

Über die Funktionen mit links beschränktem Realteil

von

Akira Kobori

(Eingegangen am 8. Mai, 1933)

In den folgenden Zeilen betrachte ich die durch die Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

dargestellte Funktion, die in einem Kreisbereich regulär ist und dort der Bedingung

$$(1) \quad \Re f(z) > A$$

genügt.¹

Im ersten Teil untersuche ich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz solcher Funktionen.

Im zweiten, dritten und vierten Teil betrachte ich die Anwendungen des Hauptsatzes, den ich im ersten Teil dieser Note bewiesen habe; nämlich ich ziehe im zweiten Teil die beschränkten Funktionen, im dritten Teil die Funktionen mit beschränktem Argumente und im vierten Teil die Stern- und Rundungsschranken der in einem Kreisbereiche regulären Funktionen in Betracht.

Im fünften Teil untersuche ich die α -Stelle der Funktionen vom Typus (1) und im letzten Teil möchte ich die Schlichtheitsschranke der Funktionen demselben Typus in Betracht ziehen.

I. Das Hauptproblem

1. Es sei

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots$$

1. Unter \Re versteht man den Realteil von ζ .

eine Potenzreihe mit den beiden Anfangskoeffizienten

$$f(0) = c_0, \quad \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = c_\nu, \quad \Re c_0 > A, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

und es sei für $|z| < \rho$ die Funktion $f(z)$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > A,$$

wobei A eine beliebig gegebene Konstante bedeutet.

Hier entsteht das Problem, bei gegebenen A , c_0 und c_ν die Funktion $\theta(c_0, c_\nu; A)$ derart zu bestimmen, dass im Kreise $|z| < \theta(c_0, c_\nu; A)$, aber nicht in einem grösseren Kreise, eine Funktion mit den Anfangskoeffizienten

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots,$$

regulär und vom Typus (1) ist.

In diesem ersten Teil möchte ich dieses Problem und einige verwandte Problem lösen.

Satz I.
$$\theta(c_0, c_\nu; A) = \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}.$$

Beweis. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad \Re c_0 > A, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und vom Typus (1), dann ist die Funktion

$$f_1(z) = f(z) - A$$

dort regulär und genügt der Bedingung

$$\Re f_1(z) > 0.$$

Nach einem bekannten Satz ist für $|z| = r < \rho$

$$c_\nu r^\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re f_1(r e^{i\theta}) e^{-i\nu\theta} d\theta,$$

d. h. es ist

$$|c_\nu| r^\nu \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re f_1(r e^{i\theta}) d\theta = 2(\Re c_0 - A).$$

Daher, wenn r gegen ρ strebt, ist

$$|c_\nu| \rho^\nu \leq 2(\Re c_0 - A),$$

d. h.

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$$

Folglich ist

$$\theta(c_0, c_\nu; A) \leq \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$$

Um zu zeigen, dass

$$\theta(c_0, c_\nu; A) = \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$$

ist, brauche ich nur eine spezielle, für $|z| < \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$ reguläre, Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \Re c_0 > A, c_\nu \neq 0, \nu \geq 1,$$

deren Realteil $> A$ ist.

In der Tat ist die Funktion $\frac{c_\nu z^\nu}{2(\Re c_0 - A)}$ im Kreise $|z| < \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$ dem absoluten Betrage nach < 1 . Daher ist die Funktion

$$f_1(z) = \frac{\frac{c_0 - A - 1}{c_0 - A + 1} + \frac{\bar{c}_0 - A + 1}{c_0 - A + 1} \cdot \frac{c_\nu z^\nu}{2(\Re c_0 - A)}}{1 + \frac{\bar{c}_0 - A - 1}{c_0 - A + 1} \cdot \frac{c_\nu z^\nu}{2(\Re c_0 - A)}}$$

im Kreise $|z| < \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$ regulär und dem absoluten Betrage nach < 1 .

