

Sur la Propagation des Ondes de Dilatation dans la Mer

par

Kiugoro Kitagawa

(Reçu le 18 août, 1932)

Sommaire

Le présent travail a pour objet d'étudier la nature de la propagation des ondes de dilatation dans la mer. Nous commencerons par établir l'équation du mouvement de l'onde sonore

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v_0^2 (1 + \alpha z) \Delta \theta + 2v_0^2 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

où θ désigne la dilatation cubique, v_0 la vitesse de la propagation d'une onde au niveau de la mer, z la profondeur au point considéré.

Nous chercherons la solution générale de cette équation par la méthode des séries infinies et une solution approchée par la méthode des fonctions de Bessel.

Nous serons conduits de là à l'étude du trajet de la propagation d'une onde sonore, ce trajet étant une trajectoire orthogonale à une famille de courbes dépendant du paramètre temps et dont l'équation est représentée par la solution générale du mouvement. Le trajet du rayon sonore est dans le cas simple une courbe parabolique. Nous en calculerons la portée maxima, l'angle d'incidence, le rayon de courbure, et nous en déduirons la formule relative au sondage sonore.

I. Préambule

Nous nous proposons d'étudier la propagation des ondes sonores dans la mer à une certaine profondeur. Nous envisagerons donc le cas d'ondes de dilatation sous-marines, se propageant à des distances, pouvant aller presque à 10 km. en été, 20 km. en hiver et parfois même 100 km¹. On prétend qu'il est possible d'entendre avec des microphones des explosions sous-marines à des distances considérables, de l'ordre de 50 km. et plus, suivant l'importance de l'explosion. Les

1. M.M. H. Barkhausen, H. Lichte, Ann. d. Phys. **62**, 485 (1920)

sons ordinaires peuvent de même se propager à des distances remarquables¹.

La densité des eaux marines dépend comme on sait de trois variables : pression, température et salinité².

Si l'on suppose la mer normale avec une salinité de 35 ‰ et à 0°C, la densité ρ ne dépend que de la pression p ; ces quantités sont d'une façon générale croissantes avec la profondeur. On peut donc admettre que p et ρ sont fonctions de la profondeur z comptée en descendant à partir de la surface.

La profondeur D s'exprime en mètres dynamiques, d'après M. Bjerknæs³, par la formule

$$D_2 - D_1 = \frac{1}{10} \int_{z_1}^{z_2} g_s dz$$

g_s désignant l'accélération de la pesanteur au point considéré, prise le long du chemin $z_1 - z_2$.

En calculant cette intégrale, on obtient comme première approximation

$$D = 0.98z \dots\dots\dots(1)$$

Grâce aux beaux tableaux⁴ de M. Bjerknæs, qui donnent la densité $\rho \times 10^5$ gr. et la pression p décibars correspondant à une profondeur de D mètres dynamiques, on peut trouver les accroissements δp et $\delta \rho$ correspondant à un accroissement $\delta D = 100$ pour chaque point de

Tableau 1

D	0	1000	2000	3000	4000	5000
δp	102.837	103.33	103.80	104.27	104.73	105.18
$\frac{\delta \rho}{\rho}$	49	48	47	46	45	45
$\frac{\lambda}{\rho}$	2.1	2.1	2.2	2.2	2.3	2.3
D	6000	7000	8000	9000	9800	
δp	105.62	106.06	106.48	106.91	107.24	
$\frac{\delta \rho}{\rho}$	44	43	43	42	41	
$\frac{\lambda}{\rho}$	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	

1. M. E. Esclançon, *l'Acoustique des Canons et des Projectiles*, 205 (1925)
 2. MM. V. Bjerknæs and different collaborators, *Dynamic Meteorology and Hydrography* 1, 30 (1910)
 3. M. Bjerknæs, loc. cit. 14.
 4. M. Bjerknæs, loc. cit. Tableaux 15 H et 16 H.

profondeur D . On en déduit aisément pour le point envisagé la valeur approchée $\frac{\partial p}{\partial \rho}$, c'est à dire la valeur de l'expression $\frac{\lambda}{\rho}$, dans la mer normale, λ étant le coefficient d'élasticité cubique (Tableau I).

