont on distingue trois cas les plus probables. On en déduit, à la condition de tenir compte des probabilités pour que ces cas se passent, la formule la plus probable

$$V = 31.89 \frac{d^2 \eta}{\mu k} \frac{\text{mètre}}{\text{jour}}$$

appelant V la vitesse moyenne, d le diamètre moyen des sables en mm., η la pente, μ la viscosité, et k le vide. Elle est bornée supérieurement par celle de Slichter et inférieurement par celle de M. Hazen.

Si, pour même pente η , on augmente le diamètre des tubes capillaires, le débit s'accroît de plus en plus, et le terme en carré du débit prend de l'importance. Il en résulte qu'on a la formule de M. Forchheimer

$$\eta = aV + bV^2$$

au lieu des formules précédentes.

Ces formules théoriquement établies conformément aux expériences.

[I] Probabilités des circuits parcourus

Des eaux souterraines écoulent plus ou moins vite selon la nature du sol, sableux ou argileux, mais la vitesse est en général, très faible.¹

1. I. W. Kochne, Grundwasserkunde, 25 (1928).

Nous supposons que l'écoulement s'effectue au moyen des tubes capillaires dans le sous-sol et il obéit à la loi de Poiseuille

$$I = \frac{\pi p r^4}{8 l \mu} \dots \dots \dots (1)$$

appelant I le débit, p la différence des pressures de deux points de tube capillaire dont longueur est l , rayon r , et puis μ le coefficient de viscosité. Sous ces conditions, on peut supposer que les eaux courantes souterraines se composent de l'ensemble des débits des tubes capillaires souterraines.

Si l'on prend deux lignes isobares Oy , AB dans le sous-sol, c'est à dire les lieux des points souterraines portant la même pression hydrolique p_1 ou p_2 (fig. 1), elles sont sensiblement perpendiculaires à la même ligne Ox qui représente la direction du gradient maximum. Chaque courant capillaire des eaux parcourt au hasard les espaces inégaux OA , OB etc. Quelle est la probabilité pour qu'un courant d'eau appartienne au circuit $OB=S$? C'est notre problème de trouver la probabilité pour que l'eau parcoure le circuit S_1 pris au hasard. Si l'on pose $S_1 - S = \Delta S = y$, la probabilité pour que y soit compris entre y et $y + dy$ est donnée par la loi de Gauss

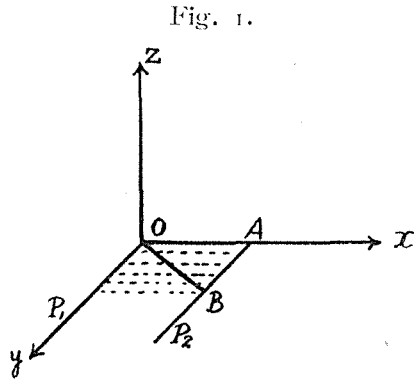


Fig. 1.

$$d\tau = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 y^2} dy \dots \dots \dots (2)$$

Prenant $\Delta S = 0$, il correspond à la probabilité maximum pour que se trouve le circuit géodésique S . Pour calculer le circuit moyen parcouru \bar{S} , il faut trouver l'écart moyen \bar{y} ou $\Delta \bar{S}$, on déduit de (2)

$$\bar{y} = \frac{2/h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y e^{-h^2 y^2} dy = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \dots \dots \dots (3)$$

Si chaque circuit est presque de la forme rectiligne¹, l'espace moyen parcouru se représente par l'équation

$$\bar{S} = \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 h^2 \pi}} \dots\dots\dots(4)$$

x étant l'épaisseur OA du mur souterrain (fig. 1).