Also ist die Funktion

$$f(z) = \frac{A + 1 - (A - 1)f_1(z)}{1 - f_1(z)}$$

im Kreise $|z| < \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$ regulär und vom Typus (1). Ferner ist

$$f(0) = \frac{A + 1 - (A - 1) \frac{c_0 - A - 1}{c_0 - A + 1}}{1 - \frac{c_0 - A - 1}{c_0 - A + 1}} = c_0$$

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(\nu-1)}(0) = 0$$

$$\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = \frac{4c_\nu}{\left(1 - \frac{c_0 - A - 1}{c_0 - A + 1}\right)^2} = c_\nu.$$

Daher existiert wirklich eine Funktion der Gestalt

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots,$$

die die Bedingung (1) erfüllt. Damit ist

$$\theta(c_0, c_\nu; A) = \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}},$$

was zu beweisen war.

Man kann diesen Satz mit anderen Worten folgendermassen ausdrücken:

Satz II. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \Re c_0 > A, c_\nu \neq 0, \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und

$$\Re f(z) > A.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_\nu|}}$$

ist.

Besonders für $A=0$ hat man einen Satz über die Funktion mit positivem Realteil. Der Satz besagt:

Satz III. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \Re c_0 > 0, c_\nu \neq 0, \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und

$$\Re f(z) > 0.$$

Dann ist für die Existenz solcher Funktion notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{2\Re c_0}{|c_\nu|}}$$

ist.

2. Hierbei entsteht ein anderes Problem als Zusatz des Hauptproblems, wenn man anstatt der Bedingung (1) die Bedingung

$$(2) \quad A < \Re f(z) < B$$

in Betracht zieht. Dieses neue Problem möchte ich untersuchen.

Das Problem besagt:

Satz IV. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad A < \Re c_0 < B, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$A < \Re f(z) < B.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{2(B-A)}{|c_\nu|\pi} \cdot \sin\left(\frac{\Re c_0 - A}{B-A}\pi\right)}$$

ist.

Beweis. Die Funktion

$$g(z) = e^{\pi \left\{ \frac{z-A}{B-A} - \frac{1}{2} \right\}}$$

bildet den Streifen $A < \Re z < B$ auf die Halbebene $\Re g(z) > 0$ ab. Wenn also die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär ist und dort der Bedingung (2) genügt, so ist die Funktion

$$f_1(z) = e^{\pi \left\{ \frac{f(z)-A}{B-A} - \frac{1}{2} \right\}}$$

wieder im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genügt dort der Bedingung

$$\Re f_1(z) > 0.$$

Wie man leicht nachprüft, ist

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(o) = e^{-\frac{\Im \zeta_0}{B-A} \pi} \left\{ \sin\left(\frac{\Re \zeta_0 - A}{B-A} \pi\right) - i \cos\left(\frac{\Re \zeta_0 - A}{B-A} \pi\right) \right\} \\ \text{mit } \Re f_1(o) = e^{-\frac{\Im \zeta_0}{B-A} \pi} \cdot \sin\left(\frac{\Re \zeta_0 - A}{B-A} \pi\right) > 0 \\ f_1'(o) = f_1''(o) = \dots = f_1^{(\nu-1)}(o) = 0 \\ \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(o) = e^{-\frac{\Im \zeta_0}{B-A} \pi} \cdot \frac{c_\nu \pi}{B-A} \cdot i \cdot e^{i\left(\frac{\Re \zeta_0 - A}{B-A} - \frac{1}{2} \pi\right)}, \end{array} \right.$$

wobei unter $\Im \zeta$ man versteht den Imaginärteil von ζ , und daher nach dem Satze I,

$$\begin{aligned} \rho &\leq \theta \left\{ f_1(o), \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(o); o \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2(B-A)}{|c_\nu| \pi} \sin\left(\frac{\Re \zeta_0 - A}{B-A} \pi\right)} \end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, genügt es zu zeigen, dass es wirklich eine Funktion gibt, die im Kreise $|z| < \sqrt{\frac{2(B-A)}{|c_\nu| \pi} \sin\left(\frac{\Re \zeta_0 - A}{B-A} \pi\right)}$ regulär ist, dort der Bedingung (2) genügt und die Anfangskoeffizienten

$$f(o) = c_0, \quad \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(o) = c_\nu$$

besitzt.