La dernière ligne dans ce tableau, nous permet de poser onze équations observées de la forme

$$Dx + y = \frac{\lambda}{\rho}$$

où D prend successivement les valeurs $D=0, 1000, 2000, \dots, 9800$, et $\frac{\lambda}{\rho} = 2.1 \times 10^{10}, 2.1 \times 10^{10}, \dots, 2.6 \times 10^{10}$.

En utilisant la méthode des moindres carrés, on obtient les équations normales suivantes :

$$\begin{aligned} 381.04 \times 10^6 x + 54.8 \times 10^3 y &= 132.98 \times 10^{13} \\ 54.8 \times 10^3 x + 11 y &= 25.6 \times 10^{10} \end{aligned}$$

La résolutions de ce système nous donne :

$$5.04 \times 10^5 D + 2.08 \times 10^{10} = \frac{\lambda}{\rho}$$

Remplaçons D par z en vertu de (1), et prenons comme unité le centimètre au lieu du mètre, on obtient

$$V^2 = v_0^2(1 + az) \dots\dots\dots(2)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \frac{\lambda}{\rho}, \quad v_0^2 = \frac{\lambda_0}{\rho_0} = 2.08 \times 10^{10} \\ a &= 2.38 \times 10^{-7} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

Nous pouvons, d'autre part, établir pour un milieu liquide la relation

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{\theta}{p} \dots\dots\dots(4)$$

en appelant θ la dilatation cubique, et p la pression y correspondante.

Le coefficient d'élasticité cubique λ est donné par une équation qui renferme les coefficients de déformation élastique; nous pouvons considérer ces coefficients comme des fonctions des coordonnées du

point envisagé¹, et nous utiliser ainsi avec l'équation (2), la relation (4).

Dans l'eau, comme dans tous les liquides, il existe une certaine viscosité due au frottement interne, qui est fonction de pression et de température, et dont la valeur s'accroît lorsque la profondeur augmente ; mais nous négligerons cette correction et supposerons le liquide parfait.

II. l'Équation fondamentale et son intégrale

Dans un milieu liquide, si J_x, J_y, J_z désigne l'accélération d'une molécule en un point considéré (x, y, z) à l'instant t , et si l'on suppose la force extérieure nulle, l'équation du mouvement est donnée par la formule

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho J_x = 0, \text{ etc.}$$

Ces équations se transforment dans la mer, en tenant compte des relations (2), (3) et (4), et du fait que le déplacement est petit ; il vient

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \nu_0^2(1 + \alpha z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \nu_0^2(1 + \alpha z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \nu_0^2(1 + \alpha z) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nu_0^2 \alpha \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

en appelant ξ, η, ζ les composantes parallèles aux axes du déplacement élastique du point, et en prenant le niveau de la mer pour plan des xy , l'axe z étant dirigé vers le bas. Pour l'équation de continuité, on aura

$$\frac{\partial}{\partial t}(\log \rho + \theta) = 0$$

En dérivant respectivement les équations (5) par rapport à x, y, z et en les ajoutant membre à membre, on obtient le résultat de la forme

$$\frac{\partial^3 \theta}{\partial t^2} = \nu_0^2(1 + \alpha z) \Delta \theta + 2\nu_0^2 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial z} \dots\dots\dots (6)$$

C'est l'équation fondamentale de la propagation d'une onde de dilatation dans la mer.

1. M.A.E.H. Love, A Treatise on the Math. Theory of Elasticity, 107 (1927)

Nous allons maintenant aborder l'étude de l'intégrale de l'équation (6); on peut appliquer l'artifice habituel de produit. Posons

$$\theta = e^{i\sigma t} XZ \dots\dots\dots(7)$$

en désignant par X une fonction de la seule variable x , par Z une fonction de la seule variable z , sans faire intervenir de fonction de y en raison de la symétrie avec x .

