Recherches sur le Degré de Grandeur d'une Certaine Intégrale Définie contenant un Paramètre ; leurs Applications aux Séries Entières et à l'Équation Différentielle Ordinaire

par

Hirosi Okamura

(Reçu le 4 Juillet, 1932)

Le présent mémoire se compose de trois parties.

Dans la première, nous donnons quelques théorèmes que nous croyons nouveaux sur le degré de grandeur d'une fonction représentée par une certaine intégrale définie contenant un paramètre, qui est une généralisation de la fonction Γ ou des séries de Dirichlet à coefficients réels et non négatifs. Nous établissons en outre une formule qui nous donne l'abscisse de convergence de l'intégrale étudiée.

Dans la deuxième partie, nous appliquons les résultats obtenus dans la première partie au cas particulier où notre intégrale se réduit à une série entière à coefficients non négatifs et obtenons la condition nécessaire et suffisante, à laquelle doivent obéir les coefficients, pour que la série soit infinie d'ordre non supérieur à celui d'une fonction donnée d'avance presque arbitrairement, quand on fait tendre la variable indépendante réelle vers l'extrémité positive de l'intervalle de convergence. Nous indiquons aussi la condition pour que la série soit dans ce cas infinie d'ordre égal ou inférieur. Nous apportons donc en quelque sorte une réponse au problème fondamental qui consiste à déterminer le mode de croissance d'une série entière, par ses coefficients supposés non négatifs, et vice versa[1].

La troisième et dernière partie forme une suite de notre mémoire antérieur[2] sur la méthode d'approximations successives de l'équation

---

1. *Voir*, pour le cas des fonctions entières, Borel, Leçons sur les séries à termes positifs, p. 58 et p. 64.

2. Ces Memoirs, A **14**, p. 85 (1931).

différentielle ordinaire; nous arrivons à montrer en appliquant les résultats de la première partie que l'approximation successive est convergente et cela en admettant hypothèse moins restrictive que dans le mémoire précédent. Le résultat nous fournit aussi une condition suffisante de l'unicité de la solution de l'équation, mais la condition ainsi obtenue peut être démontrée directement par une méthode simple qui ne fait que préciser la méthode de M. Tonelli[1] ou qui est une généralisation de la méthode que nous avons employée dans notre mémoire antérieur[2].

I. Théorèmes sur le degré de grandeur d'une certaine intégrale définie contenant un paramètre.

Soient $p(x)$ et $r(x)$ deux fonctions non négatives, finies et mesurables, d'une variable réelle x, définies dans un ensemble linéaire mesurable E, et considérons l'intégrale

$$F(n)=\int_E p(x)e^{nr(x)}\,dx$$

contenant un paramètre n. Les raisonnements que nous allons faire subsistent même si $p(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions de plusieurs variables définies dans un ensemble à plusieurs dimensions; ce ne sont pas en effet des cas très différents, et nous nous bornerons au cas d'une seule variable. D'autre part on peut, si l'on veut, introduire la restriction de E borné, bien que nos raisonnements soient valables pour tous les cas, la transformation s'opérant par changement de variables.

Introduisons ici une hypothèse indispensable à notre théorie: *$p(x)$ est sommable dans tout sous-ensemble mesurable de E où $r(x)$ est bornée*, $r(x)$ n'étant pas nécessairement bornée dans E entier.

On peut alors distinguer trois cas: ou bien $F(n)$ est finie pour tout nombre réel n, ou elle ne l'est jamais quel que soit n, ou il y a un nombre réel N tel que $F(n)$ est finie pour $n<N$ et ne l'est pas pour $n>N$. Ceci est une conséquence de ce que l'expression à intégrer dans la formule de $F(n)$ est croissante par rapport à n. Convenons de dire que dans les deux premiers cas, on a respectivement $N=+\infty$ ou $N=-\infty$, et ainsi N est bien déterminé dans tous les cas. Au point $n=N$ il y a doute; il peut arriver que $F(n)$ soit

1. Rendiconti della R. Academia Naz. dei Lincei, 6e série, **1**, p. 272 (1925).

2. Je n'avais pas eu connaissance de la méthode de M. Tonelli quand j'ai rédigé le mémoire.

finie ou infinie comme on le verra d'après le fait que $F(n)$ devient une série de Dirichlet si l'on prend pour $p(x)$ et $r(x)$ quelques fonctions particulières. Nous établirons à la fin de cette première partie une formule qui donne la valeur de ce nombre N.

Indiquons maintenant quelques propriétés fondamentales de la fonction $F(n)$.

Tout d'abord $F(n)$ est une fonction continue et croissante de n dans l'intervalle $-\infty < n < N$; sa dérivée $F'(n)$ est également continue et croissante dans le même intervalle. On a pour cette dérivée:

$$F'(n) = \int_E p(x) r(x) e^{nr(x)}\, dx.$$

Cette intégrale est de la même forme que $F(n)$, en substituant $p(x)r(x)$ à $p(x)$ dans $F(n)$. Son abscisse de convergence est aussi N. Il en est de même pour $F''(n)$, $F'''(n)$,.........

Pour le démontrer, prenons deux nombres n et $n+\Delta n$ inférieurs à N; on a évidemment

$$\frac{F(n+\Delta n) - F(n)}{\Delta n} = \int_E p(x) r(x) e^{(n+\theta\Delta n) r(x)}\, dx,$$

θ étant une fonction de x, n et Δn, toujours comprise entre 0 et 1. On voit donc en prenant Δn positif que $p(x)r(x)e^{nr(x)}$ est sommable dans E pour $n < N$ et par conséquent, en passant à la limite, on obtient la formule de $F'(n)$ ci-dessus, grâce au théorème de M. Lebesgue. Inversement si l'intégrale du second membre dans la formule

$$F'(n) = \int_E p(x) r(x) e^{nr(x)}\, dx$$

est finie pour une certaine valeur de n, l'intégrale $F(n)$ l'est aussi pour la même valeur de n: on peut le voir en décomposant l'ensemble E en deux autres, dans l'un desquels on a $r(x) < 1$ et dans l'autre $r(x) \geqq 1$, et en appliquant à l'intégrale dans le premier ensemble l'hypothèse faite plus haut sur $p(x)$.

Il serait facile montrer d'ailleurs que $F(n)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan où la partie réelle de n est inférieure à N; mais nous laisserons de côté la démonstration.

Ceci posé, sauf le cas où $p(x)$ est presque partout nulle dans E et où $F(n)$ s'annule identiquement, la fonction $F(n)$ est toujours positive et croissante pour $n < N$, ainsi que la dérivée logarithmique $\frac{F'(n)}{F(n)}$. On a, en effet, pour $n < N$

$$F''(n)=\int_E p(x)\,[r(x)]^2 e^{nr(x)}\,dx$$

et

$$\left(\frac{F'(n)}{F(n)}\right)'=\frac{F(n)F''(n)-[F'(n)]^2}{[F(n)]^2}$$
$$=\frac{1}{[F(n)]^2}\left[\int_E p(x)e^{nr(x)}\,dx.\int_E p(x)[r(x)]^2e^{nr(x)}\,dx\right.$$
$$\left.-\left(\int_E p(x)r(x)e^{nr(x)}\,dx\right)^2\right];$$

cette expression est positive ou nulle en vertu de l'inégalité de Schwarz. Elle s'annule et donc $\frac{F'(n)}{F(n)}$ n'est pas croissante au sens strict, seulement au cas où $r(x)$ est presque partout égale à une constante dans l'ensemble des points qui appartiennent à E et pour lesquels on a $p(x)\neq 0$.

Ainsi $\frac{F'(n)}{F(n)}$ croît avec n et a une limite finie ou infinie quand n tend vers N. Si N est fini et si la limite de $\frac{F'(n)}{F(n)}$ est également finie il faut que la limite de $F(n)$ le soit aussi, ce qui revient à dire, comme on sait, que $F(N)$ est également finie, et ce cas ne saurait rentrer dans notre étude sur l'ordre d'infinitude de $F(n)$. Si N est infini, le cas où la limite de $\frac{F'(n)}{F(n)}$ est finie rentre dans le cas où $r(x)$ est bornée dans l'ensemble des points pour lesquels $p(x)\neq 0$ moins un ensemble de mesure nulle. Ce cas correspond aux séries de Dirichlet ou aux séries entières à nombre limité de termes ; il peut se traiter aussi par notre méthode mais nous ne le ferons pas dans ce mémoire pour ne pas surcharger notre exposé. Par conséquent nous aurons surtout en vue dans les théorèmes suivants le cas où $\frac{F'(n)}{F(n)}$ tend vers $+\infty$.

Nous allons aborder maintenant notre étude sur le degré de grandeur de $F(n)$ quand on fait tendre n en croissant vers N. Nous donnerons tout d'abord quelques définitions préalables.