Wie man beim Beweise des Satzes I sieht, gibt es wirklich eine Funktion

$$f_1(z) = f_1(o) + \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(o) z^\nu + \dots,$$

die im Kreise $|z| < \theta \left\{ f_1(o), \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(o); o \right\}$ regulär ist und dort der Bedingung

$$(4) \quad \Re f_1(z) > 0$$

genügt, wobei $f_1(o)$ und $\frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(o)$ durch (3) bestimmt sind.

Wenn $f_1(z)$ im Kreise $|z| < \theta \left\{ f_1(o), \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(o); o \right\}$ vom Typus

(4) ist, so ist $f(z)$ vom Typus (2), und umgekehrt. Daher ist die Funktion

$$f(z) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{i\pi} \log f_1(z)$$

vom Typus (2), wobei für den Logarithmus der Zweig genommen ist, in dem

$$\log 1 = 0$$

ist¹. Daher, wie leicht einzusehen ist, sind

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{i\pi} \cdot i\pi \left(\frac{c_0 - A}{B-A} - \frac{1}{2} \right) \\ &= c_0 \\ \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) &= \frac{B-A}{i\pi} \cdot \frac{f_1^{(\nu)}(0)}{f_1(0)} \\ &= \frac{B-A}{i\pi} \cdot \frac{i\pi c_\nu}{B-A} = c_\nu, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Wenn $A = -B$ ($B > 0$) ist, so erhält man den

Satz V. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |\Re c_0| < B, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$|\Re f(z)| < B.$$

Dann ist für die Existenz solcher Funktion notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{4B}{|c_\nu|\pi} \cos\left(\frac{\Re c_0}{2B}\pi\right)}$$

ist.

3. Da

$$\sin\left(\frac{\Re c_0 - A}{B-A}\pi\right) = \sin\left(\frac{B - \Re c_0}{B-A}\pi\right)$$

ist, so ist, wenn A gegen $-\infty$ strebt,

1. Fortan ist diese Bemerkung gültig für den Logarithmus.

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{\sin\left(\frac{\Re c_0 - A}{B - A} \pi\right)}{\frac{B - \Re c_0}{B - A}} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{\sin\left(\frac{B - \Re c_0}{B - A} \pi\right)}{\frac{B - \Re c_0}{B - A}} = \pi.$$

Daher hat man für die Funktionen mit beschränktem Realteil den
Satz VI. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad \Re c_0 < B, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und

$$\Re f(z) < B.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{2(B - \Re c_0)}{|c_\nu|}}$$

ist.

Wenn $\nu = 1$ ist, so hat man den

Satz VII. (Lindelöf) *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots, \quad \Re c_0 < B, \quad c_1 \neq 0$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) < B.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \frac{2(B - \Re c_0)}{|c_1|}$$

ist.¹

II. Über beschränkte Funktionen

4. Nun gehe ich zu Anwendungen des Hauptsatzes über, und beginne mit beschränktem Funktionen.

Satz VIII. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$|f(z)| < M.$$

1. Lindelöf: Acta Societatis Scientiarum Fennicae, 35 (1908).

Dann ist für die Existenz solcher Funktion notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{M^2 - |c_0|^2}{M|c_\nu|}}$$

ist.