On se propose de chercher la valeur approchée h dans l'équation (2), parce qu'il est évidemment une fonction de x . Le circuit capillaire des eaux souterraines, dont la forme est naturellement assez troublée et compliquée, et plus écartée d'augmentation de distance x , mais en effet l'écart y est assez petitement borné. Dans ce domaine où $\frac{y}{x}$ est très petit, on peut supposer que la probabilité de la route S est proportionnelle au gradient $\frac{\beta}{S}$, d'où l'on obtient

$$\frac{c\beta}{S} \div \frac{h}{1/\pi} e^{-h^2 y^2}$$

c étant une constante. Développant les deux membres de cette équation suivant les puissances de y , et en égalant les coefficients des deux premiers, et en négligeant les termes plus puissants que $\left(\frac{y}{x}\right)^4$, on aura

$$h = \frac{1}{x\sqrt{2}} \dots\dots\dots(5)$$

Remplaçant h par sa valeur dans (4), on a

$$\bar{S} = x \sqrt{1 + \frac{2}{\pi}} = 1.279x \dots\dots\dots(6)$$

Il en résulte que, pour appliquer la formule (1) au courant des eaux souterraines, il faut substituer l par \bar{S} , et le débit total I donné par l'unité de la section perpendiculaire à la direction Ox à l'origine O (fig. 1).

$$I = N \frac{\pi \beta \bar{r}^4}{8 \bar{S} \mu} \dots\dots\dots(7)$$

1. Même s'il n'en est pas de cas, la vitesse d'eau étant très faible, on peut supposer la route rectiligne, car l'eau continue à écouler au rond, non à l'angle aigu.

désignant par N le nombre des tubes capillaires dont rayon moyen imaginé équivaut à \bar{r} .

En posant

$$\frac{p}{x} = g\eta \dots\dots\dots(8)$$

g étant l'accélération de pesanteur, et éliminant \bar{S} et p dans l'équation (7), il s'écrit sous la forme suivante

$$I = B\eta \dots\dots\dots(9)$$

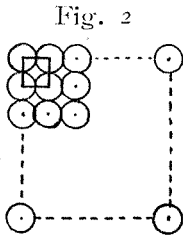
B désignant $N \frac{\pi g \bar{r}}{8 \times 1.279 \mu}$.

C'est ainsi que le débit est proportionnel à la pente η , c'est la règle de Darcy¹, vérifiée par les expériences, B étant une constante rapportée au sous-sol.

[II] Manière de ranger les sphères sur la section

Si le sol se compose des sables, des graviers dont rayon moyen est ρ , nous cherchons d'abord la section perpendiculaire au courant, avec les sphères du même rayon ρ au lieu de l'ensemble des sables, des graviers. On en distingue au point de vue de la manière de les ranger sur la surface deux cas les plus probables.

(A) Les sphères du même rayon ρ se tiennent côte à côte et figurent une forme carrée par chaque quatre (fig. 2).



On désigne par la porosité moyenne q_2 dans ce cas le rapport de la somme des aires de la fente moyenne à l'aire total sur la section, c'est à dire la somme des aires de la fente moyenne qui se trouve en l'unité de carré. Il vient

$$q_2 = N_2 \pi \bar{r}_2^2 \dots\dots\dots(10)$$

appelant N_2 le nombre des tubes capillaires dont la section équivaut au cercle effectif du rayon imaginé \bar{r}_2 , ajoutant à toutes les lettres le suffixe 2 dans ce cas, et l'on a

$$N_2 = \frac{1}{4\rho^2} \dots\dots\dots(11)$$

car il y a une tube en chaque carré de 2ρ (fig. 2).

1. MM. Flinn Weston and Bogert, Waterworks Handbook, 79 (1918)

Si l'on élimine \bar{r} , N entre les équations (7), (10) et (11), on obtient le débit I_2 dans ce cas

$$I_2 = \frac{4q_1^2 \rho^2}{8\pi\bar{S}\mu} \dots\dots\dots(12)$$

(B) Les sphères se tiennent côte à côte, et figurent la forme triangulaire par chaque trois. Le raisonnement précédent s'applique dans ce cas, changeant le suffixe, on a de même

$$q_1 = N_1 \pi \bar{r}_1^2 \dots\dots\dots(13)$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{3} \rho^2} \dots\dots\dots(14)$$

et

$$I_1 = \frac{\sqrt{3} q_1^2 \rho^2}{8\pi\bar{S}\mu} \dots\dots\dots(15)$$

La formule (12) ou (15) est valable selon que la surface contient les carrés ou les triangles des sphères.