Comparons la croissance de $F(n)$ à celle d'une autre fonction donnée $e^{g(n)}$, où $g(n)$ est supposée, ainsi que sa dérivée $g'(n)$, fonction continue dans l'intervalle $N_0\leqq n<N_1$, N_1 pouvant être égale à $+\infty$. On suppose de plus que $g(n)$ et $g'(n)$ sont des fonctions croissantes au sens strict et tendent vers $+\infty$ quand n tend en croissant vers N_1. Il est inutile de faire N_1 différent de N si l'on connaît N grâce à des indications relatives à $p(x)$ et $r(x)$, mais nos théorèmes subsistent

dans tous les cas et nous apprennent de plus la relation qui existe entre N et N_1. Les hypothèses faites sur $g(n)$ ne seront pas trop restrictives d'après ce que nous venons de voir à propos de $F(n)$.

Considérons alors la fonction inverse de $y=g'(n)$ et désignons-la par $n=h(y)$. Si $g'(N_0)=Y_0$, $h(y)$ est une fonction continue et croissante dans l'intervalle $Y_0 \leqq y < +\infty$ et elle tend vers N_1 comme y tend vers $+\infty$.

Cela posé, envisageons maintenant l'intégrale

$$v=\int_y^{\bar{y}} [h(u)-h(y)]du,$$

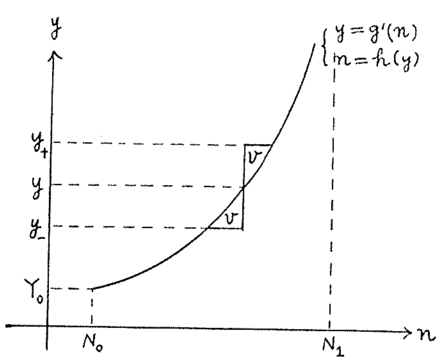
qui est manifestement une fonction de y et de $\bar{y}$ dans la région $Y_0 \leqq y$, $\bar{y} < +\infty$. Pour une valeur fixe de y dans cette région, l'intégrale v s'annule si $\bar{y}=y$ et croît constamment et indéfiniment quand $\bar{y}$ croît de y à $+\infty$; de même elle décroît avec $\bar{y}$ quand $\bar{y}$ décroît de y à Y_0. Elle ne prend une même valeur positive que pour deux valeurs de $\bar{y}$ au plus, dont l'une est supérieure et l'autre inférieure à y; nous obtenons ainsi deux fonctions inverses $y_+(y, v)$ et $y_-(y, v)$ telles que

$$\int_y^{y_+(y,\, v)} [h(u)-h(y)]du=v, \qquad y_+(y,\, v) \geqq y,$$

et

$$\int_y^{y_-(y,\, v)} [h(u)-h(y)]du=v, \qquad y_-(y,\, v) \leqq y.$$

Fig. 1



On voit que la fonction $y_+(y, v)$ est bien définie dans le domaine $Y_0 \leqq y < +\infty$, $0 \leqq v < +\infty$; si l'on fixe v elle est une fonction continue et croissante de y dans l'intervalle $Y_0 \leqq y < +\infty$ et tend vers $+\infty$ avec y. La fonction $y_-(y, v)$, où nous considérons v comme une constante positive, est également continue et croissante par raport à y dans un certain intervalle $Y_1(v) \leqq y < +\infty$. Elle tend aussi vers $+\infty$ avec y, ce qui est évident pour $N_1 = +\infty$ et est une conséquence de la condition $\lim_{n \to N_1} g(n) = +\infty$ pour N_1 fini.

Ces définitions étant établies, notre premier théorème s'énonce comme il suit :

Pour que l'on ait

$$N \geqq N_1$$

et

$$F(n) = O(e^{g(n)}) \qquad (n \to N_1)^1,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)] = O(1) \qquad (y \to +\infty),$$

l'expression I du premier membre désignant l'intégrale définie

$$\int p(x) e^{r(x)h[r(x)] - g\{h[r(x)]\}} dx$$

prise sur l'ensemble des points communs à E et à l'ensemble des points où l'inégalité entre crochets est satisfaite, M étant un nombre positif arbitraire.

Pour que l'on ait de plus

$$F(n) = o(e^{g(n)}) \qquad (n \to N_1),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)] = o(1) \qquad (y \to +\infty).$$

Remarquons que cette intégrale définie

$$I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)]$$

a une valeur finie, en vertu de l'hypothèse faite plus haut sur $p(x)$, pour une valeur de y suffisamment grande et telle que la fonction $y_-(y, M)$ ait un sens d'après la definition précédente.

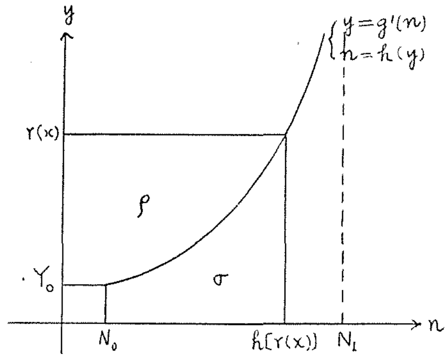
Remarquons en outre dans ce théorème et dans les deux théorèmes suivants on peut remplacer l'intégrale I par une autre intégrale J telle que

$$J = \int p(x) e^{\int_{r_0}^{r(x)} h(u) du} dx,$$

1. Par cette notation nous voulons dire que n tend vers N_1 *d'une façon continue*, en parcourant *toutes* les valeurs réelles inférieures à N_1. Nous adopterons la même convention dans la suite, partout où nous ne donnerons pas d'indications spéciales.

le domaine d'intégration étant le même. En effet, I et J ne diffèrent que par un facteur constant positif, puisque les exposants de e dans les expressions à intégrer sont égaux à une constante près, comme on peut le voir de la manière suivante. ρ, σ désignant respectivement les aires des domaines de la figure, on a

Fig. 2



$$\rho=\int_{Y_0}^{r(x)} h(u)du,$$

$$\sigma=\int_{N_0}^{h[r(x)]} g'(u)du=g\{h[r(x)]\}+\text{constante},$$

et

$$\rho+\sigma=r(x)h[r(x)]+\text{constante} ;$$

d'où l'on obtient

$$\int_{Y_0}^{r(x)} h(u)du=\rho=r(x)h[r(x)]-g\{h[r(x)]\}+\text{constante}.$$

Démontrons maintenant le théorème.

On a

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}}=\int_E \Psi(x, n)dx$$

en posant par définition

$$\Psi(x, n)=p(x)e^{nr(x)-g(n)}.$$

Dans cette expression si l'on donne à x une valeur prise dans E et telle que $r(x)\geqq Y_0$, et, si l'on regarde $\Psi(x, n)$ comme une fonction de la seule variable n dans l'intervalle $N_0\leqq n<N_1$, $\Psi(x, n)$ est maximum pour n tel que

$$r(x)-g'(n)=0$$

c'est-à-dire pour

$$n=h[r(x)].$$

En désignant la valeur correspondante de $\Psi(x, n)$ par $\psi(x)$, nous avons

$$\psi(x)=\Psi\{x,\ h[r(x)]\}=p(x)e^{r(x)h[r(x)]-g\{h[r(x)]\}}.$$

Ceci n'étant que l'expression à intégrer dans la formule qui donne I et $\psi(x)$ prend une valeur bien déterminée pour les points de E pour lesquels on a $r(x)\geqq Y_0$.

Le rapport de $\Psi(x, n)$ à $\psi(x)$ est

$$e^{r(x)\{n-h[r(x)]\}-g(n)+g\{h[r(x)]\}}.$$

Si nous écrivons, dans l'exposant de cette expression, u au lieu de $r(x)$, nous obtenons une fonction de u et n

$$-\Omega(u, n)=u[n-h(u)]-g(n)+g[h(u)]$$

et la relation

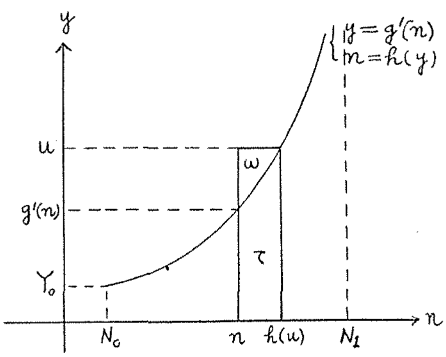
$$\Psi(x, n)=\psi(x)e^{-\Omega(r(x), n)}. \tag{1}$$

On peut démontrer comme dans la remarque précédente par des considérations géométriques la formule remarquable

$$\Omega(u, n)=\int_{g'(n)}^{u}[h(u)-n]du \tag{2}$$

pour $Y_0\leqq u<+\infty$, $N_0\leqq n<N_1$. On a, en effet, dans la figure ci-contre

Fig. 3



$$\omega=\int_{g'(n)}^{u}[h(u)-n]du,$$

$$\tau=\int_{n}^{h(u)}g'(u)du=g[h(u)]-g(n),$$

et

$$\omega+\tau=u[h(u)-n];$$

d'où l'on arrive à l'égalité annoncée

$$\int_{g'(n)}^{u}[h(u)-n]du=\omega=u[h(u)-n]-g[h(u)]+g(n).$$

Tous nos résultats découlent de ces deux formules (1) et (2).