Beweis. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$|f(z)| < M,$$

dann ist die Funktion

$$f_1(z) = \frac{1 + \frac{f(z)}{M}}{1 - \frac{f(z)}{M}}$$

wieder im Kreise $|z| < \rho$ regulär und erfüllt dort die Bedingung

$$\Re f_1(z) > 0.$$

Ferner sind

$$\Re f_1(0) = \frac{M^2 - |c_0|^2}{M^2 \left|1 - \frac{c_0}{M}\right|^2} > 0$$

$$f_1'(0) = f_1''(0) = \dots = f_1^{(\nu-1)}(0) = 0$$

$$\frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(0) = \frac{c_\nu}{M \left(1 - \frac{c_0}{M}\right)^2} \neq 0.$$

Daher ist nach Satz I,

$$\begin{aligned} \rho &\leq \theta \left\{ f_1(0), \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(0); 0 \right\} \\ &= \sqrt[\nu]{\frac{M^2 - |c_0|^2}{M|c_\nu|}}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, genügt es, eine Funktion mit den Anfangsgliedern

$$c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

zu geben, die im Kreise $|z| < \sqrt[\nu]{\frac{M^2 - |c_0|^2}{M|c_\nu|}}$ regulär und dem absoluten Betrage nach $< M$ ist.

Da die Funktion $\frac{M c_\nu z^\nu}{M^2 - |c_0|^2}$ im Kreise $|z| < \sqrt[\nu]{\frac{M^2 - |c_0|^2}{M|c_\nu|}}$ dem absoluten Betrage nach < 1 ist, so ist die Funktion

$$f(z) = \frac{c_0 + \frac{M^2 c_\nu}{M^2 - |c_0|^2} z^\nu}{1 + \frac{c_0 c_\nu}{M^2 - |c_0|^2} z^\nu}$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und dem absoluten Betrage nach $< M$.
Dass seine Potenzreihenentwicklung mit

$$c_0 + c_\nu z^\nu + \dots$$

beginnt, übersieht man auch mit einem Blick, w. z. b. w.

Besonders, wenn $\nu = 1$ ist, erhält man den

Satz IX. (Landau) *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_1 \neq 0$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$|f(z)| < M.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \frac{M}{|c_1|} - \frac{|c_0|^2}{M|c_1|}$$

ist.¹

5. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort den Bedingungen

$$(5) \quad \begin{cases} |f(z)| < M \\ f(z) \neq a, \quad |a| < M, \end{cases}$$

so ist die Funktion

$$g(z) = \frac{M\{f(z) - a\}}{M^2 - \bar{a}f(z)}$$

1. E. Landau: Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich (1907).
Vgl. auch S. Kakeya: Science Reports, Tokyo Bunrika Daigaku, I (1932).

dort regulär und

$$0 < |g(z)| < 1.$$

Daher ist die Funktion

$$f_1(z) = \log \{g(z)\}$$

wieder im Kreise $|z| < \rho$ regulär und

$$(6) \quad \Re f_1(z) = \log |g(z)| < 0.$$

Ferner sind

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(0) = \log \frac{M(c_0 - a)}{M^2 - \bar{a}c_0} \\ \text{mit } \Re f_1(0) = \log \left| \frac{M(c_0 - a)}{M^2 - \bar{a}c_0} \right| < 0 \\ f_1'(0) = f_1''(0) = \dots = f_1^{(\nu-1)}(0) = 0 \\ \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(0) = \frac{(M^2 - |a|^2)c_\nu}{(c_0 - a)(M^2 - \bar{a}c_0)} \neq 0. \end{array} \right.$$

Also ist nach dem Satze VI

$$\rho \cong \sqrt[\nu]{\frac{|(c_0 - a)(M^2 - \bar{a}c_0)|}{(M^2 - |a|^2)|c_\nu|} \log \left| \frac{M^2 - \bar{a}c_0}{M(c_0 - a)} \right|^2}$$

