Über die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe einen Kreisbereich auf den schlichten konvexen oder sternigen Bereich abbildet

von

Akira Kobori

(Eingegangen am 8. Juli, 1932)

Es ist schon bekannt, dass eine im Kreise $|z|<R$ reguläre und *schlichte* Potenzreihe der Form

$$(1) \qquad f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

den Kreis $|z|<R$ auf den in Bezug auf den Nullpunkt sternigen bezw. konvexen Bereich dann und nur dann abbildet, wenn sie der Bedingung

$$(2) \qquad \Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

bezw. der Bedingung

$$(3) \qquad 1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

genügt.

Bezüglich dieser Tatsache also entsteht es die Frage:

Ist der Bildbereich vom Kreisbereiche $|z|<R$ schlicht, *wenn die in diesem Kreisbereiche reguläre Potenzreihe der Form (1) der Bedingung (2) oder (3) genügt?*

Die vorliegende Arbeit hat zum Hauptziele dieses Problem zu lösen.

I. Der Hilfssatz

Erstens möchte ich einen Hilfssatz aufstellen und beweisen, der im folgenden Zeilen eine wichtige Rolle spielt. Der Satz lautet:

Genügt die Potenzreihe

$$F(z)=A_0+A_1z+\ldots\ldots+A_nz^n+\ldots\ldots,$$

die im Kreise $|z|<R$ *regulär ist, der Bedingung*

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}>-K,$$

wo K *eine positive und endliche Zahl bedeutet, so ist*

$$F(z)\neq 0$$

in $0\leqq|z|<R$ *bezw.* $0<|z|<R$, *wenn* $A_0\neq 0$ *bezw.* $A_0=0$ *ist.*

Beweis. (i) Der Fall, wo $A_0\neq 0$ ist.

Wäre α eine Nullstelle von $F(z)$ im Kreise $|z|<R$, so wird der Punkt $z=\alpha$ ein einfacher Pol von $\dfrac{F'(z)}{F(z)}$. Daher wäre $z=\alpha$ eine Nullstelle von der Ordnung m, so kann man schreiben:

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{m}{z-\alpha}+G(z)$$

wo $m\geqq 1$ und $G(z)$ regulär in der Umgebung von $z=\alpha$ ist.

So folgte, dass

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{mz}{z-\alpha}+zG(z)$$

ist. Daher könnte man schreiben:

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=m\Re\frac{z}{z-\alpha}+\Re zG(z).$$

Erstens sei α ein Punkt, der nicht auf der imaginären Achse ist. In diesem Falle nimmt man als z den Punkt auf der Gerade l, die von dem Punkte $z=\alpha$ parallel zur reellen Achse gezogen ist.

Es sei

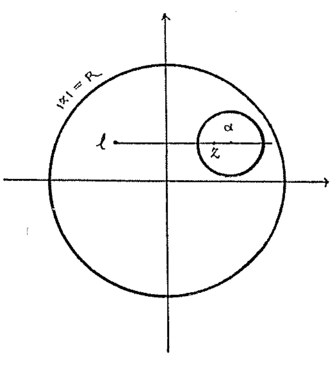
$$\alpha=a+ib \qquad a\neq 0.$$

Da jeder Punkt auf der Gerade l von der Form

$$z=x+ib$$

ist, so hat man die Beziehung

Fig. 1



$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{m}{x-a}+\Re zG(z).$$

Es sei z an der linken Seite von α und ausserdem im Kreise liegt, dessen Radius $\dfrac{|a|}{1+H}$ und Mittelpunkt der Punkt α ist, wo H eine positive Zahl, die wie gross sein mag. Dann ist

$$\frac{mx}{x-a}<-mH.$$

Daraus folgt, dass, wenn z in dieser Weise nach α konvergiert,

$$\lim_{z\to\alpha}\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=-\infty$$

ist, was mit der Voraussetzung, dass

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}>-K \quad (K:\ \text{positiv und endlich})$$

ist, im Widerspruch steht.

Zweitens sei α ein Punkt auf der imaginären Achse. In diesem Falle nimmt man als z die Punkten, die auf der imaginären Achse und unterhalb von α liegen.