Cherchons maintenant pour des valeurs assez grandes du paramètre n des deux bornes de l'intégrale

$$\int_E \Psi(x, n)dx,$$

et établissons deux inégalités qui nous permettrons de démontrer notre théorème.

En premier lieu nous avons évidemment

$$\int_E \Psi(x, n)dx \geqq \int_{[y_-(g'(n),\, M)<r(x)<y_+(g'(n),\, M)]} \Psi(x, n)dx$$

en supposant n assez grand pour que $y_-(g'(n), M)$ ait un sens. L'inégalité entre crochets, au-dessous du signe d'intégration du second membre, indique que le domaine d'intégration s'étend à tous les points de E satisfaisant à cette inégalité. Or dans ce dernier domaine d'intégration la fonction $\Omega(r(x), n)$ est comprise entre o et M en vertu de la formule (2) et des définitions de $y_-(g'(n), M)$ et de $y_+(g'(n), M)$. Donc d'après (1) nous pouvons écrire

$$\int_{[y_-(g'(n),\, M)<r(x)<y_+(g'(n),M)]} \Psi(x, n)dx \geqq e^{-M} \cdot \int_{[,,]} \psi(x)dx$$

et finalement

$$(3) \qquad \frac{F(n)}{e^{g(n)}} \geqq e^{-M} \cdot I[y_-(g'(n),M)<r(x)<y_+(g'(n),M)].$$

D'autre part, décomposons le domaine d'intégration E en une infinité dénombrable de sous-ensembles de la manière suivante: Prenant un nombre Y non inférieur à Y_0 et un nombre n assez grand tel que l'on ait $g'(n)>Y$, nous allons établir une suite de valeurs entre Y et $+\infty$. Prenons d'abord un nombre $g'(n)$ et désignons-le par y_0; nous avons d'après (2)

$$\Omega(y_0, n)=0.$$

Puis prenons successivement $y_1, y_2, \ldots\ldots$ de telle sorte que l'on ait

$$y_0<y_1<y_2<\ldots\ldots\ldots$$

et

$$\Omega(y_i, n)=Mi \qquad (i=1,2, \ldots\ldots).$$

D'après (2) il est possible de déterminer $y_1, y_2, \ldots\ldots$ par ces conditions et cela d'une seule façon avec

$$\lim_{i\to+\infty} y_i=+\infty.$$

Définissons d'une manière analogue les nombres $y_{-1}, y_{-2}, \ldots\ldots, y_{-\lambda}$ par les conditions:

$$y_0 > y_{-1} > y_{-2} > \ldots\ldots > y_{-\lambda} > Y$$

et

$$\Omega(y_{-i}, n) = Mi \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, \lambda),$$

où nous supposons

$$M\lambda < \Omega(Y, n) \leqq M(\lambda + 1),$$

λ étant un certain entier dépendant de Y et n. Maintenant décomposons l'ensemble E en deux sous-ensembles $[r(x) \leqq Y]$ et $[Y < r(x)]$ et puis décomposons l'ensemble $[Y < r(x)]$ en une infinité dénombrable de sous-ensembles

$$[Y < r(x) \leqq y_{-\lambda}],\ [y_{-\lambda} < r(x) \leqq y_{-\lambda+1}], \ldots\ldots,\ [y_{-2} < r(x) \leqq y_{-1}],$$
$$[y_{-1} < r(x) < y_1],\ [y_1 \leqq r(x) < y_2],\ [y_2 \leqq r(x) < y_3], \ldots\ldots$$

Convenant ici de désigner Y par $y_{-\lambda-1}$, nous avons en vertu des relations (1), (2) et du théorème de la moyenne de l'intégrale, les inégalités

$$\begin{aligned}\int_{[y_{-1} < r(x) < y_1]} \Psi(x, n)dx &\leqq I[y_{-1} < r(x) < y_1] \\ &= I[y_-(y_0, M) < r(x) < y_+(y_0, M)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{[y_i \leqq r(x) < y_{i+1}]} \Psi(x, n)dx &\leqq e^{-Mi} \cdot I[y_i \leqq r(x) < y_{i+1}] \\ &\leqq e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_i, M) < r(x) < y_+(y_i, M)] \\ &\qquad (i = 1,\ 2, \ldots\ldots),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{[y_{-i-1} < r(x) \leqq y_{-i}]} \Psi(x, n)dx &\leqq e^{-Mi} \cdot I[y_{-i-1} < r(x) \leqq y_{-i}] \\ &\leqq e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_{-i}, M) < r(x) < y_+(y_{-i}, M)] \\ &\qquad (i = 1,\ 2, \ldots\ldots, \lambda).\end{aligned}$$

En ajoutant ces inégalités nous avons donc finalement pour des valeurs de Y et n telles que $Y \geqq Y_0$ et $g'(n) > Y$

$$\begin{aligned}\int_{[Y < r(x)]} \Psi(x, n)dx &\leqq \sum_{i=1}^{\lambda} e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_{-i}, M) < r(x) < y_+(y_{-i}, M)] \\ &\quad + I[y_-(y_0, M) < r(x) < y_+(y_0, M)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-Mi} \cdot I[y_-(y_i, M) < r(x) < y_+(y_i, M)],\end{aligned} \tag{4}$$

y_0 étant égale à $g'(n)$ et la suite $y_{-\lambda}, y_{-\lambda+1}, \ldots\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\ldots,$ qui se détermine dépendant de Y et de n, étant telle que

$$Y < y_{-\lambda} < y_{-\lambda+1} < \ldots\ldots < y_{-1} < y_0 < y_1 < \ldots\ldots \to +\infty.$$

Au moyen des inégalités (3) et (4), nous allons pouvoir achever complètement la démonstration. Si $\dfrac{F(n)}{e^{g(n)}}$ est borné et inférieur à γ quand n est assez voisin de N_1, l'inégalité (3) montre que $I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)]$ est inférieur à $e^M \cdot \gamma$ pour y assez grand. D'autre part nous avons

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}} = \int_E \Psi(x, n)dx = \int_{[r(x) \leqq Y]} \Psi(x, n)dx + \int_{[Y < r(x)]} \Psi(x, n)dx$$

et le premier terme du troisième membre tend vers zéro quand n augmente vers N_1 en vertu de l'hypothèse faite sur $p(x)$ au début de cette partie et du fait que $e^{nr(x)-g(n)}$ tend uniformément vers zéro dans le domaine d'intégration de cette intégrale. Par conséquent si $I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)]$ est borné et inférieur à δ pour une valeur assez grande de y, nous savons par l'inégalité (4) que, pour une valeur assez grande de Y, $\dfrac{F(n)}{e^{g(n)}}$ est borné et inférieur è $\varepsilon + \dfrac{1+e^M}{1-e^M}\delta$, ε étant un nombre positif donné, aussi petit que l'on veut, pour n assez voisin de N_1. D'ailleurs si l'une des deux expressions $\dfrac{F(n)}{e^{g(n)}}$ et $I[y_-(y, M) < r(x) < y_+(y, M)]$ tend vers zéro, il en est de même de l'autre.

(C. q. f. d.)

Dans la démonstration du théorème précédent nous avons supposé que n variait d'une manière continue et nous avons considéré la limite de $F(n)$. Mais l'inégalité (3) nous donne aussi notre deuxième théorème qui nous sera utile dans la troisième partie :

Si la variable n ne prend que des valeurs appartenant à un ensemble $\{\bar{n}\}$ et tend vers N_1 en passant par toutes les valeurs de $\{\bar{n}\}$ inférieures à N_1 et si l'on a alors

$$F(n) = O(e^{g(n)}) \qquad (n \to N_1),$$

N_1 étant inférieur ou égal à N, on a nécessairement

$$I[y_-(g'(n), M) < r(x) < y_+(g'(n), M)] = O(1) \qquad (n \to N_1),$$

n tendant vers N_1 de la manière indiquée, et M étant nombre constant positif arbitraire.

Si l'on a de plus

$$F(n)=o(e^{g(n)}) \qquad (n\to N_1),$$

on a nécessairement

$$I[y_-(g'(n), M)<r(x)<y_+(g'(n), M)]=o(1) \qquad (n\to N_1),$$

n tendant vers N_1 toujours de la manière indiquée.

Passons maintenant à notre troisième théorème, qui nous paraît très important.