[III] Manière d'emballer les sphères dans l'espace

On va chercher au point de vue de l'emballage des sphères dans l'espace limité, trois cas les plus probables.

(C) Supposons, d'abord, les emballer d'une manière assez compacte dans l'espace comme le figure ci-jointe (fig. 4). On en tire un groupe

Fig. 4

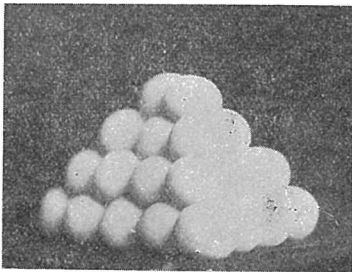
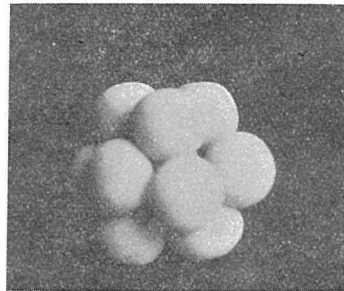


Fig. 5



composé de treize sphères, dont douze sphères se trouvent autour de la sphère envisagée, autrement dit, celle-ci est en contact avec les douze sphères dont on découvre six fois la forme carrée, et huit fois la forme triangulaire (figs. 5 et 6).

Les probabilités pour que le groupe ait, comme la surface dirigée

au courant, celle de la forme carrée ou de la forme triangulaire, se correspondent aux sommes des angles solides avec lesquelles fait face au centre de la sphère envisagée le carré ou le triangle. On peut les évaluer, calculant l'excès sphérique par la formule d'Huilier.

La somme des angles solides
 de huit triangles $\lambda_1 = 4.4104$,
 „ de six carrés $\lambda_2 = 8.1558$,
 d'où $\lambda_1 + \lambda_2 = 4\pi$.

En tenant compte des probabilités, réunissant (15) et (12), on en déduit le débit moyen dans ce cas,

$$I_{1,2} = \frac{\sqrt{3} q_1^2 \lambda_1 + 4q_2^2 \lambda_2}{8\pi \sqrt{\mu} . 4\pi} \rho^2 \dots\dots\dots(16)$$

Bien que l'eau court dans tous les sens, on suppose la divisée en deux directions dirigées aux deux surfaces voisines du groupe, et l'on aura $I_{1,2}$ comme le débit moyen dans ce cas.

On désigne par le vide k le rapport de la somme des volumes vides dans le sous-sol au volume total, c'est à dire la somme des volumes vides qui se trouvent en l'unité de cube, et le vide est calculé dans ce cas comme le problème de la trigonométrie sphérique.

$$k_{1,2} = 0.2556 \dots\dots\dots(17)$$

qui représente théoriquement la valeur minimum des vides. En effet, on a 0.26 comme la valeur minimum des vides par l'expérience sur sables assez comprimés¹.

On en voit qu'il y a une relation entre le vide k et la porosité moyenne q , parce que l'un est volumétrique et l'autre se rapporte à l'aire de la fente moyenne sur la section. Alors, k égale à q multiplié d'unité de longueur, c'est à dire ils ont la même valeur numérique. Il en résulte dans ce cas

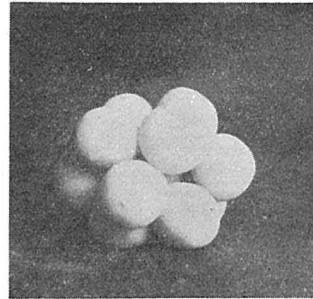
$$k_{1,2} = q_1 = q_2.$$

On aura donc

$$I_{1,2} = \frac{(1\sqrt{3} \lambda_1 + 4\lambda_2) k_{1,2}^2}{8\pi \sqrt{\mu} . 4\pi} \rho^2 = 0.006512 \frac{\rho^2}{x\mu} \dots\dots\dots(16bis)$$

1. MM. Flinn, loc. cit. 81.
 M. A. Schoklitsch, Der Wasserbau I, 170 (1930).

Fig. 6



Les raisonnements précédents s'appliquent à l'étude des cas suivants.

