数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 143-153

Geometric Crystals and Generalized Young Tableaux

中島　俊樹 (NAKASHIMA Toshiki)

上智大学理工学部数学科
(Sophia University)

1 Introduction

幾何クリスタルの理論は、reductive group に対しては [1] により基礎付けがなされ、[5] において、Kac-Moody group の場合に拡張された。この論説では、unipotent subgroup U^- 上に unipotent crystal の構造が入るための十分条件を与え、semi-simple の場合自然にその条件が満たされることを示した。しかし、affine の場合は不明である。特に、A_n type の場合に対応する geometric crystal の ultra-discretization は generalized Young talbeaux というもので記述できることを示した。

この論説での用語の定義、記号は [5], [6] に従うものとする。

2 Geometric Crystals and Unipotent Crystals

2.1 Geometric Crystals

G (resp. $\mathfrak{g}$) を symmetrizable GCM $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ に associate した Kac-Moody 群 (resp. 代数) とし、$G\supset B^{\pm}\supset U^{\pm}\supset T$ をそれぞれ Borel subgroup, unipotent subgroup, maximal torus とする。(Kac-Moody group については、[3],[7] を参照。) $\Delta:=\{\alpha\in\mathfrak{t}^*|\alpha\neq 0,\ \mathfrak{g}_\alpha\neq(0)\}$ を root system, $Q=\sum_i\mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とする。$Q_+=\sum_i\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$, $\Delta_+:=\Delta\cap Q_+$ とおく。Weyl 群 $W=\langle s_i|i\in I\rangle$ (s_i は simple relfection) は $W\cong N_G(T)/T$ となる。$i\in I$ に対して、homomorphism $\phi_i:SL_2(\mathbb{C})\to G$ があって

$$x_i(t):=\phi_i\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}=\exp te_i,\quad y_i(t):=\phi_i\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}=\exp tf_i\quad(t\in\mathbb{C}).$$

ここで、e_i, f_i は $\mathfrak{g}$ の生成元。

$w\in W$ に対して

$$R(w):=\{(i_1,i_2,\cdots,i_l)\in I^l|w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_l}\},$$

とおく。ここで、l は length of w.

$\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times,T)$) の元を T の *character* (resp. *co-character*) と呼ぶ。*simple co-root* $\alpha_i^\vee\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times,T)$ $(i\in I)$ を $\alpha_i^\vee(t):=T_i$ で定義すると、pairing $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=a_{ij}$ を得る。

X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\gamma:X\to T$, $e_i:\mathbb{C}^\times\times X\to X$ $(i\in I)$;

$$\begin{array}{rccc}e_i^c&:\mathbb{C}^\times\times X&\longrightarrow&X\\&(c,x)&\mapsto&e_i^c(x),\end{array}$$

を rational morphisms とする。word $\mathbf{i}=(i_1,i_2,\cdots,i_l)\in R(w)$ $(w\in W)$ に対して $\alpha^{(l)}:=\alpha_{i_l}$, $\alpha^{(l-1)}:=s_{i_l}(\alpha_{i_{l-1}}),\cdots,\alpha^{(1)}:=s_{i_l}\cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})$ とおく。ここで、word $\mathbf{i}=(i_1,i_2,\cdots,i_l)\in R(w)$ に対

して rational morphism $e_{\mathbf{i}} : T \times X \to X$ を、次で定義する。

$$(t, x) \mapsto e_{\mathbf{i}}^{t}(x) := e_{i_1}^{\alpha^{(1)}(t)} e_{i_2}^{\alpha^{(2)}(t)} \cdots e_{i_l}^{\alpha^{(l)}(t)}(x).$$

Definition 2.1. (i) 上のような3つ組 $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ が *geometric crystal* とは $e^1(x) = x$ かつ

$$\gamma(e_i^c(x)) = \alpha_i^\vee(c)\gamma(x), \tag{2.1}$$

かつ, 任意の $w \in W$, $\mathbf{i}$ と $\mathbf{i}' \in R(w)$ に対して

$$e_{\mathbf{i}} = e_{\mathbf{i}'}. \tag{2.2}$$

が成立すること。

(ii) $(X, \gamma_X, \{e_i^X\}_{i \in I})$, $(Y, \gamma_Y, \{e_i^Y\}_{i \in I})$ を geometric crystal とする。rational morphism $f : X \to Y$ が *moprhism of geometric crystals* とは f が次をみたすこと：

$$f \circ e_i^X = e_i^Y \circ f, \quad \gamma_X = \gamma_Y \circ f.$$

特に、 morphism f が ind-vareities の birational isomorphism であるとき f は *isomorphism of geometric crystals* という。