Es sei

$$a=ib \quad b\neq 0.$$

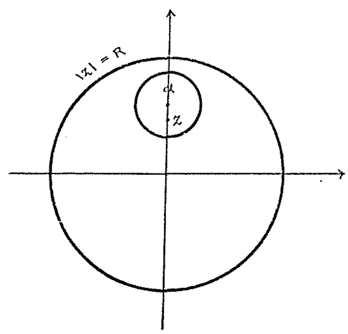
Da jeder Punkt auf der imaginären Achse von der Form

$$z=iy$$

ist, hat man die Beziehung

$$\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{my}{y-b}+\Re zG(z).$$

Fig. 2



Daher kann man schliessen, wie oben gesagt ist, dass, wenn man z auf der imaginären Achse von Unten nach α konvergieren lässt,

$$\lim_{z\to\alpha}\Re\frac{zF'(z)}{F(z)}=-\infty$$

ist, was auch der Voraussetzung widerspricht.

So ist es bewiesen, dass

$$F(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0\leqq z<R$$

ist.

(ii) Der Fall, wo $A_0=0$ ist.

In diesem Falle ist die obigen Beweismethode auch gültig, so kann man schliessen ohne weiteres, dass

$$F(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0<|z|<R$$

ist.

Der fragliche Punkt aber ist der Koordinatenanfangspunkt. Es ist augenscheinlich, dass dieser Punkt der Nullstelle von $F(z)$ ist, weil $A_0=0$ ist.

In diesem Falle ist also

$$F(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0<|z|<R.$$

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

II. Der Hauptsatz

Zuerst beweise ich den Satz, der ein Teil von dem Hauptsatze ist. Der Satz lautet:

Es sei

$$f(z)=z+a_2z^2+\dots\dots+a_nz^n+\dots\dots$$

die Potenzreihe, die die Eigenschaft

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

besitzt, so bildet $f(z)$ den Kreisbereich $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab.

Beweis. Nach dem Hilfssatze ist

$$f(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad 0<|z|<R.$$

Und an dem Koordinatenanfangspunkte ist

$$\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=0}=f'(0)=1,$$

folglich ist

$$\frac{f(z)}{z}\neq 0 \quad \text{in} \quad |z|<R.$$

Es sei $z=R'e^{i\vartheta}(R'<R)$, so ist der Voraussetzung nach

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\arg f(R'e^{i\vartheta})=\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0.$$

Damit läuft $f(z)$ auf der Bildkurve von der Kreisperipherie $|z|=R'$ im positiven Sinne[1], wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne umläuft. Da ferner

$$\arg f(z) = \arg z + \arg \frac{f(z)}{z}$$

ist, so ist die Variation von $\arg f(z)$ gleich 2π, wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne umläuft, weil die Variation von $\arg \frac{f(z)}{z}$ Null ist.

Daher läuft $f(z)$ auf der Bildkurve im positiven Sinne einmal um, wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne einmal umläuft. Mit anderen Wort ist die Kreisperipherie $|z| = R'$ durch $f(z)$ ein-eindeutig auf eine geschlossene Kurve abgebildet. Daher nach dem von Darboux[2] herrührenden Satze besteht die Ein-eindeutigkeit auch im Innern.

Da R' beliebige positive Zahl ist, die kleiner als R ist, so kann man R' so gross wie möglich dem R näher kommen lassen. Damit bildet $f(z)$ den Kreisbereich $|z| < R$ auf den schlichten Bereich ab, was zu beweisen war.

Zweitens beschäftige ich mich mit dem Satze, der auch den Hauptsatz zusammemsetzt. Der Satz lautet:

Wenn die im Kreise $|z| < R$ reguläre Potenzreihe

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots\dots + a_n z^n + \dots\dots$$

die Eigenschaft

$$1 + \Re \frac{z f''(z)}{f'(z)} > 0 \quad \textit{für} \quad |z| < R$$

besitzt, so bildet $f(z)$ den Kreisbereich $|z| < R$ auf den schlichten Bereich ab.