(D) Supposons, ensuite les emballer d'une manière un peu lâchement comme le figure ajouté (fig. 7).

La sphère envisagée est en contact avec huit sphères, dont six sphères se trouvent autour du cercle grand de la sphère envisagée, et deux sur les pôles de celle-ci (fig. 8).

Autrement dit, il fait un groupe de six sphères formant un prisme, dont on trouve deux fois la forme triangulaire et trois fois la forme carrée (fig. 9).

Fig. 7

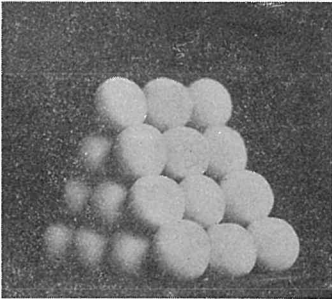


Fig. 8

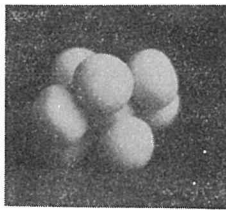
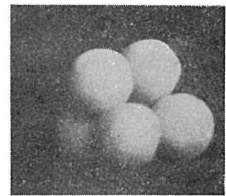


Fig. 9



Pour chercher les probabilités, on calcule, de la même manière précédente, les angles solides du carré ou du triangle envers le centre du prisme.

La somme des angles solides de deux triangles $\lambda_3 = 2.389$
 „ de trois carrés $\lambda_4 = 10.177$
 d'où $\lambda_3 + \lambda_4 = 4\pi$.

Réunissant (15) et (12) en vertu des probabilités, on en déduit le débit moyen dans ce cas

$$I_{3,4} = \frac{\sqrt{3} q_1^2 \lambda_3 + 4 q_2^2 \lambda_4}{8\pi \bar{S} \mu \cdot 4\pi} \rho^2 \dots\dots\dots(18)$$

et le vide calculé géométriquement

$$k_{3,4} = 0.3954 \dots\dots\dots(19)$$

Ayant $k_{3,4} = q_1 = q_2$ dans ce cas comme cité plus haut, il vient

$$I_{3,4} = \frac{(\sqrt{3} \lambda_3 + 4\lambda_4) k_{3,4}^2}{8\pi \bar{S} \mu \cdot 4\pi} \rho^2 = 0.01736 \frac{\rho^2}{x\mu} \dots\dots\dots(18bis)$$

(E) Supposons dernièrement les emballer assez lâchement comme le figure annexé (fig. 10).

La sphère envisagée est en contact avec six sphères dont quatre sphères se trouvent autour du cercle grand de la sphère envisagée et deux sur les pôles de celle-ci (fig. 11).

Autrement dit, il fait dans ce cas un groupe de huit sphères formant un cube, dont on trouve six fois le carré seulement (fig. 12).

Fig. 10

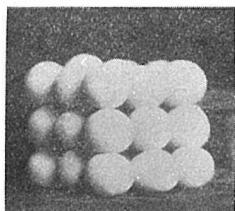


Fig. 11

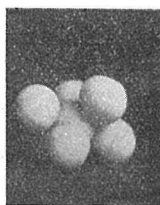
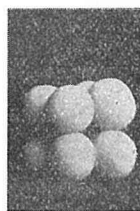


Fig. 12



On déduit de (12) la formule du débit dans ce cas

$$I_5 = \frac{4q_2^2 \rho^2}{8\pi \bar{S} \mu} \dots \dots \dots (20)$$

et le vide calculé

$$k_5 = 0.4764 \dots \dots \dots (21)$$

On obtient expérimentalement 0.47 comme la valeur maximum du vide soit en sable soit en argile¹.