次の補題が成り立つ：

Lemma 2.2. (2.2) は次の関係と同値

$$\begin{array}{ll}
e_i^{c_1} e_j^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = 0, \\
e_i^{c_1} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\
e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -2,\ \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\
e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1^3 c_2} e_j^{c_1^3 c_2^2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^3 c_2^2} e_i^{c_1^3 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -3,\ \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1,
\end{array}$$

Remark. $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle \geq 4$ のとき e_i と e_j の間には関係なし。

2.2 Unipotent Crystals

以下 U^+ を U と書く。次に Kac-Moody groups に対して unipotent crystals (see [1]) を定義する。

Definition 2.3. X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\alpha : U \times X \to X$ を $\{e\} \times X$ 上で定義される U-action とする。このとき、pair $\mathbf{X} = (X, \alpha)$ が *U-variety* とは、 U-varieties $\mathbf{X} = (X, \alpha_X)$ と $\mathbf{Y} = (Y, \alpha_Y)$ に対して rational morphism $f : X \to Y$ が *U-morphism* とは U-action と可換となること。

ここで、$B^- = U^- T$ に U-variety structure を入れる。B^- は G の ind-subgroup であり、また G における multiplication map は open embedding; $B^- \times U \hookrightarrow G$ を induce するので birational isomorphism であり、その inverse birational isomorphism を

$$g : G \longrightarrow B^- \times U.$$

とする。ここで、rational morphisms $\pi^- : G \to B^-$ と $\pi : G \to U$ を $\pi^- := \mathrm{proj}_{B^-} \circ g$ と $\pi := \mathrm{proj}_U \circ g$ で定義し B^- への rational U-action α_{B^-} を

$$\alpha_{B^-} := \pi^- \circ m : U \times B^- \longrightarrow B^-,$$

と定義すると (m multiplication map in G), U-variety $\mathbf{B}^- = (B^-, \alpha_{B^-})$ を得る。

Definition 2.4. (i) $\mathbf{X} = (X, \alpha)$ を U-variety, $f : X \to \mathbf{B}^-$ を U-morphism とする。このとき、pair $(\mathbf{X}, f)$ を *unipotent G-crystal* と呼ぶ。

(ii) $(\mathbf{X}, f_X)$ 及び $(\mathbf{Y}, f_Y)$ を unipotent crystals とする。U-morphism $g : X \to Y$ が *morphism of unipotent crystals* とは $f_X = f_Y \circ g$ となることであり、特に g が ind-variety の birational isomorphism であるとき *isomorphism of unipotent crystals* という。

unipotent crystal の大きな特徴は crystal base と関係の深い積構造が入ることであるがここでは省略する。文献は [1],[5] を参照。

ここまで定義した unipotent crystal と geometric crystal には以下のような関係がある。

$i \in I$ に対して $U_i^{\pm} := U^{\pm} \cap \bar{s}_i U^{\mp} \bar{s}_i^{-1}$, $U_{\pm}^{i} := U^{\pm} \cap \bar{s}_i U^{\pm} \bar{s}_i^{-1}$ とおく。実は $U_i^{\pm} = U_{\pm\alpha_i}$. 半直積

$$U^- = U_{-\alpha_i} \cdot U_-^i,$$

より canonical projection $\xi_i : U^- \to U_{-\alpha_i}$ を得る。これを用いて U^- 上の関数

$$\chi_i := y_i^{-1} \circ \xi_i : U^- \longrightarrow U_{-\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

と定義し、さらに $\chi_i(u \cdot t) := \chi_i(u)$ ($u \in U^-$, $t \in T$) により B^- 上の関数に延長する。unipotent G-crystal $(\mathbf{X}, f_X)$ に対して関数 $\varphi_i := \varphi_i^X : X \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi_i := \chi_i \circ f_X,$$

で、また ratinal morphism $\gamma_X : X \to T$ を

$$\gamma_X := \mathrm{proj}_T \circ f_X : X \to B^- \to T, \tag{2.3}$$

で定義する (proj_T は canonical projection). 今、関数 φ_i は X 上で恒等的に 0 でないとする。このとき、morphism $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \to X$ を

$$e_i^c(x) := x_i\left(\frac{c-1}{\varphi_i(x)}\right)(x). \tag{2.4}$$

とすると、次を得る：

Theorem 2.5 ([1]). $(\mathbf{X}, f_X)$ を *unipotent G-crystal* とする。任意の $i \in I$ に対してて 関数 φ_i は X 上で恒等的に *0* でないとする。このとき、*rational morphisms* $\gamma_X : X \to T$ と $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \to X$ を上のように定義すると $(X, \gamma_X, \{e_i\}_{i \in I})$ は *geometric G-crystal* の構造を持つ。