Man kann leicht, wie beim Beweise von Satz I, die im Kreise $|z| < \sqrt[\nu]{\frac{|(c_0 - a)(M^2 - \bar{a}c_0)|}{(M^2 - |a|^2)|c_\nu|} \log \left| \frac{M^2 - \bar{a}c_0}{M(c_0 - a)} \right|^2} \equiv \Gamma$ reguläre und dort der Bedingung

$$\Re f_1(z) < 0$$

genügende Funktion $f_1(z)$ mit den Anfangsgliedern

$$\log \frac{M(c_0 - a)}{M^2 - \bar{a}c_0} + \frac{(M^2 - |a|^2)c_\nu}{(c_0 - a)(M^2 - \bar{a}c_0)} z^\nu + \dots$$

konstruieren. Folglich ist die Funktion

$$g(z) = e^{f_1(z)}$$

im Kreise $|z| < \Gamma$ regulär und

$$|g(z)| = e^{\Re f_1(z)} < 1$$

$$g(z) \neq 0.$$

Daher ist die Funktion

$$f(z) = \frac{M\{Mg(z) + a\}}{M + \bar{a}g(z)}$$

wieder dort regulär und vom Typus (5). Ferner sind

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{M\{Mg(0) + a\}}{M + \bar{a}g(0)} \\ &= \frac{M\left\{\frac{M^2(c_0 - a)}{M^2 - \bar{a}c_0} + a\right\}}{M + \frac{M\bar{a}(c_0 - a)}{M^2 - \bar{a}c_0}} = c_0, \end{aligned}$$

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(\nu-1)}(0) = 0,$$

$$\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = \frac{M}{\nu!} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\{M + \bar{a}g(0)\}^2} (M^2 - |a|^2) = c_\nu.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz X. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort den Bedingungen

$$|f(z)| < M$$

$$f(z) \neq a, \quad |a| < M.$$

Dann ist für die Existenz solcher Funktion notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{|(c_0 - a)(M^2 - \bar{a}c_0)|}{(M^2 - |a|^2)|c_\nu|} \cdot \log \left| \frac{M^2 - \bar{a}c_0}{M(c_0 - a)} \right|^2}$$

ist.

Diesen Satz kann man auch folgendermassen formulieren:

Satz XI. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$|f(z)| < M.$$

Es sei ferner

$$\rho > \sqrt[\nu]{\frac{|(c_0 - a)(M^2 - \bar{a}c_0)|}{(M^2 - |a|^2)|c_\nu|} \cdot \log \left| \frac{M^2 - \bar{a}c_0}{M(c_0 - a)} \right|^2},$$

dann besitzt $f(z)$ in diesem Kreise mindestens eine a -Stelle.

6. Wenn man im Satze XI $a=0$ setzt, so erhält man einen Satz über die Nullstelle der beschränkten Funktionen. Der Satz lautet:

Satz XV. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$|f(z)| < M.$$

Es sei

$$\rho > \sqrt[\nu]{2 \left| \frac{c_0}{c_\nu} \right| \log \frac{M}{|c_0|}},$$

so besitzt $f(z)$ dort mindestens eine Nullstelle.

Für $\nu=1$ erhält man den

Satz XIII. (Lindelöf) Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots, \quad |c_0| < M, \quad c_1 \neq 0$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$|f(z)| < M.$$

Es sei ferner

$$\rho > 2 \left| \frac{c_0}{c_1} \right| \log \frac{M}{|c_0|},$$

dann besitzt $f(z)$ in diesem Kreise mindestens eine Nullstelle.¹

III. Über Funktionen mit beschränktem Argumente

7. Nun gehe ich zur zweiten Anwendung des Hauptsatzes über. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad \sigma < \text{Arg } c_0 < \tau, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$f(z) \neq 0$$

$$\sigma < \text{Arg } f(z) < \tau.^2$$

So ist die Funktion

1. E. Lindelöf a. a. O., S. Kakeya a. a. O.

2. Unter $\text{Arg } \zeta$ versteht man den Hauptwert von $\arg \zeta$.

$$f_1(z) = i \log f(z)$$

dort regulär und

$$-\tau < \Re f_1(z) = -\text{Arg } f(z) < -\sigma.$$

Daher kann man mit Hilfe des Satzes IV folgenden Satz beweisen:

Satz XIV. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad \sigma < \text{Arg } c_0 < \tau, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und dort genüge den Bedingungen

$$f(z) \neq 0$$

$$\sigma < \text{Arg } f(z) < \tau.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{2(\tau - \sigma)|c_0|}{|c_\nu|\pi} \sin\left(\frac{\tau - \text{Arg } c_0}{\tau - \sigma} \pi\right)}$$

ist.