Beweis. Da

$$f'(0) = 1$$

ist, so ist nach dem Hilfssatze

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{in} \quad |z| < R.$$

Hier betrachte ich die Potenzreihe

---

1. Unter „positiver Sinn" versteht man die Fortschreitungsrichtung vom Punkte, der auf der Randkurve des Bereiches so läuft, dass er den Bereich stets zu rechts sieht.

2. Vgl. W. F. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie, I 5. Aufl. S. 397.

$$G(z)=zf'(z),$$

die regulär im Kreisbereiche $|z|<R$ und nicht Null für $0<|z|<R$ ist. Ferner ist

$$\Re\frac{zG'(z)}{G(z)}=1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R,$$

so bildet $G(z)$ nach dem ersten Satze den Kreisbereich $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab.

Andererseits im Bildpunkte $f(R'e^{i\vartheta})$ vom Punkte $z=R'e^{i\vartheta}$ der Kreisperipherie $|z|=R'$ (wo $R'<R$ ist) macht die Tangente der Bildkurve mit der reellen Achse den Winkel

$$\psi=\frac{\pi}{2}+\vartheta+\arg f'(R'e^{i\vartheta})\,;$$

denn, wenn man setzt

$$z=x+iy$$

so wird

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

daher ist nach dem bekannten Formel

$$\tan\psi=\frac{dQ}{dP}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\,\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial P}{\partial y}\,\dfrac{dy}{dx}}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\vartheta\right)}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\vartheta\right)},$$

da

$$\frac{dy}{dx}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)$$

ist und $P(x,y)$, $Q(x,y)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. So ist

$$\tan\psi=\frac{\tan\arg f'(z)+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\vartheta\right)}{1-\tan\arg f'(z)\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\vartheta\right)}$$

$$=\tan\left\{\frac{\pi}{2}+\vartheta+\arg f'(R'e^{i\vartheta})\right\}.$$

Da nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}=1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

ist, so bewegt der Bildpunkt $f(R'e^{i\vartheta})$ im Sinne, wo der Winkel ψ anwachsen,——diesen Sinn heisse ich fortan der positive Sinn der f-Bildkurve,——wenn z auf der Kreisperipherie im positiven Sinne umläuft.

Der Winkel ψ ändert stetig mit dem Bildpunkte; denn, wenn man z so darstellt, wie

$$z=x(\vartheta)+iy(\vartheta) \qquad 0\leqq\vartheta<2\pi,$$

so wird $f(z)$ die Form

$$f(z)=P(\vartheta)+iQ(\vartheta)$$

nehmen.

Nun ist

$$f'(z)\neq 0 \quad \text{für} \quad |z|<R,$$

so verschwinden $\frac{dP}{d\vartheta}$ und $\frac{dQ}{d\vartheta}$ keinesweges gleichzeitig. Es ist $\frac{dx}{d\vartheta}$ und $\frac{dy}{d\vartheta}$ regulär im Intervall $0\leqq\vartheta<2\pi$, so sind $\frac{dP}{d\vartheta}$ und $\frac{dQ}{d\vartheta}$ auch regulär in demselben Intervalle. Daher besteht die Bildkurve nur aus regulären Bogen. Daraus folgt unmittelbar, dass, wenn ϑ von Null bis 2π anwachst, so $f(z)$ ein geschlossene Kurve darstellt und der Winkel ψ mit dem Bildpunkt $f(z)$ stetig ändert.

Diese Beweisführung aber ist nicht genug zu erkennen, ob die Kurve einfach ist. Daher beweise ich im folgenden Zeilen, dass die Bildkurve eine geschlossene einfache Kurve ist.

Bevor ich zum Beweise übergehe mache ich eine Vorbereitung dazu.