2.3 Crystals

"Crystal" とは、crystal bases の持つ組合せ的な性質を抽象化したもの。

Definition 2.6. *Crystal B* とは次の写像を備えた集合:

$$\begin{aligned}
&wt : B \longrightarrow P,\\
&\varepsilon_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\} \quad \text{for} \quad i \in I,\\
&\tilde{e}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}, \quad \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\} \quad \text{for} \quad i \in I,\\
&\tilde{e}_i(0) = \tilde{f}_i(0) = 0.
\end{aligned}$$

これらの maps は任意の $b, b_1, b_2 \in B$ に対して次を満たす：

$$\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, wt(b)\rangle, \tag{2.5}$$

$$wt(\tilde{e}_i b) = wt(b) + \alpha_i \text{ if } \tilde{e}_i b \in B, \tag{2.6}$$

$$wt(\tilde{f}_i b) = wt(b) - \alpha_i \text{ if } \tilde{f}_i b \in B, \tag{2.7}$$

$$\tilde{e}_i b_2 = b_1 \Longleftrightarrow \tilde{f}_i b_1 = b_2 \ (b_1, b_2 \in B), \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_i(b) = -\infty \Longrightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0. \tag{2.9}$$

ここで $\tilde{e}_i$ および $\tilde{f}_i$ は *Kashiwara operators* と呼ばれる。(L, B) が crystal base ならば、B は crystal.

2.4 Positive structure and Ultra-discretizations/Tropicalizations

"Positive structure" について思い出す ([1],[4]).

$T = (\mathbb{C}^\times)^l$ を algebraic torus, $X^*(T) \cong \mathbb{Z}^l$ (resp. $X_*(T) \cong \mathbb{Z}^l$) を T の lattice of characters (resp. co-characters) とする。$R := \mathbb{C}(c)$ とし map v を次で定義する：

$$\begin{array}{rcll} v: & R \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & f(c) & \mapsto & \deg(f(c)). \end{array}$$

ここで $f_1, f_2 \in R \setminus \{0\}$ に対して次が成立：

$$v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2), \quad v\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = v(f_1) - v(f_2) \tag{2.10}$$

$f = (f_1, \cdots, f_n) : T \to T'$ を rational morphism ($T = (\mathbb{C}^\times)^m$, $T' = (\mathbb{C}^\times)^n$) とし map $\widehat{f} : X_*(T) \to X_*(T')$ を次で定義：

$$(\widehat{f}(\xi))(c) := (c^{v(f_1(\xi(c)))}, \cdots, c^{v(f_n(\xi(c)))}),$$

ここで $\xi(c) := (c^{l_1}, \cdots, c^{l_m}) \in X_*(T)$ は T の co-character. v は (2.10) をみたすので, map $\widehat{f}$ は additive group homomorphism.

Rational function $f(c) \in \mathbb{C}(c)$ $(f \neq 0)$ が *positive* とは f が正係数多項式の商で表示されること。
Remark. $f(c) \in \mathbb{C}(c)$ が positive $\Leftrightarrow$ $f(a) > 0$ $(\forall a > 0)$ (by M.Kashiwara).

f_1, $f_2 \in \mathbb{C}(c)(\subset R)$ が positive $\Rightarrow$ (2.10) と次が成り立つ：

$$v(f_1 + f_2) = \max(v(f_1), v(f_2)). \tag{2.11}$$

Definition 2.7 ([1]). 2つの algebraic tori T, T' 間の rational morphism. $f = (f_1, \cdots, f_n) : T \to T'$ が *positive* とは, 次の2つの条件がみたされること：

(i) 任意の co-character $\xi : \mathbb{C}^\times \to T$ に対して, $\mathrm{Im}(\xi) \subset \mathrm{dom}(f)$.

(ii) 任意の co-character $\xi : \mathbb{C}^\times \to T$ に対して, 任意の $f_i(\xi(c))$ $(i \in I)$ は positive rational function.