En appliquant la relation (7) à l'équation (6), on obtient

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2a}{(1+az)Z} \frac{dZ}{dz} + \frac{\sigma^2}{v_0^2(1+az)} = -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \dots\dots\dots(8)$$

où les termes contenant les variables x et z sont comme on le voit séparés. On aura donc d'une part

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + n^2 X = 0 \dots\dots\dots(9)$$

n^2 étant une constante. Son intégrale est de la forme

$$X = A_1 \sin nx + A_2 \cos nx \dots\dots\dots(10)$$

D'autre part,

$$(1+az) \frac{d^2 Z}{dz^2} + 2a \frac{dZ}{dz} + \left\{ \frac{\sigma^2}{v_0^2} - (1+az)n^2 \right\} Z = 0 \dots\dots\dots(11)$$

C'est une équation différentielle de Laplace.

Posons ensuite

$$az = \xi \dots\dots\dots(12)$$

ξ variant de zéro à 0.238, c'est-à-dire z de zéro à 10^6 , l'équation obtenue par cette transformation est de la forme suivante

$$(1+\xi) \frac{d^2 Z}{d\xi^2} + 2 \frac{dZ}{d\xi} + (a-b-b\xi)Z = 0 \dots\dots\dots(13)$$

avec

$$a = \frac{\sigma^2}{v_0^2 a^2}, \quad b = \frac{n^2}{a^2} \dots\dots\dots(14)$$

En opérant encore une fois la substitution suivante

$$Z = \frac{\xi^2}{1+\xi} \eta \dots\dots\dots(15)$$

il vient

$$\xi^2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + 4\xi \frac{d\eta}{d\xi} + \left\{ 2 + \frac{\xi^2}{1 + \xi} (a - b - b\xi) \right\} \eta = 0 \dots\dots(16)$$

Cette équation admet, d'après le théorème de Fuchs, deux intégrales régulières distinctes dans le domaine contenant l'origine, parce que le coefficient de η est fonction holomorphe dans ce domaine¹.

Remplaçons $\frac{1}{1 + \xi}$ dans l'équation (16) par son développement en série; on obtient

$$\xi^2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + 4\xi \frac{d\eta}{d\xi} + \{ 2 + (a - b)\xi^2 - a\xi^3 + a\xi^4 \dots + (-1)^m a\xi^m + \dots \} \eta = 0 \dots\dots(17)$$

Remplaçons η dans le premier membre de l'équation (17) par un développement de la forme

$$\eta = c_0 \xi^r + c_1 \xi^{r+1} + c_2 \xi^{r+2} + \dots + c_m \xi^{r+m} + \dots, (c_0 \neq 0) \dots\dots(18)$$

$c_0, c_1, \dots, c_m, \dots$ étant des coefficients que nous prendrons de la façon suivante: Égalons à zéro le terme en ξ^r , il viendra

$$c_0 \{ r(r-1) + 4r + 2 \} = 0 \dots\dots(19)$$

d'où $r = -1$ ou -2

Prenons pour r l'une des deux valeurs trouvées, et choisissons c_0 arbitrairement. En posant par exemple $r = -1, c_0 = 1$ et en égalant encore à zéro le terme en ξ^{r+p} , on aura

$$c_p \{ (r+p)(r+p-1) + 4(r+p) + 2 \} + (a-b)c_{p-2} - ac_{p-3} + ac_{p-4} + \dots = 0$$