Satz XV. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad \sigma < \text{Arg } c_0 < \tau, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\sigma < \text{Arg } f(z) < \tau.$$

Es sei ferner

$$\rho > \sqrt[\nu]{\frac{2(\tau - \sigma)|c_0|}{|c_\nu|\pi} \sin\left(\frac{\tau - \text{Arg } c_0}{\tau - \sigma} \pi\right)},$$

dann besitzt $f(z)$ dort mindestens eine Nullstelle.

Für $\sigma = -\tau$ ($\tau > 0$) erhält man den

Satz XVI. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu + \dots, \quad |\text{Arg } c_0| < \tau, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort den Bedingungen

$$f(z) \neq 0$$

$$|\text{Arg } f(z)| < \tau.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{4\tau|c_0|}{|c_\nu|\pi} \cos\left(\frac{\text{Arg } c_0}{2\tau} \pi\right)}$$

ist.

8. Die folgenden Sätze kann man unmittelbar aus den oben genannten Sätzen herleiten.

Satz XVII. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu \dots, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort den Bedingungen

$$f(z) \neq 0 \\ \sigma < \operatorname{Arg} \frac{f(z)}{c_0} < \tau.$$

Dann ist für die Existenz solcher Funktion notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{2(\tau - \sigma)}{|c_\nu| \pi} \sin\left(\frac{\sigma\pi}{\tau - \sigma}\right)}$$

ist.

Satz XVIII. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_\nu z^\nu \dots, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort den Bedingungen

$$f(z) \neq 0 \\ \left| \operatorname{Arg} \frac{f(z)}{c_0} \right| < \tau.$$

Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu]{\frac{4\tau |c_0|}{|c_\nu| \pi}}$$

ist.

Für $\nu = 1$ hat man den

Satz XIX. (Lindelöf) Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_1 z \dots, \quad c_1 \neq 0$$

regulär im Kreise $|z| < \rho$ und genüge dort den Bedingungen

$$f(z) \neq 0 \\ \left| \operatorname{Arg} \frac{f(z)}{c_0} \right| < \tau.$$

Dann ist für die Existenz solcher Funktion notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \frac{4\tau |c_0|}{|c_1|\pi}$$

ist.¹

IV. Über Stern- und Rundungsschranken

9. Ich gehe zur dritten Anwendung über.

Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_\nu z^\nu + \dots, \quad c_1 \neq 0, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 2$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und bilde denselben Kreis auf den schlichten und in Bezug auf $f(0) = c_0$ sternigen Bereich ab. Dann muss $f(z)$ der Bedingung

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z) - c_0} > 0 \quad \text{für } |z| < \rho$$

genügen, und umgekehrt ist diese Bedingung auch hinreichend.²

Daher, wenn man die Funktion

$$f_1(z) = \frac{zf'(z)}{f(z) - c_0}$$

in Betracht zieht, sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Sternigkeit (in Bezug auf $f(0) = c_0$) einer Funktion durch

- (i) $f_1(z)$ ist regulär im Kreise $|z| < \rho$
- (ii) $\Re f_1(z) > 0$ für $|z| < \rho$

gegeben.

Ich möchte also hierbei den Satz beweisen, welcher lautet:

Satz XX. *Es sei die durch die Potenzreihe*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_\nu z^\nu + \dots, \quad c_1 \neq 0, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 2$$

dargestellte Funktion im Kreise $|z| < \rho$ regulär und bilde denselben Kreis auf den schlichten in Bezug auf $f(0) = c_0$ sternigen Bereich ab. Dann ist für die Existenz solcher Funktion notwendig und hinreichend, dass

1. Lindelöf a. a. O.

2. Vgl. diese Memoirs, 15 (1932).

$$\rho \leq \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu-1} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|}$$

ist.