Wie obig bewiesen ist, ist die Potenzreihe $G(z)=zf'(z)$ schlicht im Kreise $|z|<R$, daher ist

$$F(z)=iG(z)=izf'(z)$$

auch schlicht in demselben Kreisbereiche, und ausserdem ist am Bildpunkte vom Punkte $z=R'e^{i\vartheta}$

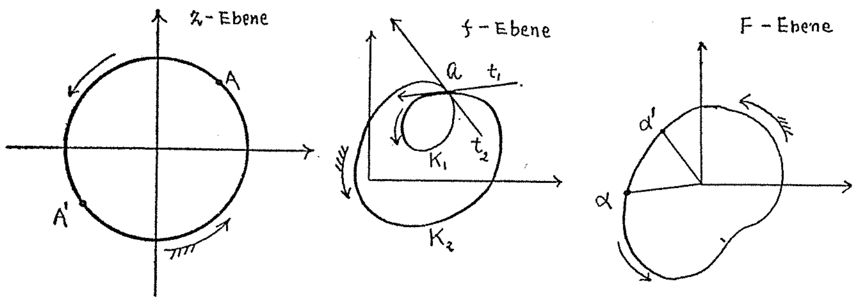
$$\arg F(R'e^{i\vartheta})=\frac{\pi}{2}+\vartheta+\arg f'(R'e^{i\vartheta}).$$

Folglich ist jeder Radiusvektor der F-Ebene parallel zur Tangente am entsprechenden Bildpunkte der f-Ebene.

Nun gehe ich zum Beweise über.

Wäre erstens das f-Bild von der Kreisperipherie $|z|=R'$ einen Doppelpunkt a besitzen, dessen Urbildpunkten A und A' seien. Dann

Fig. 3



im F-Bilde entspricht dem Punkte A der Punkt α, dessen Radiusvektor zur Tangente t_1 parallel ist.

Wenn der Punkt z auf dem Kreisperipherie $|z|=R'$ im positiven Sinne von A bis A' durchläuft, so umläuft $f(z)$ auf K_1 im positiven Sinne einmal und nimmt die Tangente die Lage t_2. Daher im F-Bilde bewegt der Bildpunkt von α nach α' im positiven Sinne, wo der Radiusvektor zur Tangente t_2 parallel ist.

Wenn z ferner von A' bis A im positiven Sinne durchläuft, so umläuft $f(z)$ einmal auf K_2 von a und wenn der Bildpunkt zu a zurückkehrt, nimmt die Tangente die Lage t_1. Daher im F-Bilde muss der Bildpunkt von α' bis α nach einmaligen Umlaufe auf der Bildkurve bewegen.

Daher besteht keine Ein-eindeutigkeit zwischen der Kreisperipherie $|z|=R'$ und ihre Bildkurve durch $F(z)$, was widerspricht die Tatsache, dass $F(z)$ schlicht im Kreise $|z|<R$ ist.

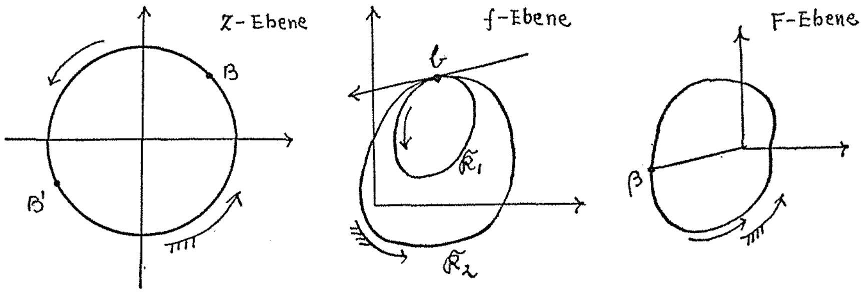
Wäre nun das f-Bild von der Kreisperipherie $|z|=R'$ solchen Doppelpunkt b besitzen, als an dem die zwei Tangenten zusammenfallen.

Es sei B und B' Urbildpunkten von b.

Wenn z vom Punkte B im positiven Sinne bis B' durchläuft, so läuft $f(z)$ von b z. B. auf $\mathfrak{K}_1$ einmal im positiven Sinne. Daher im F-Bilde läuft $F(z)$ einmal von β aus auf der Bildkurve im positiven Sinne um, wo der Radiusvektor zur Tangente am Punkte b parallel ist.

Wenn z ferner von B' aus bis B auf der Kreisperipherie $|z|=R'$ im positiven Sinne bewegt, so läuft $f(z)$ auf $\mathfrak{K}_2$ im positiven Sinne einmal um, damit im F-Bilde läuft $F(z)$ in demselben Sinne noch einmal. Daher existiert zwischen der Kreisperipherie $|z|=R'$ und dessen F-Bilde keine Ein-eindeutigkeit, was mit der Eigenschaft von $F(z)$ im Widerspruch steht.