Pour que l'on ait

$$N_1=N$$

et que le rapport

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}}$$

ait des limites d'indétermination finies et positives lorsque la variable n croît vers N_1, il faut et il suffit que l'intégrale

$$I[y_-(y, M)<r(x)<y_+(y, M)]$$

ait des limites d'indétermination finies et positives quand y augmente indéfiniment, en prenant pour la constante positive M des valeurs assez grandes,

Le résultat du premier théorème et l'inégalité (3) suffisent à établir que la condition est suffisante. Nous allons prouver qu'elle est nécessaire.

Soient en effet

$$A=\varliminf_{n\to N_1}\frac{F(n)}{e^{g(n)}} \quad \text{et} \quad B=\varlimsup_{n\to N_1}\frac{F(n)}{e^{g(n)}},$$

A, B étant supposées finies et positives.

Nous allons généraliser l'inégalité (4) par un raisonnement légèrement différent de celui qui nous a permis de l'établir. Pour déterminer y_i et y_{-i} ($i\geqq 2$) nous poserons maintenant

$$\Omega(y_{\pm i}, n)=M+(i-1)M_1,$$

M_1 étant un nombre positif fixe qui a été pris antérieurement égal à M. Or nous aurons, pour des nombres Y et n tels que $Y\geqq Y_0$ et $g'(n)>Y$,

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\int_{[Y<r(x)]}\Psi(x,n)dx \leqq & \sum_{i=1}^{\lambda} e^{-M-(i-1)M_1}.\, I[y_-(y_{-i},M_1)<r(x)<y_+(y_{-i},M_1)] \\
& + I[y_-(y_0,M)<r(x)<y_+(y_0,M)] \\
& + \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-M-(i-1)M_1}. I[y_-(y_i,M_1)<r(x)<y_+(y_i,M_1)],
\end{aligned}
$$

où y_0 est égal à $g'(n)$ et la suite $y_{-\lambda}$, $y_{-\lambda+1}, \ldots\ldots$, y_{-1}, y_0, $y_1, \ldots\ldots$, qui se détermine dépendant de Y et de n, est telle que l'on ait

$$Y<y_{-\lambda}<y_{-\lambda+1}<\ldots\ldots<y_{-1}<y_0<y_1<y_2<\ldots\ldots\rightarrow+\infty.$$

Dans ce cas l'inégalité (3) nous donne d'abord pour y assez grand

$$I[y_-(y,M_1)<r(x)<y_+(y,M_1)]\leq e^{M_1}.\,(B+\varepsilon),$$

ε étant un nombre positif arbitraire. Nous avons donc en vertu de (5) pour y assez grand

$$A-\varepsilon<I[y_-(y,M)<r(x)<y_+(y,M)]+2(B+\varepsilon)\frac{e^{M_1-M}}{1-e^{-M_1}}.$$

Ceci montre que si l'on prend ε assez petit et M assez grand la limite inférieure de $I[y_-(y,M)<r(x)<y_+(y,M)]$ pour $y\rightarrow+\infty$ est positive; et la limite supérieure est finie d'après le premier théorème. (C. q. f. d.)

Dans le théorème précédent on doit prendre M assez grand; il suffit que l'on ait

$$M>\log\frac{8B}{A},$$

comme le montre l'inégalité précédente en posant $M_1=\log 2$ et en faisant ε assez petit.

Remarquons enfin que dans les énoncés des théorèmes précédents nous pouvons écrire

$$I[y_-(y,M')<r(x)<y_+(y,M'')]$$

au lieu de

$$I[y_-(y,M)<r(x)<y_+(y,M)]$$

en supposant que M' et M'' sont des fonctions de y telles que les quatre limites

$$\varliminf_{y\rightarrow+\infty} M'(y),\qquad \varlimsup_{y\rightarrow+\infty} M'(y),$$

$$\varliminf_{y\rightarrow+\infty} M''(y),\qquad \varlimsup_{y\rightarrow+\infty} M''(y)$$

soient toutes finies et positives, et de plus suffisamment grandes dans le troisième théorème. Pour nous en assurer, il suffit d'appliquer nos théorèmes un certain nombre de fois en choisissant M convenablement et en s'appuyant sur le fait que les fonctions $y_+(y, v)$ et $y_-(y, v)$ sont respectivement croissante et décroissante par rapport à v.

Pour terminer cette première partie démontrons la formule qui nous donne l'abscisse de convergence N de notre intégrale $F(n)$. La formule cherchée est, comme on peut le supposer par analogie avec la série de Dirichlet,

$$\boxed{N = \varlimsup_{y\to+\infty} \frac{\log\left(\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]} p(x)\,dx\right)}{-y},}$$

où M est un nombre positif arbitraire mais fixe et où l'on considère $\log 0$ ayant un sens tel que $\log 0 = -\infty$.

En supposant en effet que la valeur N donnée par cette formule ne soit pas infinie, si nous prenons un nombre N' plus grand que N, nous avons pour une certaine valeur de y aussi grande que l'on veut

$$N' > \frac{\log\left(\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]} p(x)dx\right)}{-y},$$

et par conséquent

$$e^{N'y}\cdot\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]} p(x)dx > 1,$$

d'où l'on a si $N' \geqq 0$

$$\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]} p(x)e^{N'r(x)}dx > 1$$

et si $N' < 0$

$$\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]} p(x)e^{N'r(x)}dx > e^{N'M}.$$

Dans tous les cas, on peut prendre y de plus en plus grand, les domaines d'intégration étant distincts. Donc l'intégrale

$$\int_E p(x)e^{N'r(x)}dx$$

ne saurait être finie.

Réciproquement si N'' est un nombre inférieur à N donné par la formule, nous avons pour y suffisamment grand

$$N''+\varepsilon<\frac{\log\left(\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]}p(x)\,dx\right)}{-y},$$

ε étant un nombre positif. Il s'ensuit

$$e^{(N''+\varepsilon)y}\cdot\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]}p(x)dx<1$$

et, en considérant séparément les deux cas $N''\geqq 0$ et $N''<0$ comme plus haut, nous obtenons

$$\int_{[y\leqq r(x)\leqq y+M]}p(x)e^{N''r(x)}dx<\eta e^{-\varepsilon y}$$

η étant un certain nombre positif. En posant $y+M$, $y+2M$,...... au lieu de y nous avons

$$\int_{[y+iM\leqq r(x)\leqq y+(i-1)M]}p(x)e^{N''r(x)}dx<\eta e^{-\varepsilon y-i\varepsilon M}\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

La somme des seconds membres est finie et par conséquent la somme des premiers membres ou l'intégrale

$$\int_{[y\leqq r(x)]}p(x)e^{N''r(x)}dx$$

l'est aussi. D'autre part grâce à l'hypothèse faite sur $p(x)$ au début de cette partie l'intégrale

$$\int_{[r(x)<y]}p(x)e^{N''r(x)}dx$$

est finie. En faisant la somme de ces deux intégrales on en conclut que $F(N'')$ est finie. (C. q. f. d.)

II. Applications des théorèmes précédents à l'étude de la croissance des séries entières à coefficients non négatifs.

Comme cas particulier des théorèmes de la première partie, prenons pour E l'intervalle $0\leqq x<+\infty$ et définissons les fonctions $p(x)$ et $r(x)$ de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{l}p(x)=a_i,\\ r(x)=l_i\end{array}\right\}\quad(i\leqq x<i+1)\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots),$$

où a_i et l_i ($i=0, 1, 2, \ldots\ldots$) sont des nombres non négatifs. Supposons de plus

$$\lim_{i\to+\infty} l_i=+\infty.$$

Les fonctions $p(x)$ et $r(x)$ remplissent alors les conditions posées dans la première partie. Nous obtenons ainsi

$$F(n)=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i e^{l_i n}$$

qui est une série de Dirichlet à coefficients non négatifs.

Le premier et le troisième théorème de la première partie deviennent avec les mêmes hypothèses et les mêmes définitions relatives à la fonction $g(n)$.

Pour que l'abscisse de convergence de N de la série de Dirichlet étudiée $F(n)$ ne soit pas supérieur à N_1 et que l'on ait de plus

$$F(n)=O(e^{g(n)}) \qquad (n\to N_1),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y-(y,\, M)<l_i<y+(y,\, M)]} a_i b_i=O(1) \qquad (y\to+\infty),$$

en posant

$$b_i=e^{l_i h(l_i)-g[h(l_i)]};$$

l'inégalité au-dessous du signe $\sum$ signifiant que la sommation doit s'étendre à tous les termes satisfaisant à cette inégalité, M étant un nombre positif arbitraire.

Pour que l'on ait de plus

$$F(n)=o(e^{g(n)}) \quad (n\to N_1),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y-(y,\, M)<l_i<y+(y,\, M)]} a_i b_i=o(1) \qquad (y\to+\infty).$$

En outre pour que l'on ait $N=N_1$ et que le rapport

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}}$$

ait des limites d'indétermination finies et positives pour $n\to N_1$, il faut et il suffit que les limites d'indétermination de

$$\sum_{[y-(y,\, \overline{M})<l_i<y+(y,\, \overline{M})]} a_i b_i \qquad (y\to+\infty)$$

soient finies et positives, $\overline{M}$ étant pris assez grand.