$\mathrm{Mor}^+(T, T')$ を T から T' への positive rational morphism の集合とする：

Lemma 2.8 ([1]). 任意の *positive rational morphisms* $f \in \mathrm{Mor}^+(T_1, T_2)$, $g \in \mathrm{Mor}^+(T_2, T_3)$ に対してその合成 $g \circ f$ が $\mathrm{Mor}^+(T_1, T_3)$ に入る.

Lemma 2.8 により, object が algebraic tori で arrow が positive rational morphism である category $\mathcal{T}_+$ を定義できる：

Lemma 2.9 ([1]). 任意の *algebraic tori* T_1, T_2, T_3, と *positive rational morphisms* $f \in \mathrm{Mor}^+(T_1, T_2)$, $g \in \mathrm{Mor}^+(T_2, T_3)$ に対して、$\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

この補題により, functor $\mathcal{UD}$ を得る：

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{UD}: & \mathcal{T}_+ & \longrightarrow & \mathfrak{Set} \\ & T & \mapsto & X_*(T) \\ & (f : T \to T') & \mapsto & (\widehat{f} : X_*(T) \to X_*(T'))) \end{array}$$

Definition 2.10 ([1]). $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ を geometric crystal, T' を algebraic torus とする。birational isomorphism $\theta : T' \to X$ が χ 上の *positive structure* とは、

(i) rational morphism $\gamma \circ \theta : T' \to T$ が positive.

(ii) 任意の $i \in I$ に対して $e_{i,\theta}(c, t) := \theta^{-1} \circ e_i^c \circ \theta(t)$ と rational morphism $e_{i,\theta} : \mathbb{C}^\times \times T' \to T'$ を定義すると positive.

θ が positive strucutre のとき functor $\mathcal{UD}$ を positive rational morphisms $e_{i,\theta} : \mathbb{C}^\times \times T' \to T'$ と $\gamma \circ \theta : T' \to T$ に apply すると次を得る：

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i &:= \mathcal{UD}(e_{i,\theta}) : \mathbb{Z} \times X_*(T) \to X_*(T) \\ \tilde{\gamma} &:= \mathcal{UD}(\gamma \circ \theta) : X_*(T') \to X_*(T). \end{aligned}$$

Theorem 2.11. *Geometric crystal* $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ とその *positive structure* $\theta : T' \to X$ に対して得られる $\mathcal{UD}_{\theta, T'}(\chi) = (X_*(T'), \tilde{\gamma}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in I})$ は *free W-crystal (see [1, 2.2])*.

Functor $\mathcal{UD}$ を *"ultra-discretization"* と呼ぶ。これは [1] において "tropicalization" と呼んでいたものである。ここでは B を crystal とするとき、$\mathcal{UD}(T) \cong B$ なる T in $\mathcal{T}_+$ が存在するとき, T を B の *tropicalization* と呼ぶ。

3 Geometric crystals on unipotent groups

semisimple algebraic group G の unipotent subgroup U^- 上に geometric/unipotent crystal の構造を入れる。

3.1 Unipotent/Geometric crystal structure on U^-

Borel subgroup B^- と同様にして unipotent subgroup U^- も G の multiplication map m の inverse birational isomorphism $h : G \to U^- \times B$ から induce される U-variety の構造をもつ。それを $\mathbf{U}^- = (U^-, \alpha_{U^-})$ とかくことにしよう。ここで、$\pi^{--} := \mathrm{proj}_{U^-} \circ h$ で U^- 上の U-action α_{U^-} を

$$\alpha_{U^-} := \pi^{--} \circ m : U \times U^- \longrightarrow U^-,$$

で定義する。

U^- 上に unipotent crystal structure をいれるため U-morphism $F : U^- \to B^-$ を構成する。$h : G \to U^- \times B$ から induce される projection $\pi^0 : G \to T$ とすると、

$$\pi^-(x) = \pi^{--}(x)\pi^0(x) \quad (x \in G). \tag{3.1}$$

次が U-morphism F が存在するための十分条件:

Lemma 3.1. $\mathcal{T}: U^- \to T$ を *rational morphism* で次を満たすとする：

$$\mathcal{T}(\pi^{--}(xu)) = \pi^0(xu)\mathcal{T}(u), \quad \textit{for } x \in U \textit{ and } u \in U^-. \tag{3.2}$$

このとき *morphism* $F: U^- \to B^-$ を次で定義すると

$$\begin{array}{cccc} F: & U^- & \longrightarrow & B^- \\ & u & \mapsto & u\mathcal{T}(u), \end{array} \tag{3.3}$$