Ayant $k_5 = q_2$ dans ce cas, il se conduit

$$I_5 = \frac{4k_5^2 \rho^2}{8\pi \bar{S} \mu} = 0.02824 \frac{\rho^2}{x\mu} \dots \dots \dots (20bis)$$

[IV] l'Énoncé de la formule générale

Il faut calculer les probabilités pour que ces trois cas (C), (D), (E) se passent naturellement. Il dépend des stabilités des trois cas, car le sol prendra petit à petit la forme fort comprimée, dont le potentiel de la force pesante vient à la valeur minimum à cause du choc de la pluie et du vent. La probabilité cherchée τ est donc une fonction du vide

$$\tau = f\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \dots \dots \dots (22)$$

1. MM. Flinn, loc. cit. 81.

où

$$\frac{\varepsilon}{k} < 1$$

ε étant une constante.

Développant (22) suivant les puissances de $\frac{\varepsilon}{k}$, et en prenant le premier terme, elle peut être inversement proportionnelle aux vides $k_{1,2}$, $k_{3,4}$ et k_5 , à savoir, le rapport des probabilités des trois cas égale à

$$\frac{1}{k_{1,2}} : \frac{1}{k_{3,4}} : \frac{1}{k_5} \dots\dots\dots(22\text{bis})$$

Appliquant cette relation des probabilités, en réunissant les trois cas, on arrive à la formule générale du débit moyen

$$I = \left(\frac{I_{1,2}}{k_{1,2}} + \frac{I_{3,4}}{k_{3,4}} + \frac{I_5}{k_5} \right) \left/ \left(\frac{1}{k_{1,2}} + \frac{1}{k_{3,4}} + \frac{1}{k_5} \right) \right. = 0.01506 \frac{\rho \rho^2}{x \mu} \dots\dots\dots(23)$$

C'est ce qu'on a théoriquement cherché, de même, le vide moyen

$$k = \left(\frac{k_{1,2}}{k_{1,2}} + \frac{k_{3,4}}{k_{3,4}} + \frac{k_5}{k_5} \right) \left/ \left(\frac{1}{k_{1,2}} + \frac{1}{k_{3,4}} + \frac{1}{k_5} \right) \right. = 0.3513 \dots\dots\dots(24)$$

il s'accorde avec la valeur expérimentale 0.35 du vide concernant les sables¹.

Substituant ρ par le diamètre d en mm. dans (23), et tenant compte de l'équation (8), il vient

$$I = 0.03691 \frac{d^2 \eta}{\mu} \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec.}} \dots\dots\dots(25)$$

Il s'ensuit que le débit I en centimètres cubes par seconde à travers un centimètre carré de la section normale au courant est proportionnel au carré de diamètre moyen d des sables dont la terre se compose, à la pente η , et inversement proportionnel à la viscosité μ qui est une fonction de la température².

Le coefficient numérique de (25) représente la valeur la plus probable qui dépend des circonstances naturelles. Quant au diamètre

1. MM. Flinn, loc. cit. 81.

2. MM. Landolt, Phys. chem. Tabellen, I, 137 (1923)

moyen d , on suppose pratiquement que si l'on partage au point de vue de la grandeur à l'aide du diamètre d un morceau du sol en deux parties, chacune de celles-ci a le même poids.

Supposé qu'une sable soit de la forme ellipsoïde, on désigne par d le diamètre de la sphère de même volume que celle-là.