Les séries les plus intéressantes qui se réduisent par simple transformation à des séries de cette espèce sont les séries entières obtenues en posant

$$l_i = i$$

et en substituant $\log z$ à la variable u. Soit

$$G(z) = F(\log z) = a_0 + a_1 z \quad a_2 z^2 + \ldots\ldots$$

Le théorème précédent nous permet de conclure le théorème suivant.

Pour qu'une série entière à coefficients non négatifs $G(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ *soit convergente pour* $|z| < e^{N_1}$ *et que l'on ait*

$$G(z) = O(e^{g(\log z)}) \qquad (z \to e^{N_1}),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y-(y,M)<i<y+(y,M)]} a_i b_i = O(1) \qquad (y \to +\infty),$$

en posant

$$b_i = e^{ih(i) - g[h(i)]},$$

M étant un nombre positif arbitraire mais fixe.

Pour que l'on ait de plus

$$G(z) = o(e^{g(\log z)}) \qquad (z \to e^{N_1}),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y-(y,M)<i<y+(y,M)]} a_i b_i = o(1) \qquad (y \to +\infty).$$

De plus pour que le rayon de convergence de la série entière $G(z)$ *soit égale à* e^{N_1} *et que le rapport*

$$\frac{G(z)}{e^{g(\log z)}}$$

ait des limites d'indétermination finies et positives pour $z \to e^{N_1}$, *il faut et il suffit que les limites d'indétermination de*

$$\sum_{[y-(y,\overline{M})<i<y+(y,\overline{M})]} a_i b_i \qquad (y \to +\infty)$$

soient finies et positives, $\overline{M}$ étant pris assez grand.

Comme application de ce théorème, posons

$$g(\log z) = Cz^R$$

ou

$$g(n) = Ce^{Rn},$$

C, R étant des nombres positifs constants. On a alors

$$g'(n) = CRe^{Rn};$$

$g'(n)$ est une fonction continue et croissante augmentant indéfiniment avec n; la fonction $g(n)$ remplit donc la condition requise dans l'énoncé précédente si l'on fait $N_1 = +\infty$. On a évidemment

$$h(y) = \frac{1}{R}\log\frac{y}{CR},$$

et par conséquent

$$M = \int_y^{\bar{y}} [h(u) - h(y)]du = \frac{1}{R}\int_y^{\bar{y}} \log\frac{u}{y} du$$

$$= \frac{\bar{y}}{R}\left(\frac{\bar{y}}{y}\log\frac{\bar{y}}{y} - \frac{\bar{y}}{y} + 1\right).$$

Cette expression donne la valeur de M, en désignant $y_+(y, M)$ ou $y_-(y, M)$ par $\bar{y}$; on peut alors considérer M comme une fonction de y ayant une limite finie et positive, qui n'est pas nécessairement une constante, comme nous l'avons remarqué après la démonstration du troisième théorème de la première partie. Or, nous avons

$$\frac{\bar{y}}{y} \to 1$$

et, en posant $\bar{y} = y + \Delta y$, on a

$$\frac{\Delta y}{y} \to 0.$$

Par suite notre expression de M devient

$$\frac{y + \Delta y}{R}\left[\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\log\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) - \frac{\Delta y}{y}\right];$$

cette expression est asymptotiquement égale à

$$\frac{1}{2R} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{y}.$$

Donc nous pouvons écrire $y + \varkappa\sqrt{y}$ ou $y - \varkappa\sqrt{y}$, $\varkappa$ étant un nombre positif arbitraire mais fixe, au lieu de $y_+(y, M)$ ou $y_-(y, M)$ dans l'énoncé précédent; il suffit de faire $\varkappa$ suffisamment grand au lieu de

$\overline{M}$ dans la troisième partie de l'énoncé. D'ailleurs, un raisonnement simple suffirait à établir que nous pouvons remplacer l'inégalité

$$y-x\sqrt{y}<i<y+x\sqrt{y}$$

par cette autre :

$$y<i<y+K\sqrt{y},$$

où K est un nombre positif quelconque que l'on doit prendre assez grand dans la troisième partie du théorème. Nous arrivons ainsi au résultat suivant.

Pour que la série entière à coefficients non négatifs $G(z)=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ *représente une fonction entière et que l'on ait de plus*

$$G(z)=O(e^{Cz^R}) \qquad (z\to+\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y<i<y+K\sqrt{y}]} a_i e^{\frac{i}{R}\log\frac{i}{CR}-\frac{i}{R}}$$

$$=\sum_{[y<i<y+K\sqrt{y}]} a_i\left(\frac{i}{CRe}\right)^{\frac{i}{R}}=O(1) \qquad (y\to+\infty),$$

K étant une constante positive arbitraire.

Pour que l'on ait de plus

$$G(z)=o(e^{Cz^R}) \qquad (z\to+\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{[y<i<y+K\sqrt{y}]} a_i\left(\frac{i}{CRe}\right)^{\frac{i}{R}}=o(1) \qquad (y\to+\infty).$$

En outre, pour que les limites d'indétermination de

$$\frac{G(z)}{e^{Cz^R}} \qquad (z\to+\infty)$$

soient finies et positives toutes les deux, il faut et il suffit que pour un nombre positif $\overline{K}$ assez grand, les deux limites de

$$\sum_{[y<i<y+\overline{K}\sqrt{y}]} a_i\left(\frac{i}{CRe}\right)^{\frac{i}{R}} \qquad (y\to+\infty)$$

soient finies et positives.

Ce résultat permet de déduire les formules connues qui donnent l'ordre et le type d'une fonction entière au moyen des coefficients de la série de Taylor correspondante. Mais dans le cas présent, nous avons supposé que les coefficients étaient positifs ou nuls, et le résultat que nous avons obtenu est de nature beaucoup plus précise que ceux que l'on obtiendrait par cette seconde méthode.

Indiquons encore une autre application simple.

Soient

$$g(n)=Hn^2, \qquad g'(n)=2Hn,$$

H étant un nombre positif. Ces fonctions satisfont évidemment à notre condition. On a alors

$$h(y)=\frac{y}{2H}$$

et

$$y_+(y,M)=y+2\sqrt{HM}, \qquad y_-(y,M)=y-2\sqrt{HM}.$$

Si l'on prend donc M assez petit et $4\sqrt{HM}$ inférieur à 1, on a la proposition suivante.

Pour qu'une série entière $G(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i z^i$ *à coefficients non négatifs représente une fonction entière et que l'on ait de plus*

$$G(z)=O(z^{H\log z}) \qquad (z\to+\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$a_i=O(e^{-\frac{i^2}{H}}) \qquad (i\to+\infty),$$

H désignant un nombre positif quelconque.

Pour que l'on ait de plus

$$G(z)=o(z^{H\log z}) \qquad (z\to+\infty),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$a_i=o(e^{-\frac{i^2}{H}}) \qquad (i\to+\infty).$$

Pour terminer cette deuxième partie, remarquons que notre théorie ne nous permet pas de reconnaître si la limite de

$$\frac{G(z)}{e^{g(\log z)}} \qquad (z\to e^{N_1})$$

ou plus généralement de

$$\frac{F(n)}{e^{g(n)}} \qquad (n \to N_1)$$

est bien déterminée ou non. Nous espérons pouvoir plus tard donner une réponse à ce problème.

III. Sur la méthode d'approximations successives de l'équation différentielle ordinaire.

Dans cette troisième partie, nous nous proposons tout d'abord d'appliquer des résultats obtenus dans la première partie à la démonstration d'un théorème qui se réduit au cas particulier de la première partie où $e^{g(n)}$ est égal asymptotiquement à $n!$. Nous appliquerons ensuite ce théorème à la méthode d'approximations successives de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre.

L'ensemble E et les fonctions $p(x)$, $r(x)$, $F(n)$ étant les mêmes que dans la première partie, nous écrirons cette fois $q(x)$ au lieu de $e^{r(x)}$. Nous avons alors

$$F(n) = \int_E p(x)[q(x)]^n dx.$$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant.

Pour que l'intégrale $F(n)$ soit finie pour tout n fini, et que l'on ait

$$F(n) = O\,(n\,!)$$

quand n tend vers $+\infty$ en parcourant tous les nombres entiers, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{[z<q(x)<z+K\sqrt{z}]} p(x)\frac{e^{q(x)}}{\sqrt{q(x)}}dx = O(1) \qquad (z \to +\infty),$$

K étant un nombre positif fixe arbitraire.