F は *U-morphism* $U^- \to B^-$ となる。

Semisimple な G には 上のような rational morphism $\mathcal{T}$ が存在することを見よう。

$\Lambda_i \in P_+$ $(i = 1, \cdots, n)$ を fundamental weight, $L(\Lambda_i)$ を Λ_i を highest weight にもつ irreducible highest weight $\mathfrak{g}$-module ($\mathfrak{g}$ は G の Lie algebra), u_{Λ_i} (resp. v_{Λ_i}) を highest (resp. lowest) weight vector とする。$L^*(\Lambda_i)$ を $L(\Lambda_i)$ の contragradient module, $v^*_{\Lambda_i} \in L^*(\Lambda_i)$ を次できまる元とする：

$$\langle u, v^*_{\Lambda_i}\rangle = \begin{cases} c & \text{if } u = cv_{\Lambda_i}, \\ 0 & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

ここで関数 $f_i: U^- \to \mathbb{C}$ $(i \in I)$ を次で定義する：

$$f_i(g) = \langle g \cdot u_{\Lambda_i}, v^*_{\Lambda_i}\rangle. \tag{3.4}$$

Morphism $\mathcal{T}: U^- \to T$ を次で定義する：

$$\mathcal{T}(u) := \prod_{i \in I} \alpha_i^\vee(f_i(u)^{-1}). \tag{3.5}$$

これを用いて morphism $F: U^- \to B^-$ を次のようにおく：

$$F(u) := u \cdot \prod_{i \in I} \alpha_i^\vee(f_i(u)^{-1}). \tag{3.6}$$

Lemma 3.2. *Morphism* $F: U^- \to B^-$ は *U-morphism.*

よって次の結果を得る：

Corollary 3.3. G を *semi-simple* とすると, (U^-, F) は *unipotent crystal.*

関数 $\varphi_i: U^- \to \mathbb{C}$ は恒等的に 0 でないので、Theorem 2.5 で見たように U^- 上の unipotent crystal から geometric crystal を導出できる。そこで morphisms $e_i: \mathbb{C}^\times \times U^- \to U^-$ と $\gamma_{U^-}: U^- \to T$ を次で定義する：

$$e_i(c, u) = e_i^c(u) := x_i\left(\frac{c-1}{\varphi_i(u)}\right)(u), \qquad \gamma_{U^-}(u) := \mathcal{T}(u), \qquad (u \in U^- \text{ and } c \in \mathbb{C}^\times), \tag{3.7}$$

Theorem 3.4. G が *semi-simple* ならば、$(U^-, \gamma_{U^-}, \{e_i\}_{i \in I})$ は *geometric crystal.*

4 $SL_{n+1}(\mathbb{C})$-case

前節の結果を $SL_{n+1}(\mathbb{C})$-case に適用してみる。

Unipotent subgroup U^- は下三角行列で diagonal part が identity matrix となっているもの全体と同一視する。

まず、 morphism $\mathcal{T}: \mathcal{U}^- \to \mathcal{T}$ がどう記述されるか見てみよう。$u = (a_{ij})_{1\le i,j\le n+1} \in U^-$ に対して $u^{(i)}$ $(i \in I := \{1,\cdots,n\})$ を次のような submatrix とする：

$$u^{(i)} := (a_{i,j})_{n-i+2\le i\le n+1, 1\le j\le i},$$

つまり

$$u = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & \\ \underbrace{\boxed{u^{(i)}}}_{i} & & & 1 \end{pmatrix} \in U^-$$

そして $m_i(u) := \det(u^{(i)})$ とおく。すると、適当な normalization のもと次が成り立つ。

Lemma 4.1. *$f_i \equiv m_i$ on U^- for all $i = 1,\cdots,n$.*

e_i^c の U^- への作用は次で与えられる：

$$e_i^c(u) = x_i\left(\frac{\varphi_i(u)}{c-1}\right)\cdot u \cdot x_i\left(\frac{1-c}{c\varphi_i(u)}\right)\cdot \alpha_i^\vee(c)^{-1}.$$

ここで、U^- の open subset B^u 上への e_i^α の作用を見る:

$$B^u := \left\{ Y(a) = \begin{array}{l} y_n(a_{1,n})y_{n-1}(a_{1,n-1})\cdots y_1(a_{1,1})\times \\ \times y_n(a_{2,n})\cdots\cdots y_2(a_{2,2})\times \\ \cdots\cdots\cdots \\ \times y_n(a_{n,n}) \end{array} : a_{i,j} \in \mathbb{C}^\times \right\} \subset U^-. \tag{4.1}$$