Cette formule permet de calculer de proche en proche les coefficients successifs c_1, c_2, \dots, c_m , en faisant successivement $p = 1, 2, \dots, m$, car l'équation n'admet pas de seconde racine qui soit égale à la première -1 augmentée d'un nombre entier positif. Nous aurons donc une intégrale particulière donnée par la formule (18), à savoir

$$\eta_1 = \xi^{-1} \varphi(\xi) \dots\dots(20)$$

où

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{a-b}{6} \xi^2 + \frac{a}{12} \xi^3 + \dots, \dots\dots(20 \text{ bis})$$

$\varphi(\xi)$ étant une fonction holomorphe qui ne s'annule pas pour $\xi = 0$, et

1. M. E. Goursat, Cours d'Analyse mathématique, 2, 476 (1929)

dont la convergence a été démontrée par M. Goursat dans son cours cité plus haut. La différence des deux racines de l'équation (19) étant un nombre entier, on obtient une seconde intégrale particulière η_2 par la formule générale suivante :

$$\eta_2 = \eta_1 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\eta_1} e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{4}{\xi} d\xi} = \xi^{-2} \psi(\xi) \dots\dots\dots(21)$$

où

$$\psi(\xi) = -1 + \frac{\alpha - b}{2} \xi^2 - \frac{\alpha}{6} \xi^3 + \dots\dots\dots(21 \text{ bis})$$

La solution générale est donc de la forme

$$\eta = B_1 \xi^{-1} \varphi(\xi) + B_2 \xi^{-2} \psi(\xi) \dots\dots\dots(22)$$

d'où l'on tira la solution générale de l'équation (13)

$$Z = B_1 \Phi(\xi) + B_2 \Psi(\xi) \dots\dots\dots(23)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) &= \xi - \xi^2 + \left(1 - \frac{\alpha - b}{6}\right) \xi^3 + \left(\frac{3\alpha - 2b}{12} - 1\right) \xi^4 + \dots \\ \Psi(\xi) &= -1 + \xi + \left(\frac{\alpha - b}{2} - 1\right) \xi^2 + \left(1 - \frac{4\alpha - b}{6}\right) \xi^3 + \dots \end{aligned} \right\} (23 \text{ bis})$$

Nous pouvons ainsi donner à l'équation (7) l'aspect suivant

$$\theta = e^{i\alpha t} \{ A_1 \sin nx + A_2 \cos nx \} \{ B_1 \Phi(ax) + B_2 \Psi(ax) \} \dots(24)$$

formule qui représente la solution générale de l'équation fondamentale.

III. Une solution approchée par la méthode des équations de Bessel

Opérons dans l'équation (13) la substitution suivante

$$Z = \frac{\eta}{1 + \xi} \dots\dots\dots(25)$$

il vient

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \left(\frac{\alpha}{1 + \xi} - b \right) \eta = 0 \dots\dots\dots(25 \text{ bis})$$

C'est une équation différentielle linéaire spéciale du second ordre, ξ

variant de zéro à 0.238. M. Picard¹ donne dans son cours une étude approfondie d'équations semblables à l'équation (25 bis), en opérant des approximations successives, et en utilisant avec M. Schwarz deux séries de constantes.

En remplaçant la fonction $\frac{a}{1+\xi}$ par son développement en série et en négligeant les puissances supérieures à ξ^2 , l'équation (25 bis) devient

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (a - b - a\xi)\eta = 0 \dots\dots\dots(26)$$

Opérons la transformation suivante :

$$\eta = (a - b - a\xi)^{\frac{1}{3}}v, \quad a - b - a\xi = \left(\frac{3}{2}a\xi\right)^{\frac{2}{3}} \dots\dots\dots(26 \text{ bis})$$

L'équation (26) prend la forme

$$\xi^2 \frac{d^2v}{d\xi^2} + \xi \frac{dv}{d\xi} + \left(\xi^2 - \frac{1}{9}\right)v = 0 \dots\dots\dots(27)$$