De plus pour que l'on ait alors

$$F(n) = o(n\,!),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{[z<q(x)<z+K_1\sqrt{z}]} p(x)\frac{e^{q(x)}}{\sqrt{q(x)}}dx = o\,(1) \qquad (z \to +\infty).$$

Notre démonstration va s'appuyer sur les deux premiers théorèmes de la première partie. Opérons le changement de variable

$$y=\log z,$$

et posons

$$h(\log z)=k(z).$$

Si nous désignons respectivement $e^{y_+(\log z,\, M)}$ et $e^{y_-(\log z,\, M)}$ par $z_+(z)$ et $z_-(z)$, M étant supposé être une fonction de y ou z tendant vers un nombre positif fini lorsque y ou z tend vers $+\infty$, $z_+(z)$ et $z_-(z)$ sont déterminés par les relations

$$\int_z^{z_+(z)}[k(w)-k(z)]\frac{dw}{w}=M, \qquad z_+(z)>z\,;$$

et

$$\int_z^{z_-(z)}[k(w)-k(z)]\frac{dw}{w}=M, \qquad z_-(z)<z.$$

Nous pouvons remplacer dans notre théorème $n\,!$ par la fonction $e^{g(n)}$ où

$$g(n)=n\log n-n+\frac{1}{2}\log n$$

d'après la formule de Stirling. Sa dérivée

$$g'(n)=\log n+\frac{1}{2n}$$

est continue et croissante pour $n\geqq\frac{1}{2}$ et par suite cette fonction $g(n)$ répond à la condition requise dans la première partie, si nous supposons $N_1=+\infty$.

Cela posé, la fonction $n=k(z)$ est définie par la relation

$$z=e^y=e^{g'(n)}$$

ou

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{2n}}.$$

Résolvons par rapport à $\frac{1}{n}$, on obtient

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{3}{8z^3}+\ldots\ldots,$$

et ainsi pour z suffisamment grand

$$k(z)=n=z\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{3}{8z^2}+\dots\right)^{-1}$$
$$=z\left(1-\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}+\dots\dots\right).$$

Pour évaluer l'intégrale précédente, écrivons $z+\Delta z$ au lieu de $z_+(z)$ ou $z_-(z)$; nous obtenons :

$$\int_z^{z+\Delta z}[k(w)-k(z)]\frac{dw}{w}$$
$$=\left[z-\frac{1}{2}\log z+\frac{1}{8z}+\dots\right]_z^{z+\Delta z}-z\left(1-\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}+\dots\right)\log\frac{z+\Delta z}{z}$$
$$=z\left[\frac{\Delta z}{z}-\left(1-\frac{1}{8z^2}+\dots\right)\log\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)\right]+\dots\dots,$$

en supprimant la partie infinitésimale par rapport à z grand. La partie entre crochets [ ] doit être infinitésimale, et par conséquent il faut que $\frac{\Delta z}{z}$ tend vers zéro quel que soit le signe de Δz. Donc l'intégrale cherchée sera asymptotiquement égale à

$$\frac{(\Delta z)^2}{2z}$$

et il suffit de prendre $\Delta z=\pm\kappa\sqrt{z}$ pour la faire tendre vers un nombre positif fini, κ étant un nombre positif quelconque.

Nous obtenons ainisi au moyen du premier théorème de la première partie la condition suffisante dans le cas présent :

$$I[\log(z-\kappa_1\sqrt{z})<r(x)<\log(z+\kappa_1\sqrt{z})]$$
$$=I[z-\kappa_1\sqrt{z}<q(x)<z+\kappa_1\sqrt{z}]=O(1) \text{ ou } o(1) \qquad (z\rightarrow+\infty),$$

selon les cas, κ_1 étant un nombre positif arbitraire ; et nous obtenons au moyen du deuxième théorème de la première partie, la condition nécessaire

$$I[c^{g'(n)}-\kappa_2\sqrt{c^{g'(n)}}<q(x)<c^{g'(n)}+\kappa_2\sqrt{c^{g'(n)}}]=O(1) \quad \text{ou} \quad o(1),$$

quand n tend vers $+\infty$ en parcourant seulement la suite des nombres entiers, κ_2 étant aussi un nombre positif arbitraire. Ces deux conditions montrent que si l'on a $\kappa_1<K<\kappa_2$ la condition nécessaire et suffisante est que

$$I[z<q(x)<z+K\sqrt{z}]=O(1) \text{ ou } o(1) \qquad (z\rightarrow+\infty),$$

z tendant vers $+\infty$ d'une façon continue et prenant toutes les valeurs réelles. D'ailleurs, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ étant arbitraires, K est aussi arbitraire.

Pour démontrer que cette condition est nécessaire, remarquons que $e^{g'(n)}$ croît indéfiniment avec n mais que le rapport des valeurs consecutives $\dfrac{e^{g'(n+1)}}{e^{g'(n)}}$ tend vers 1 pour n infini. Par conséquent, si nous faisons correspondre à chaque valeur de la variable z un entier n tel que $e^{g'(n)}$ soit le plus voisin de z, cet entier n grandit indéfiniment avec z et la valeur correspondante de $e^{g'(n)}$ devient asymptotiquement égale à z. Donc pour des valeurs suffisamment grandes de z et de n, l'ensemble $[e^{g'(n)}-\varkappa_2\sqrt{e^{g'(n)}}<q(x)<e^{g'(n)}+\varkappa_2\sqrt{e^{g'(n)}}]$ contient évidemment l'ensemble $[z<q(x)<z+K\sqrt{z}]$. Par suite on en conclut que la condition est nécessaire. On verrait encore plus facilement que la condition est suffisante, et nous n'insisterons pas sur ce point.

Cela posé, il nous reste pour achever notre démonstration, à calculer l'intégrale I. Nous pouvons supprimer tout facteur de l'expression à intégrer qui tend vers une limite finie et positive. Dans l'expression à intégrer pour obtenir I l'exposant de e est

$$\begin{aligned}
&r(x)h[r(x)]-g\{h[r(x)]\}\\
&=\log q(x).\, k[q(x)]-g\{k[q(x)]\}\\
&=\log q(x).\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\ldots\ldots\right)\\
&-\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\ldots\ldots\right)\log\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\ldots\ldots\right)\\
&+\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\ldots\ldots\right)-\frac{1}{2}\log\left(q(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8q(x)}+\ldots\ldots\right)\\
&=\log q(x).\, q(x)-\frac{1}{2}\log q(x)+\ldots\ldots\\
&-\left(q(x)-\frac{1}{2}\right)\log q(x)+\ldots\ldots+q(x)+\ldots\ldots-\frac{1}{2}\log q(x)+\ldots\ldots\\
&=q(x)-\frac{1}{2}\log q(x)+\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

en supprimant la partie qui a une limite finie et déterminée pour $q(x)\to+\infty$. Nous arrivons ainsi à la condition

$$\int_{[z<q(x)<z+K\sqrt{z}]} p(x)\frac{e^{q(x)}}{\sqrt{q(x)}}dx=O(1) \quad \text{ou} \quad o(1) \qquad (z\to+\infty).$$

(C. q. f. d.)

Nous allons établir maintenant, en nous appuyant sur ce théorème, quelques propositions qui nous aiderons dans la méthode d'approximations successives.

Soient $\varphi'(x)$ et $\nu'(x)$ deux fonctions non négatives définies dans l'intervalle $\alpha < x \leqq \beta$ et sommable dans l'intervalle $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta$ pour tout α_1 tel que $\alpha < \alpha_1 \leqq \beta$. Soit $\nu(x)$ une fonction primitive de $\nu'(x)$ et également définie dans l'intervalle $\alpha < x \leqq \beta$.

Déterminons une suite infinie de fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots\ldots$$

par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = \int_\alpha^x \varphi'(t)dt, \\ \varphi_{i+1}(x) = \int_\alpha^x \varphi_i(t)\nu'(t)dt \qquad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots) \end{cases}$$

Cela n'est pas toujours possible ; mais si l'on a défini $\varphi_i(x)$ pour une certaine valeur de x telle que $\alpha < x \leqq \beta$, au moyen des i premières formules, il est de même pour une valeur quelconque de x dans l'intervalle $\alpha < x \leqq \beta$, et la fonction $\varphi_i(x)$ est définie par l'égalité

$$(7)\qquad \varphi_i(x) = \int_\alpha^x \varphi'(t) \frac{[\nu(x)-\nu(t)]^i}{i!} dt,$$

l'intégrale du second membre ayant alors une valeur finie. Réciproquement si cette intégrale a une valeur finie pour une certaine valeur de x telle que $\alpha < x \leqq \beta$, il en est de même pour toute valeur de x telle que $\alpha < x \leqq \beta$ et il existe une fonction $\varphi_i(x)$, telle qu'elle est définie en (6) et satisfaisant à l'égalité (7). Nous avons déjà démontré l'égalité (7) pour le cas où $\varphi'(x)$ et $\nu'(x)$ sont sommables dans l'intervalle $\alpha < x \leqq \beta$ tout entier ; pour la démontrer dans le cas général il suffit de remplacer $\varphi'(x)$ par la fonction $\Phi(x, \alpha_1)$ contenant un paramètre α_1, et telle que

$$\Phi(x, \alpha_1) = \begin{cases} 0 & (\alpha < x < \alpha_1), \\ \varphi'(x) & (\alpha_1 \leqq x \leqq \beta), \end{cases}$$

le paramètre α_1 tendant vers α par valeurs décroissantes.