Les formules (24) et (25) permettent d'en déduire la vitesse moyenne de l'écoulement d'eau dans le sous-sol, il vient

$$V_1 = 6.304 \frac{d^2 \eta}{\mu} \frac{\text{cm.}}{\text{min.}} \dots\dots\dots(26)$$

ou plutôt

$$V = 31.89 \frac{d^2 \eta}{\mu k} \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \dots\dots\dots(27)$$

[V] Vérification des formules et conclusion

Calculant les valeurs V_1 de la formule (26), sous les conditions $\eta = 0.1$, $\mu = 0.01301$ à la température 10°C , on les compare aux valeurs U_k des expériences de King¹ comme il suit :

No. des sables	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
d mm	2.54	1.808	1.451	1.217	1.095	0.915	0.799	0.715	0.600	0.520
$U_k \frac{\text{cm.}}{\text{min.}}$	158	81	56	42	37	26	17	11	8	6
V_1 "	313	154	102	72	58	40	31	25	17	13

Il s'ensuit que, dans ce cas, notre équation V_1 donne la valeur plus grande que U_k .

La formule empirique de M. Hazen donne la vitesse U_H de l'écoulement d'eau souterraine par l'équation suivante

$$U_H = c_1 d_1^2 \eta \frac{t + 10}{60} \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \dots\dots\dots(28)$$

appelant c_1 une constante associée au sous-sol, d_1 le diamètre effectif, t la température en degrés Fahrenheit, et désignant par $\frac{60}{t + 10}$ fonction de la viscosité.

En vertu des données expérimentales qui suivent, il se réduit premièrement

1. M. E. Prinz, Handbuch der Hydrologie, 173 (1919).

2. MM. Flinn, loc. cit. 739.

à $t=50^{\circ}\text{F}$		
U_H	d_1	η
0.02499	0.1	0.001
223.1	3	0.01

$$U_H = 2499 d_1^3 \eta \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \dots\dots\dots(29)$$

Dans le même cas, en tenant compte de $\mu=0.01301$, notre équation (27) se représente par l'équation

$$V_1 = 6977 d^2 \eta \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \dots\dots\dots(30)$$

Quand on compare (30) avec (29), notre équation donne la valeur aussi plus grande que celle de M. Hazen.

Or à la comparaison de l'équation (27) avec celle de Slichter

$$U_s = 88.31 \frac{d^2 \eta}{\mu k} \frac{\text{mètre}}{\text{jour}} \dots\dots\dots(31)$$

notre équation donne contrairement la valeur plus petite que celle-ci.

En conclusion, notre équation donne la valeur moyenne entre celles de King, Hazen et Slichter.

Si le débit s'accroît, il faut modifier le coefficient de la formule (30). C'est pourquoi qu'on la déduit de la formule (1), au lieu de laquelle, dans ce cas, il faut supposer la formule suivante¹:

$$p = \frac{8\mu l}{\pi r^4} I + \frac{1}{\pi^2 r^4} I^2 \dots\dots\dots(32)$$

le terme en I^2 étant négligeable quand le débit est très faible, mais il prend de l'importance quand le débit devient un peu grand. Si donc, le débit s'augmente de plus en plus, le terme en I^2 intervient et la loi de Poiseuille cesse d'être exacte.

Si l'on remarque la relation entre la différence de la pression et le débit dans (32), on peut établir l'expression suivante, semblable à l'équation (32)

$$\eta = aV + bV^2 \dots\dots\dots(33)$$

a et b étant deux constantes associées au sous-sol. On la nomme la formule de M. Forchheimer qu'on utilise dans ce cas, à la place de celle de Darcy. O. Reynolds a trouvé que, si la vitesse moyenne V est inférieure à $1900 \frac{\mu}{r}$, le régime de Poiseuille peut encore subsister,

1. M. M. Brillouin, Leçons sur la viscosité, I, 137 (1907).

si cette limite est dépassée, le régime de Poiseuille disparaît forcément, et l'on y a le régime hydrolique¹.

J'adresse l'expression de ma respectueuse reconnaissance à M. le professeur K. Tamaki qui a bien voulu m'aider de ses précieux conseils, et je remercie également M. le professeur T. Nomitsu qui m'a approuvé ce travail, en y apportant des corrections nécessaires avec une très grande bienveillance.

1. M. M. Brillouin, loc. cit. 218.
M. A. Schoklitsch, loc. cit.