Nous avons là une équation de Bessel. En posant successivement $n = \frac{1}{3}$ et $n = -\frac{1}{3}$, nous obtenons deux intégrales de cette équation sous la forme des séries :

$$J_n(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2r}}{\Gamma(n+r+1)}$$

Ces intégrales $J_{\frac{1}{3}}, J_{-\frac{1}{3}}$ sont évidemment indépendantes, car l'ordre n'est pas un entier réel; l'intégrale générale est donc de la forme

$$v = C_1 J_{-\frac{1}{3}}(\xi) + C_2 J_{\frac{1}{3}}(\xi) \dots\dots\dots(27 \text{ bis})$$

IV. Trajet de propagation de l'onde sonore

Nous venons de trouver la solution de l'équation fondamentale (6). Soit l'intégrale (7)

$$\theta = e^{i\omega t} XZ,$$

l'équation d'une famille de courbes Γ , dépendant d'un paramètre arbitraire t . Si l'on cherche la courbe \mathcal{L}

$$z = f(x) \dots\dots\dots(28)$$

1. M. E. Picard, *Traité d'Analyse*, 3, 100 (1928)

qui coupe orthogonalement en chacun de ses points la courbe Γ passant par ce point, la courbe L est la trajectoire orthogonale. La condition d'orthogonalité entre (7) et (28) se réduit à l'équation linéaire

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{dz}{dx} - \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$$

Les courbes caractéristiques, dont l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{dx}{\frac{\partial\theta}{\partial x}} = \frac{dz}{\frac{\partial\theta}{\partial z}}$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{dx}{\frac{1}{X} \frac{dX}{dx}} = \int \frac{dz}{\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz}} \dots\dots\dots(29)$$

sont des courbes qui, en chacun de leur points, admettent pour tangente la normale à la courbe Γ passant par ce point, c'est-à-dire des courbes qui représentent le trajet de la propagation de l'onde sonore.

Intégrons l'équation (29), en prenant le cas simple où, en vertu des relations (10), (12), (25) et (26 bis),

$$X = \sin nx, \quad Z = \frac{(a-b-az)^{\frac{1}{2}}}{1+az} J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)$$

On aura le résultat suivant :

d'une part

$$\int \frac{dx}{\frac{1}{\sin nx} \cdot \frac{d \sin nx}{dx}} = -\frac{1}{n^2} \log \cos nx \dots\dots\dots(30)$$

d'autre part

$$\log Z = \frac{1}{2} \log (a-b-az) - \log (1+az) + \log J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)$$

On obtient donc, en tenant compte des relations

$$\zeta = \frac{2}{3a} (a-b-az)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d\zeta}{dz} = -a(a-b-az)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\frac{dJ_{-\frac{1}{3}}(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)}{3\zeta} - J_{\frac{2}{3}}(\zeta),^1$$

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2} \frac{-aa}{a-b-aa\zeta} - \frac{a}{1+a\zeta} + \frac{1}{J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)} \cdot \frac{dJ_{-\frac{1}{3}}(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$$

$$= -\frac{a}{1+a\zeta} + a(a-b-aa\zeta)^{\frac{1}{2}} \frac{J_{\frac{2}{3}}(\zeta)}{J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)} \dots\dots\dots(31)$$

En négligeant les puissances plus élevées de x, z, ζ et en supposant $a-b=0$, on peut trouver une valeur approchée des expressions (30) et (31), bien suffisante pour les besoins pratiques². On aura comme première approximation

$$\frac{J_{\frac{2}{3}}(\zeta)}{J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)} \doteq \frac{3}{4}\zeta$$

La formule (31) devient alors

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \doteq -\frac{a}{1+a\zeta} + \frac{aa^3z^2}{2} \doteq -\frac{a}{1+a\zeta}$$

On a de même

$$\int \frac{dz}{\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz}} = -\int \frac{1+a\zeta}{a} dz \doteq -\frac{z}{a} \dots\dots\dots(32)$$

En égalant (30) et (32), il vient

$$\log \cos nx = \frac{n^2}{a}z + C$$

c'est-à-dire

$$\cos nx = e^{\frac{n^2z}{a}} \dots\dots\dots(33)$$

en faisant correspondre $x=0$ à $z=0$.