L'existence et la limite de la suite $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots\ldots$ de (6) dépendent donc de celles de l'intégrale du second membre de (7), et cette intégrale appartient à l'espèce d'intégrales que nous avons traitées au début de cette troisième partie. L'ensemble E est maintenant l'intervalle $\alpha < t \leqq x$, et l'on a respectivement

$$N_1 = +\infty, \ n = i, \ p(t) = \varphi(t), \ q(t) = e^{r(t)} = \nu(x) - \nu(t),$$

x étant un paramètre. Nous avons supposé précédemment que $r(t) \geqq 0$ et $q(t) \geqq 1$, tandis qu'ici nous avons seulement $q(t) \geqq 0$; mais cela n'empêche rien d'appliquer le théorème au cas présent, et nous pouvons trouver la condition nécessaire et suffisante de l'existence de la suite $\varphi_0(x), \ \varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots\ldots$ tendant vers zéro quand i augmente jusqu'à $+\infty$. Dans le cas où $\nu'(x)$ est sommable dans l'intervalle $\alpha < x \leqq \beta$ tout entier, la condition cherchée est évidemment que $\varphi'(x)$ soit sommable dans $\alpha < x \leqq \beta$; donc laissant ce cas de côté nous supposerons dorénavant que

$$\lim_{x \to \alpha + 0} [-\nu(x)] = +\infty.$$

Le théorème précédent nous montre tout d'abord que pour que toutes les fonctions $\varphi_0(x), \ \varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots\ldots$ existent et que l'on ait

$$\lim_{i \to +\infty} \varphi_i(x) = 0$$

en un point x tel que $\alpha < x \leqq \beta$, il faut et il suffit que

$$\lim_{t_0 \to \alpha + 0} \int_{t_1}^{t_0} \varphi'(t) \frac{e^{\nu(x) - \nu(t)}}{\sqrt{\nu(x) - \nu(t)}} dt = 0,$$

t_0 étant pris au voisinage de α et t_1 étant la plus petite valeur pour laquelle on ait

$$\nu(x) - \nu(t_1) = \nu(x) - \nu(t_0) + K\sqrt{\nu(x) - \nu(t_0)}\,,$$

K étant un nombre positif arbitraire.

Nous pouvons remplacer cette condition par l'expression

$$\lim_{t_0 \to \alpha + 0} \int_{t_1}^{t_0} \varphi'(t) \frac{e^{-\nu(t)}}{\sqrt{-\nu(t)}} dt = 0,$$

puisque $-\nu(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers α.

De plus en faisant t_1 une fonction de t_0 on peut écrire l'équation

$$-\nu(t_1) = -\nu(t_0) + K'\sqrt{-\nu(t_0)}\,,$$

où K' est aussi un nombre positif quelconque mais fixe. On peut démontrer cette équation en choisissant le nombre K dans l'équation précédente respectivement supérieur ou inférieur à K' et montrer par là la condition est nécessaire et suffisante. La nouvelle expression des conditions ne contient plus l'abscisse x du point pour lequel nous considérons la limite de $\varphi_i(x)$ avec $i\to+\infty$; la propriété ne dépend donc pas de x dans l'intervalle $\alpha<x\leqq\beta$, c'est-à-dire que si elle est vérifiée en un point x, elle le sera aussi pour chaque point x tel que $\alpha<x\leqq\beta$. En résumé, en écrivant x au lieu de t, et K au lieu de K', nous obtenons un lemme qui sera utile tout à l'heure.

Pour que toutes les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$...... *existent, et que l'on ait*

$$\lim_{i\to+\infty}\varphi_i(x)=0$$

en un point x *tel que* $\alpha<x\leqq\beta$, *ou, ce qui revient au même, en tous les points de l'intervalle* $\alpha<x\leqq\beta$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{x_0\to\alpha+0}\int_{x_1}^{x_0}\varphi'(x)\frac{e^{-\nu(x)}}{\sqrt{-\nu(x)}}dx=0,$$

x_0 *étant pris au voisinage de* α *et* x_1 *étant la plus petite valeur pour laquelle*

$$-\nu(x_1)=-\nu(x_0)+K\sqrt{-\nu(x_0)}\,,$$

K *étant un nombre positif arbitraire.*

Cette condition est équivalente à

$$\lim_{x_0\to\alpha+0}\int_{x_1}^{x_0}\varphi(x)\nu'(x)\frac{e^{-\nu(x)}}{\sqrt{-\nu(x)}}dx=0,$$

si l'on admet l'hypothèse de $\varphi'(x)$ sommable dans $\alpha<x\leqq\beta$. Pour le vérifier il suffit de supposer que nous sommes partis de la fonction $\varphi(x)\nu'(x)$ au lieu de $\varphi'(x)$ dans la formation de la suite par (6). Ceci étant établi, la condition peut encore être remplacée par

$$\lim_{x_0\to\alpha+0}\frac{1}{\sqrt{-\nu(x_0)}}\int_{x_1}^{x_0}\varphi(x)\nu'(x)e^{-\nu(x)}dx=0,$$

en vertu de la condition relative à x_1. En appliquant le théorème de la moyenne de l'intégrale, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{-\nu(x_0)}}\int_{x_1}^{x_0}\varphi(x)\nu'(x)e^{-\nu(x)}dx=\frac{\varphi(\xi)e^{-\nu(\xi)}}{\sqrt{-\nu(x_0)}}\int_{x_0}^{x_1}\nu'(x)dx\quad(x_1\leqq\xi\leqq x_0)$$

$$=\varphi(\xi)e^{-\nu(\xi)}.\frac{\nu(x_0)-\nu(x_1)}{\sqrt{-\nu(x_0)}}$$

$$=\varphi(\xi)e^{-\nu(\xi)}.\ K.$$

Par conséquent, au lieu d'une condition nécessaire et suffisante, nous avons seulement, comme condition nécessaire,

$$\varliminf_{x \to \alpha+0} \varphi(x)e^{-\nu(x)}=0,$$

et, comme condition suffisante,

$$\lim_{x \to \alpha+0} \varphi(x)e^{-\nu(x)}=0.$$

Remarquons que l'on peut démontrer ces deux conditions par d'autres voies. La première se démontre immédiatment par l'absurde en supposant que $\varphi(x)e^{-\nu(x)}$ soit toujours supérieur à un nombre positif fixe et en concluant de là que $\varphi_i(x)$ ne tend pas vers zéro. La seconde condition, ainsi que la condition pour la convergence des approximations successives, peut être obtenue par une méthode féconde de M. Nagumo[1].

Tous ces préliminaires vont nous permettre maintenant de considérer l'équation différentielle ordinaire

$$y(x)=\int_0^x f[x, y(x)]dx,$$

où la fonction inconnue est $y(x)$. Nous faisons sur $f(x, y)$ les hypothèses suivantes. Soient $S(x)$ et $T(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$ et telles que l'on ait $S(x) < T(x)$ pour x positif; et soit $f(x, y)$ une fonction finie dans le domaine $D[0 \leqq x \leqq a, S(x) \leqq y \leqq T(x)]$, $f(x, y)$ est une fonction continue de y si l'on fixe x et une fonction mesurable de x si l'on fixe y. Supposons de plus que les bornes inférieure et supérieure de $f(x, y)$ quand on fait varier y entre $S(x)$ et $T(x)$, x étant fixe, soient sommables, comme fonctions de x, dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$; et en les écrivant respectivement $U'(x)$ et $V'(x)$ et en posant

$$U(x)=\int_0^x U'(x)dx, \qquad V(x)=\int_0^x V'(x)dx,$$

supposons que l'on ait dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$

$$S(x) \leqq U(x) \leqq V(x) \leqq T(x).$$

Posons enfin pour simplifier l'écriture

$$W'(x)=V'(x)-U'(x), \quad W(x)=\int_0^x W'(x)dx.$$

1. Japanese Jour. Math., **7**. p. 143 (1930).

Dans le cas ordinaire nous pouvons considérer que $f(x, y)$ satisfait à ces conditions en restreignant convenablement le domaine D; tel est par exemple le cas où $f(x, y)$ est continue au voisinage de l'origine; tandis que nous ne pouvons pas connaître pratiquement les valeurs exactes de $U'(x)$, $V'(x)$, $U(x)$ et $V(x)$; néanmoins cela ne saurait nous empêcher d'arriver à quelques résultats importants.