次のような同型が存在する：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} & \xrightarrow{\sim} & B^u, \\ a = (a_{i,j}) & \mapsto & Y(a). \end{array}$$

これは、次の birational isomorphism $\theta : (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} \to B^u \hookrightarrow U^-$ を induce する。また、次を得る：

Lemma 4.2. $\varphi_i(Y(a)) = \sum_{k=1}^i a_{k,i}, \quad f_i(Y(a)) = \prod_{k=1}^i \prod_{j=k}^{n-i+k} a_{k,j}.$

Rational action $e_i^\alpha : B^u \to B^u$ は次のように具体的に記述される：

Proposition 4.3. $e_i^\alpha Y((a_{k,j})_{1\le k\le j\le n}) = Y((a'_{k,j})_{1\le k\le j\le n}),$

$$a'_{k,j} := \begin{cases} C_k^{(i)} a_{k,i-1} & \text{if } j = i-1, \\ \dfrac{a_{k,i}}{C_{k-1}^{(i)} C_k^{(i)}} & \text{if } j = i, \\ C_{k-1}^{(i)} a_{k,i+1} & \text{if } j = i+1, \\ a_{k,j} & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{4.2}$$

ここで

$$C_k^{(i)} := \frac{\alpha(a_{1,i}+\cdots+a_{k,i}) + a_{k+1,i}+\cdots+a_{i,i}}{a_{1,i}+\cdots+a_{i,i}} \quad (1\le k\le i\le n).$$

ここで、次のような birational isomorphism を考える：

$$\begin{array}{rcl}\xi:(\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} & \longrightarrow & (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}},\\ (a_{i,j})_{1\le i\le j\le n} & \mapsto & (A_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\end{array}$$

ここで、

$$A_{i,j}:=\frac{a_{i,j}a_{i-1,j-1}\cdots a_{1,j-i+1}}{a_{i-1,j}a_{i-2,j-1}\cdots a_{1,j-i+2}}\quad (1\le i\le j\le n).$$

Inverse morphism は次：

$$a_{i,j}:=\frac{A_{i,j}A_{i-1,j}\cdots A_{1,j}}{A_{i-1,j-1}A_{i-2,j-1}\cdots A_{1,j-1}}\quad (1\le i\le j\le n).$$

すると次を得る：

$$\begin{array}{rcl}\xi\circ e_i^\alpha\circ\xi^{-1}:(\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} & \longrightarrow & (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}},\\ (A_{k,j})_{1\le k\le j\le n} & \mapsto & (A'_{k,j})_{1\le k\le j\le n},\end{array}$$

ここで

$$A'_{k,j}=\begin{cases}A_{k,j} & \text{if } j\ne i,i-1\\ \alpha_k^{(i)}\cdot A_{k,i-1} & \text{if } j=i-1\\ {\alpha_k^{(i)}}^{-1}\cdot A_{k,i} & \text{if } j=i\end{cases}$$

$$\alpha_k^{(i)}=\frac{\alpha\displaystyle\sum_{1\le j\le k}\frac{\prod_{l=1}^{j}A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1}A_{l,i-1}}+\sum_{k<j\le i}\frac{\prod_{l=1}^{j}A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1}A_{l,i-1}}}{\alpha\displaystyle\sum_{1\le j\le k-1}\frac{\prod_{l=1}^{j}A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1}A_{l,i-1}}+\sum_{j=k}^{i}\frac{\prod_{l=1}^{j}A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1}A_{l,i-1}}}. \tag{4.3}$$

ここで, $\hat{\theta}:=\theta\circ\xi^{-1}:(\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}}\xrightarrow{\xi^{-1}}(\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}}\xrightarrow{\theta}U^-$ とおくと

Theorem 4.4. *Morphism $\hat{\theta}$ は geometric crystal U^- 上の positive structure を与える。*