Fig. 4



Hiermit kann man schliessen, dass das f–Bild von der Kreisperipherie eine einfach geschlossene Kurve ist. Ferner ist die Abbildung ein-eindeutig; denn, wäre die Abbilbung nicht ein-eindeutig, so müsste $f(z)$ auf der Bildkurve mehr als einmal im positiven Sinne umlaufen, daher läuft $F(z)$ auf der Bildkurve mehr als einmal um, was widerspricht der Schlichtheit von $F(z)$.

Man kann in ähnlicher Weise die Einfachheit beweisen, wenn man annahme, dass die Bildkurve mehr als einen Doppelpunkt besitze.

Daher bildet $f(z)$ den Kreisperipherie $|z|=R'$ ein-eindeutig auf die einfach geschlossene Kurve ab. Da ferner R' eine positive Zahl ist, die kleiner als R ist, so kann man R' so gross wie möglich dem R näher kommen lassen. Damit bildet $f(z)$ den Kreis $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab, was zu beweisen war.

Wenn man die obigen Sätze zusammenfasst und wenn man die geometrische Bedeutung der Ausdrücke (2) und (3), die ich im obigen Zeilen gezeigt habe, im Betracht zieht, so kann man folgendermass behaupten:

Die im Kreise $|z|<R$ reguläre Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

bildet den Kreisbereich $|z|<R$ auf den schlichten Bereich ab und weiter ist der Bildbereich sternig bezw. konvex, wenn die Potenzreihe die Eigenschaft

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \textit{für} \quad |z|<R$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

besitzt.

Damit ist DER HAUPTSATZ bewiesen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine in einem Kreisbereiche $|z|<R$ *reguläre Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

denselben Kreisbereiche auf den sternigen (schlichten) bezw. konvexen (schlichten) Bereich abbildet, ist, dass $f(z)$ *die Eigenschaft*

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R$$

besitzt.

III. Ein Zusatz

Drittens beweise ich einen Satz, der nicht den Hauptsatz zusammensetzt, sondern unmittelbar aus dem ersten Satze des zweiten Teils folgt und der eine neue Beziehung zwischen der Schlichtheitsschranke und der Nullstelle der Ableitung $f'(z)$ gibt.

Bevor ich zum Zusatze übergehe, gebe ich hier zwei Bemerkungen:

(i) Man kann nicht schliessen aus der Bedingung

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0 \quad \text{für} \quad |z|<R,$$

dass

$$f'(z)\neq 0 \quad \text{in} \quad |z|<R$$

ist. Denn, wenn man die Funktion

$$f(z)=z+z^2$$

im Betracht zieht, so ist

$$\Re\frac{f(z)}{z}=1+x>0 \quad \text{für} \quad |z|<1, \quad \text{wo} \quad z=x+iy \text{ ist,}$$

dagegen ist aber

$$f'(z)=1+2z=0 \quad \text{für} \quad z=-\frac{1}{2}.$$

(ii) Selbst wenn ρ der kleinste absolute Betrag der Nullstellen von der Funktion $f(z)$, braucht die Funktion noch kein schlichtes Bild vom Kreisbereiche $|z|<\rho$ zu entwerfen. Denn z. B. die Funktion

$$f(z)=\frac{1}{3}\{(1+z)^3-1\}$$

ist regulär und

$$f'(z)=(1+z)^2,$$

daher ist hierbei $\rho=1$; da aber für verschiedene zwei Punkte des Einheitskreises $|z|<1$

$$z_1=re^{i\frac{\pi}{3}}-1, \quad z_2=re^{-i\frac{\pi}{3}}-1, \quad 0<r<1$$

ist

$$f(z_1)=f(z_2)=-\frac{1+r^3}{3}$$

d. h., ist die Funktion nicht schlicht im Einheitskreise $|z|<1$.