Développons en séries les deux membres de (33), et négligeons les puissances plus élevées de x et de z ; nous obtenons

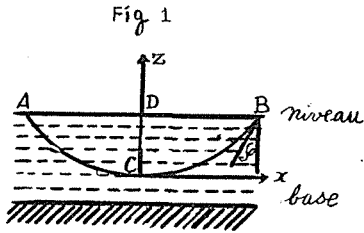
$$1 - \frac{n^2x^2}{2} \doteq 1 + \frac{n^2}{a}z$$

1. MM. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der math. Physik, 1, 421 (1931)
 2. Lord Rayleigh, The Theory of Sound, 2, 131 (1926)

En changeant le sens des z comptés maintenant vers le haut, nous arrivons à l'équation à forme parabolique suivante :

$$x^2 = -\frac{2}{\alpha}z \dots\dots\dots(34)$$

Cette formule représente dans le cas simple l'équation du trajet de la propagation d'une onde sonore dans la mer.



La profondeur $CD = z$ étant donnée, on peut calculer la portée AB (fig. 1).

$$AB = 2x = 2\sqrt{\frac{2z}{\alpha}} \dots\dots\dots(35)$$

L' angle d'incidence φ est donné par la formule

$$\tan \varphi = \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha z}} \dots\dots\dots(36)$$

et le rayon de courbure R ,

$$R = \frac{(1+z''^2)^{\frac{3}{2}}}{z''} = \frac{1}{\alpha}(1+2\alpha z)^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots(37)$$

Nous pouvons établir les valeurs numériques suivantes :

CD = z	AB = 2x	φ	R à A et à B
4×10^6 cm.	3.67×10^6	$66^{\circ}25'30''$	5.46×10^6
10^6 cm.	5.80×10^6	$55^{\circ}23'50''$	7.53×10^6

V. Durée de propagation d'une onde sonore

Pour connaître la durée que met le rayon sonore à aller d'un point à un autre, il faut calculer l'intégrale entre deux points du milieu du trajet

$$t = \int \frac{ds}{V} \dots\dots\dots(38)$$

en désignant par ds l'élément de trajet, et par V la vitesse variable (2).

L'équation (34) nous donne d'une part

$$ds = \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} dx$$

l'équation (2), d'autre part

$$V = u_0 \sqrt{1 + a(z_1 - z)} = u_0 \sqrt{1 + \frac{a^2}{2}(x_1^2 - x^2)}$$

x_1, z_1 étant les coordonnées du niveau. On aura donc

$$t = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + a^2 x^2} dx}{u_0 \sqrt{1 + \frac{a^2}{2}(x_1^2 - x^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{au_0} \int_0^q \sqrt{\frac{1 + q^2}{2 + q_1^2 - q^2}} dq \dots\dots\dots(39)$$

en posant $ax = q, ax_1 = q_1$. Cette formule se réduit à

$$t = \frac{\sqrt{2}}{au_0} \sqrt{3 + q_1^2} \int_\omega^1 \frac{1 - k^2 \omega^2}{\sqrt{(1 - k^2 \omega^2)(1 - \omega^2)}} d\omega \dots\dots\dots(40)$$

avec

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{q^2}{2 + q_1^2}} < 1, k^2 = \frac{2 + q_1^2}{3 + q_1^2} < 1$$

Nous sommes donc ramenés à une intégrale elliptique, et avec les notations de Tannery¹, on aura dans ce cas,

$$a_0 = k^2, 4a_1 = 0, 6a_2 = -(1 + k^2), 4a_3 = 0, a_4 = 1$$

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - k^2 \omega^2)(1 - \omega^2)}} = C_1 + u$$

et

$$k^2 \int \frac{\omega^2 d\omega}{\sqrt{(1 - k^2 \omega^2)(1 - \omega^2)}} = C_2 + \frac{1 + k^2}{6} u - \zeta(u + v) - \zeta u$$