Faisons maintenant une hypothèse essentielle à notre théorie. Désignons par $N(x)$ la borne supérieure de la quantité

$$\left| \frac{f(x, y)-f(x, \bar{y})}{y-\bar{y}} \right|,$$

quand on fait varier, en laissant x étant fixe, y et $\bar{y}$ de toutes les manières compatibles avec $S(x) \leqq \bar{y} < y \leqq T(x)$. $N(x)$ est alors une fonction mesurable comme on le démontrera aisément, ainsi que la fonction plus générale $X'(x)$ que nous introduirons tout à l'heure. Cela posé, nous faisons l'hypothèse que $N(x)$ *est sommable dans* $\varepsilon \leqq x \leqq a$ *pour tout nombre petit positif* ε. Le cas où $N(x)$ est sommable dans $0 < x \leqq a$ tout entier ne fait plus de difficulté, et nous laisserons ce cas de côté dans la suite. En désignant par $L(x)$ une fonction primitive quelconque de $N(x)$, nous avons donc toujours dès maintenant

$$\lim_{x \to +0} L(x) = -\infty.$$

Ces hypothèses posées, prenons une fonction arbitraire de x $y_0(x)$ mesurable dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$ et telle que

$$S(x) \leqq y_0(x) \leqq T(x).$$

Déterminons ensuite la suite de fonctions $y_0(x)$, $y_1(x)$,...... par les formules

$$y_{i+1}(x) = \int_0^x f[x, y_i(x)]dx \qquad (i=0, 1, 2......).$$

Ces déterminations sont possibles en vertu des hypothèses que nous avons faites et ces fonctions sont toutes contenues dans D pour $0 \leqq x \leqq a$.

La suite des fonctions $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$,...... *converge alors vers une solution* $y(x)$ *de notre équation et* $y(x)$ *est la seule solution contenue dans D, si l'on a*

$$\lim_{x_0 \to +0} \int_{x_1}^{x_0} W'(x) \frac{e^{-L(x)}}{\sqrt{-L(x)}} dx = 0,$$

x_1 *étant le plus petit nombre tel que*

$$-L(x_1)=-L(x_0)+K\sqrt{-L(x_0)}\ ,$$

K *étant un nombre positif arbitraire.*

Cette proposition découle immédiatement du lemme précédent. On a manifestement pour un entier positif quelconque p,

$$|y_0(x)-y_p(x)|\leqq\int_0^x W'(x)dx=W(x),$$

et par conséquent

$$|y_1(x)-y_{1+p}(x)|\leqq\int_0^x|y_0(x)-y_p(x)|N(x)dx=\int_0^x W(x)N(x)dx$$

et ainsi de suite successivement. Donc en posant $\alpha=0$, $\beta=a$, $\varphi'(x)=W'(x)$ et $\nu'(x)=N(x)$ dans le lemme, nous avons indépendemment de p

$$|y_i(x)-y_{i+p}(x)|\leqq\varphi_i(x)\qquad(i=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

et la condition énoncée ci-dessus entraîne

$$\lim_{i\to+\infty}\varphi_i(x)=0$$

pour $0<x\leqq a$. Donc la suite $y_0(x)$, $y_1(x)$,...... converge et la limite $y(x)$ est une intégrale de notre équation. On démontre de même l'unicité de la solution en partant de l'inégalité

$$|y(x)-y_0(x)|\leqq\int_0^x W'(x)dx.$$

(C. q. f. d.)

Cette condition contient comme cas particulier la condition

$$\lim_{x\to+0}e^{-L(x)}.\ W(x)=0$$

comme nous l'avons remarqué après le lemme précédent. Par la même occasion nous avons montré aussi que notre condition entraîne nécessairement

$$\varliminf_{x\to+0}e^{-L(x)}.\ W(x)=0, \tag{8}$$

ce qui est, en réalité, une condition suffisante pour que la solution de notre équation soit unique dans le domaine D. Nous retrouverons cette condition dans la suite par raisonnement très simple dont la primeur revient à M. Tonelli et que nous précisons quelque peu. La condition que nous obtenons par la méthode d'approximations successives n'est donc pas essentiellement une condition suffisante très nouvelle de l'unicité de la solution de l'équation différentielle,

Faisons sur $f(x, y)$ les mêmes hypothèses que précédemment sauf en ce qui concerne $N(x)$, que nous remplaçons comme nous allons voir. Introduisons une fonction continue et non décroissante $Y(z)$ définie pour $z \geqq 0$ et telle que l'on ait

$$Y(0)=0, \qquad Y(z)>0 \quad (z>0),$$

l'intégrale $\int_0^x \frac{dz}{Y(z)}$ n'étant pas finie. Si l'on désigne par $Z(z)$ une fonction primitive de $\frac{1}{Y(z)}$, on a alors

$$\lim_{z \to +0} Z(z) = -\infty.$$

Considérons alors la borne supérieure de

$$\frac{f(x, y)-f(x, \bar{y})}{Y(y-\bar{y})},$$

quand, x étant fixe, on donne à y et $\bar{y}$ toutes les valeurs possibles, compatibles avec $S(x) \leqq \bar{y} < y \leqq T(x)$; et désignons cette borne par $X'(x)$. Cette fonction $X'(x)$ est mesurable comme $N(x)$ et l'on a

$$\frac{f(x, y)-f(x, \bar{y})}{Y(y-\bar{y})} \leqq X'(x).$$

Nous adopterons ici l'hypothèse que $X'(x)$ *est sommable*[1] *dans l'intervalle* $\varepsilon \leqq x \leqq a$ *pour tout nombre petit positif* ε.

Supposons qu'il y ait dans D deux solutions distinctes $y(x)$ et $\bar{y}(x)$ de notre équation et $y(x_1) > \bar{y}(x_1)$ en un certain point x_1 positif. Au voisinage de ce point on a l'inégalité

$$\frac{f[x, y(x)]-f[x, \bar{y}(x)]}{Y[y(x)-\bar{y}(x)]} - X'(x) \leqq 0,$$

qui est vérifiée jusqu'à ce que x arrive en un point x_2 où l'on a

1. On pourrait dire au lieu de "sommable" "totalisable". Mais il est inutile de faire ce changement parce que l'hypothèse que $X'(x)$ soit totalisable entraîne nécessairement sa sommabilité. Nous avons, en effet,

$$\frac{f[x, T(x)]-f[x, S(x)]}{Y[T(x)-S(x)]} - X'(x) \leqq 0,$$

où le premier terme du premier membre est sommable dans $\varepsilon \leqq x \leqq a$. Ce premier membre, étant totalisable et toujours du même signe, doit donc être sommable et par conséquent $X'(x)$ l'est aussi.

$y(x_2)=\bar{y}(x_2)$. Mais le premier membre est la dérivée d'une fonction absolument continue

$$Z[y(x)-\bar{y}(x)]-X(x),$$

qui doit donc être de plus en plus grand à mesure que la variable x s'approche de l'origine. D'autre part cette fonction tend, par hypothèse, vers $-\infty$ quand x tend en décroissant vers le point x_2. Par conséquent entre o et x_1 il n'y a pas de point x_2 autre que l'origine et cette fonction doit y être bornée inférieurement, c'est-à-dire que l'on a

$$\varliminf_{x\to+0}\ \{Z[y(x)-\bar{y}(x)]-X(x)\}\neq-\infty.$$

Puisque $0<y(x)-\bar{y}(x)\leqq W(x)$, nous ne pouvons pas avoir, a fortiori,

$$\boxed{\varliminf_{x\to+0}\{Z[W(x)]-X(x)\}=-\infty.}$$

Nous concluons de là que si cette condition se réalise la solution doit être unique. Nous arrivons ainsi à une condition suffisante de l'unicité de la solution de notre équation.

Cette condition est satisfaite si $X'(x)$ est sommable dans $0<x\leqq a$. C'est la condition de M. Tonelli.

En outre, si nous posons en particulier

$$Y(z)=z, \qquad Z(z)=\log z,$$

nous avons la condition d'unicité

$$\varliminf_{x\to+0} e^{-X(x)}.\ W(x)=0,$$

qui contient la condition (8) énoncée plus haut car on a

$$|X'(x)|\leqq N(x).$$

Cette condition contient aussi toutes les conditions que nous avons énoncées dans notre mémoire précédent. Par exemple si $f(x, y)$ est continue à l'origine, on peut prendre $S(x)$ et $T(x)$ de manière qu'elles s'annulent pour $x=0$, et cependent que toutes les solutions possibles soient contenues dans D; on a alors

$$W(x)=o(x) \qquad (x\to+0),$$

grâce au théorème de la moyenne de l'intégrale. Donc il suffit pour l'unicité de la solution que la limite

$$\varliminf_{x\to+0}\ e^{-X(x)}.\ x$$

soit finie.

Nous tenons à la fin de ce mémoire à remercier M. le professeur T. Matsumoto, qui a bien voulu lire notre manuscrit et nous aider par de nombreuses suggestions dont nous avons tiré grand profit.