Nun leite ich den Satz, welcher lautet:

Wenn die im Kreise $|z|<R$ reguläre Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

der Bedingung

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0 \quad \textit{für} \quad z<R$$ [1]

genüge, so ist $f(z)$ schlicht im Kreise $|z|<\rho$, wobei ρ die kleinste absolute Betrag von der Nullstellen von $f'(z)$ bedeutet,

Um diesen Satz zu beweisen betrachte ich die Potenzreihe

$$\varphi(\zeta)=\rho^2\frac{f(z)-f\left[\dfrac{\rho^2(-\zeta+z)}{\rho^2-\bar{z}\zeta}\right]}{f'(z)(\rho^2-|z|^2)}=\zeta+\gamma_2\zeta^2+\ldots\ldots$$

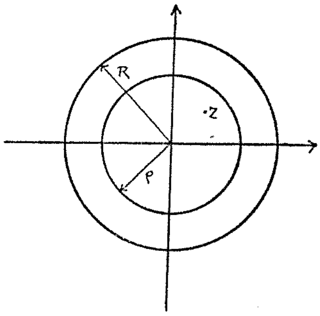
wo z eine Stelle im Kreise $|z|<\rho$ ist; diese Potenzreihe ist offenbar regulär im Kreise $|\zeta|<\rho$.

---

1. Wie man beim Beweise sieht, braucht $\Re\frac{f(z)}{z}$ nicht im genzen $|z|<R$ positiv zu sein, es ist genug, wenn sie nur im $|z|<\rho$ positiv bleibt.

Es ist sehr leicht die Beziehung

Fig. 5



$$\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{\rho^4}{\rho^2-|z|^2}\cdot\frac{1}{\frac{f(z)}{z}}$$

daraus abzuleiten. Gemäss der Voraussetzung ist

$$\Re\frac{f(z)}{z}>0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho\leqq R$$

so ist auch

$$\Re\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<\rho.$$

Folglich ist nach dem ersten Satz des vorigen Teils ist $\varphi(\zeta)$ schlicht im Kreisbereiche $|\zeta|<\rho$, daher, da

$$|\xi|=\left|\frac{\rho^2(-\zeta+z)}{\rho^2-\bar{z}\zeta}\right|<\rho \quad \text{für} \quad |z|<\rho,\ |\zeta|<\rho$$

ist, ist $f(\xi)$ schlicht im Kreise $|\xi|<\rho$, was zu beweisen war.

IV. Eine Bemerkung

Schliesslich möchte ich eine Bemerkung über den von S. Takahashi aufgestellten Satz geben. Der Satz lautet[1]:

Es sei die Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

regulär und schlicht im Einheitskreise $|z|<1$, so bildet $f(z)$ den Kreisbereich auf den sternigen bezw. konvexen Bereich ab, wenn

$$|b_1|+|b_2|+\ldots\ldots+|b_n|+\ldots\ldots\leqq 1 \tag{4}$$

bezw.

$$|c_1|+|c_2|+\ldots\ldots+|c_n|+\ldots\ldots\leqq 1 \tag{5}$$

ist, wobei die b_n bezw. die c_n durch

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+b_1z+b_2z^2+\ldots\ldots+b_nz^n+\ldots\ldots$$

bezw.

1. S. Takahashi: Tôhoku Math. Journ. 33 (1930). Die hier gegebene Wortlaute sind modifiziert von der originalen Wortlaute.

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=1+c_1z+c_2z^2+\ldots\ldots+c_nz^n+\ldots\ldots$$

erklärt sind.

In diesem Satze aber ist die Voraussetzung „*schlicht*" nicht nötig, weil

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<1$$

bezw.

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0 \quad \text{für} \quad |z|<1$$

ist, wenn die Potenzreihe der Bedingung (4) bezw. (5) genügt.

Daher kann man den Satz folgendermass erläutern:
Es sei

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ldots+a_nz^n+\ldots\ldots$$

eine im Kreisbereiche $|z|<1$ *reguläre Potenzreihe, so ist ihr Bildbereich schlicht und noch dazu ist sternig bezw. konvex, wenn sie der Bedingung* (4) *bezw.* (5) *genügt.*

Zum Schlusse bekenne ich, dass ich diese Arbeit nicht schliessen kann, ohne dass ich Herrn Professor Toshizô Matsumoto für seinen Anregungen und wertvollen Bemerkungen meinen herzlichen Dank ausdrücke.