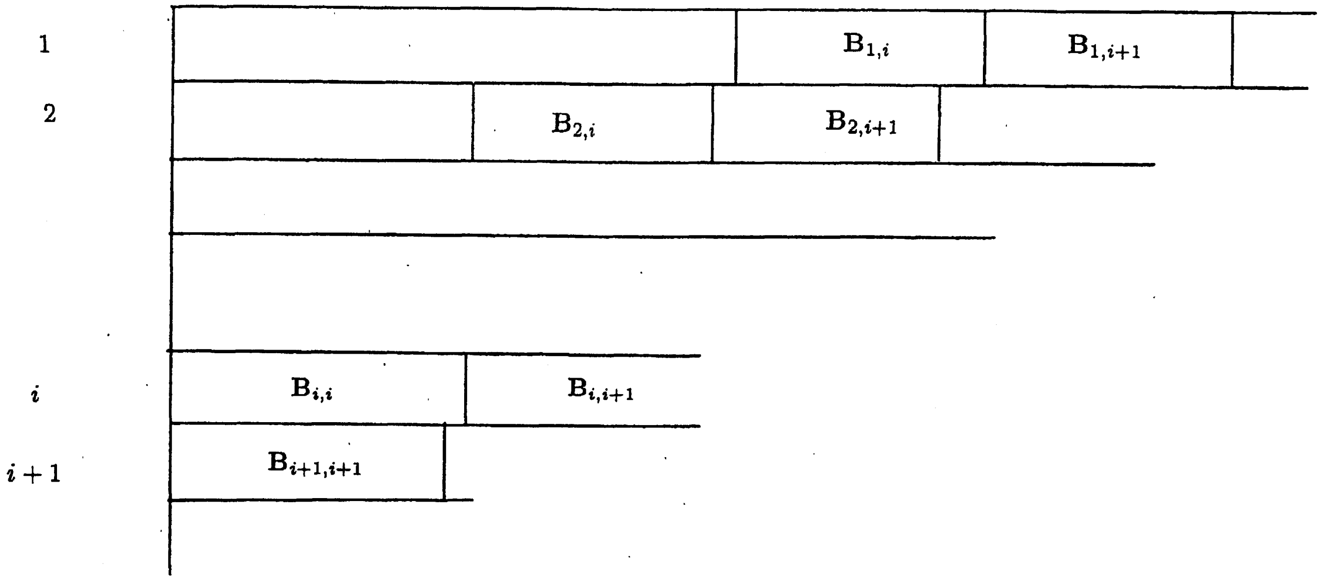
5 Geometric Crystals on U^- and generalized Young Tableaux

5.1 Crystal structure on Young tableaux

Young tableaux 達の crystal structure について思い出す ([2]). 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ に対して

$$B(\lambda)=\{(B_{i,j})=\text{ Young talbeau of shape }\lambda\text{ with entries }1,2,\cdots,n+1\},$$

とおく。ここで $B_{i,j} := \sharp\{j \text{ in the } i\text{-th row}\}$. $B(\lambda)$ の元は次のように表示される：



(5.1)

さて、$\tilde{e}_i^{\beta}(B_{k,j})$ $(\beta \geq 0)$ を具体的に見よう：

$$\tilde{e}_i^{\beta}(B_{k,j}) = (B_{k,j} + \beta_{k,j}), \qquad \beta_{k,j} = \begin{cases} \beta_k^{(i)} & \text{if } j = i, \\ -\beta_k^{(i)} & \text{if } j = i+1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta_k^{(i)} &= \max\left(\beta + \max_{1\leq j\leq k}\left(\sum_{l=1}^{j} B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i}\right), \max_{k<j\leq i}\left(\sum_{l=1}^{j} B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i}\right)\right) \\ &\quad -\max\left(\beta + \max_{1\leq j<k}\left(\sum_{l=1}^{j} B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i}\right), \max_{k\leq j\leq i}\left(\sum_{l=1}^{j} B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i}\right)\right) \quad (1 \leq k \leq i), \\ \beta_{i+1}^{(i)} &= 0 \end{aligned}$$

Remark. 上の $\beta_k^{(i)}$ の公式は $B_{i,i}$, $B_{i+1,i+1}$ によらない。

5.2 Generalized Young tableau and its explicit crystal structure

$b \in B(\lambda)$ を (5.1) のような Young tableau としよう。すると $B_{i,j}$ 達は Young tableau であるための条件、たとえば、

$$B_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{i\leq j\leq k} B_{i,j} \geq \sum_{i+1\leq j\leq k+1} B_{i+1,j},$$

などを持つ。

そこで、$B_{i,j}$ 達の持つこうした条件を忘れた次のようなものを考える：

$$B^{\sharp} := \{(B_{i,j})_{1\leq i<j\leq n+1} | B_{i,j} \in \mathbb{Z}\} (= \mathbb{Z}^{\frac{1}{2}n(n+1)}),$$