On a donc

$$\int \frac{1 - k^2 \omega^2}{\sqrt{(1 - k^2 \omega^2)(1 - \omega^2)}} d\omega = C + \frac{5 - k^2}{6} u + \zeta(u + v) + \zeta u$$

L'équation (40) devient alors

$$t = \frac{\sqrt{2(3 + q_1^2)}}{au_0} \left[C + \frac{5 - k^2}{9} u + \zeta(u + v) + \zeta u \right] \dots\dots\dots(41)$$

Pour calculer les valeurs approchées, développons la fonction (39) en série de Taylor; on aura

1. J. Tannery et J. Molk, *Éléments de la Théorie des Fonctions elliptiques*, 4, 156 (1902)

$$f(q) = \sqrt{\frac{1+q^2}{2+q_1^2-q^2}} = \frac{1}{\sqrt{2+q_1^2}} + \frac{q^2}{2} \times \frac{3+q_1^2}{(2+q_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

et par conséquent

$$t = \frac{\sqrt{2}}{au_0} \int_0^a f(q) dq = \frac{\sqrt{2}}{au_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{2+q_1^2}} + \frac{q^3}{3} \times \frac{3+q_1^2}{(2+q_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots \right\} \dots\dots\dots(42)$$

On en déduit comme première approximation

$$t = \frac{\sqrt{2}}{au_0} \frac{q}{\sqrt{2+q_1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{au_0} \sqrt{\frac{az}{1+az_1}} \dots\dots\dots(43)$$

On obtient donc, pour la durée T_1 que met le rayon sonore à aller le long de la courbe ACB (fig. 1),

$$T_1 = 2t = \frac{2x_1}{u_0} \frac{1}{\sqrt{1+az_1}}$$

Comme la durée T_2 que le son met à aller le long de la droite AB est donné par la formule :

$$T_2 = \frac{2x_1}{u_0}$$

On en conclut

$$T_1 = T_2 \times \frac{1}{\sqrt{1+az_1}} \dots\dots\dots(44)$$

Par exemple, pour $z_1 = 4 \times 10^5$ cm., on a $\frac{1}{\sqrt{1+az_1}} \doteq 0.95$ et T_1 est plus court que T_2 de 5%.

VI. Formule relative au sondage sonore

Nous nous limiterons au seul cas à envisager dans la pratique du sondage acoustique, celui où le rayon sonore tombe presque verticalement. La durée T que le rayon met à aller du niveau $z=0$ à la profondeur z et revenir est donné évidemment par la formule :

$$T = 2 \int_0^z \frac{dz}{u_0 \sqrt{1+az}} = \frac{4}{au_0} (\sqrt{1+az} - 1)$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{u_0 T}{2} + \frac{au_0^2 T^2}{16} \dots\dots\dots(45)$$

Nous avons là l'équation relative au sondage sonore dans le cas où la vitesse varie avec la profondeur. Dans le cas où la vitesse du son est constante, on peut négliger le dernier terme et on obtient

$$z = \frac{u_0 T}{2}$$

Indiquons les valeurs de z dans les trois cas suivants :

T_{sec}	$\frac{u_0 T}{2}$	$\frac{\alpha u_0^2 T^2}{16}$	z cm.
2	1.44×10^5	0.01×10^5	1.45×10^5
5	3.60 „	0.08 „	3.68 „
10	7.21 „	0.31 „	7.52 „

Pour terminer ce mémoire, nous désirons adresser tous nos remerciements à M. le professeur K. Tamaki qui nous a donné des renseignements qui nous ont été fort utiles pour ce travail, et nous tenons également à exprimer notre vive gratitude à M. le professeur T. Nomitsu pour les précieuses indications qu'il a bien voulu nous donner.