ここで、$B^\sharp$ の定義に $B_{i,i}$ が現れていないが、もともと各行の長さが一定なので独立に動けるものは1つ少ない。また、上の remark に述べたように $\beta_k^{(i)}$ は $B_{i,i}$ に依らない。

さて、この $B^\sharp$ に crystal の構造を次のようにして入れる。$v=(B_{i,j})\in B^\sharp$ に対して次のようにおく：

$$b_k^{(i)}(v) := \sum_{1\le l\le k} B_{l,i+1} - \sum_{1\le l\le k} B_{l,i},$$

$$\begin{cases} \varepsilon_i(v) := \max\limits_{1\le k\le i}\{b_k^{(i)}(v)\}, \\ wt(v) := -\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{\substack{1\le k\le i \\ i+1\le j\le n+1}} B_{k,j}\Big)\alpha_i, \\ \varphi_i(v) := \langle h_i, wt(v)\rangle + \varepsilon_i(v). \end{cases} \tag{5.2}$$

$$m_i = m_i(v) := \min\{k | 1\le k\le i,\ b_k^{(i)}(v) = \varepsilon_i(v)\}$$
$$M_i = M_i(v) := \max\{k | 1\le k\le i,\ b_k^{(i)}(v) = \varepsilon_i(v)\}.$$

Kashiwara operator $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ の $v=(B_{i,j})$ への作用は次：

$$\tilde{f}_i : \begin{cases} B_{k,j} \longrightarrow B_{k,i} & \text{if } (k,j)\neq (M_i,i),(M_i,i+1) \\ B_{M_i,i} \longrightarrow B_{M_i,i}-1 & \text{if } (k,j)=(M_i,i) \\ B_{M_i,i+1} \rightarrow B_{M_i,i+1}+1 & \text{if } (k,j)=(M_i,i+1) \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\tilde{e}_i : \begin{cases} B_{k,j} \longrightarrow B_{k,i} & \text{if } (k,j)\neq (m_i,i),(m_i,i+1), \\ B_{m_i,i} \longrightarrow B_{m_i,i}+1 & \text{if } (k,j)=(m_i,i) \\ B_{m_i,i+1} \rightarrow B_{m_i,i+1}-1 & \text{if } (k,j)=(m_i,i+1) \end{cases} \tag{5.4}$$

Theorem 5.1. 上の *(5.2), (5.3), (5.4)* のようにおくと $B^\sharp$ は *crystal* となる。

Remark. $\tilde{e}_i$ の作用は前 subsection の $\tilde{e}_i^\beta$ の公式において $\beta=1$ としたものであり、$\tilde{f}_i=\tilde{e}_i^{-1}$ としてある。また、$B^\sharp$ の crystal graph が connected かどうかは不明。

ここで、crystal $B^\sharp$ の tropicalization が U^- 上の geometric crystal ($\Leftrightarrow$ U^- 上の geometric crystal の ultra-discretization が crystal $B^\sharp$) であることが次の対応により $\alpha_k^{(i)}$ についての (4.3) と $\beta_k^{(i)}$ についての (5.2) を比較することによりわかる：

$$A_{l,i} \longleftrightarrow B_{l,i+1}$$
$$x\cdot y \longleftrightarrow x+y$$
$$x/y \longleftrightarrow x-y$$
$$x+y \longleftrightarrow \max(x,y)$$

Theorem 5.2. $\mathcal{UD}(U^-)=B^\sharp$.

参考文献

[1] Berenstein A. and Kazhdan D., Geometric crystals and Unipotent crystals, math.QA/9912105.

[2] Kashiwara M. and Nakashima T., Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebra, J.Algebra, **165**, No.2, (1994), 295–345.

[3] Kumar S., Kac-Moody groups, their Flag varieties and Representation Theory, Progress in Mathematics 204, Birkhauser Boston, 2002.

[4] Nakashima T., Polyhedral Realizations of Crystal Bases and Braid-type Isomorphisms. Contemporary Mathematics **248**, 419–435 (1999).

[5] Nakashima T., Geometric Crystals on Schubert Vareities, (preprint), math.QA/0303087.

[6] Nakashima T., Geometric crytal, Schubert varieties, Crystals, 数理解析研究所講究録 1310 「組合わせ論的表現論とその周辺」(2003).

[7] Slodowy P., On the geometry of Scubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras, Can.Math.Soc.Conf.Proc. on 'Algebraic geometry' (Vancouver) **6**, 405–442, (1986).