Beweis. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_\nu z^\nu + \dots, \quad c_1 \neq 0, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 2$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und bilde denselben Kreisbereich auf den schlichten und in Bezug auf $f(0) = c_0$ sternigen Bereich ab, so ist die Funktion

$$f_1(z) = \frac{zf'(z)}{f(z) - c_0} = \frac{c_1 + \nu c_\nu z^{\nu-1} + \dots}{c_1 + c_\nu z^{\nu-1} + \dots}$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genügt dort der Bedingung

$$\Re f_1(z) > 0.$$

Ferner sind

$$f_1(0) = 1$$

$$f_1'(0) = f_1''(0) = \dots = f_1^{(\nu-2)}(0) = 0$$

$$\frac{1}{(\nu-1)!} f_1^{(\nu-1)}(0) = (\nu-1) \cdot \frac{c_\nu}{c_1} \neq 0.$$

Daher ist nach Satz I

$$\begin{aligned} \rho &\leq \theta \left\{ 1, (\nu-1) \cdot \frac{c_\nu}{c_1} ; 0 \right\} \\ &= \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu-1} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|}. \end{aligned}$$

Nun zeige ich, dass es eine Funktion gibt, die wirklich den Kreisbereich $|z| < \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu-1} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|}$ auf den schlichten in Bezug auf $f(0) = c_0$ sternigen Bereich abbildet.

Die Funktion

$$\begin{aligned} (8) \quad f(z) &= c_0 + \frac{c_1 z}{\sqrt[\frac{\nu}{\nu-1}]{1 - \frac{z^{\nu-1}}{\rho^{\nu-1}}}} \\ &= c_0 + c_1 z + \frac{2}{(\nu-1)} \cdot \frac{c_1}{\rho^{\nu-1}} z^\nu + \dots \end{aligned}$$

ist offenbar im Kreise $|z| < \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu-1} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|} = \rho$ regulär, und

$$\frac{zf'(z)}{f(z) - c_0} = \frac{1 + \left(\frac{z}{\rho}\right)^{\nu-1}}{1 - \left(\frac{z}{\rho}\right)^{\nu-1}},$$

daher ist

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z) - c_0} > 0 \quad \text{für } |z| < \rho.$$

Also bildet die Funktion (8) wirklich den Kreisbereich $|z| < \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu-1} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|} = \sqrt[\nu-1]{\frac{2\rho^{\nu-1}}{\nu-1} \cdot \frac{\nu-1}{2}} = \rho$ auf den in Bezug auf $f(0) = c_0$ sternigen Bereich ab, was zu beweisen war.

Mit anderen Worten kann man den Satz folgendermassen ausdrücken:

Satz XXI. Wenn $\rho > \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu-1} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|}$ ist, so besitzt die durch die Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_\nu z^\nu + \dots, \quad c_1 \neq 0, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 2$$

dargestellte Funktion im Kreise $|z| < \rho$ entweder singuläre Stellen oder sie bildet denselben Kreis auf den nicht schlichten und in Bezug auf $f(0) = c_0$ sternigen Bereich ab.

10. Es ist schon bekannt, dass das Bild des Kreisrandes $|z| = \rho$ bei der Abbildung

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_\nu z^\nu + \dots$$

dann und nur dann in Bezug auf $f(0) = c_0$ konvex ist, wenn das denselben bei der Abbildung

$$zf'(z) = c_1 z + \nu c_\nu z^\nu + \dots$$

schlicht und in Bezug auf den Nullpunkt sternig ist. Daher erhält man unmittelbar aus den obigen Sätzen die folgenden Sätze.

Satz XXII. Es sei die durch die Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_\nu z^\nu + \dots, \quad c_1 \neq 0, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 2$$

dargestellte Funktion im Kreise $|z| < \rho$ regulär und bilde denselben Kreisbereich auf den schlichten in Bezug auf $f(0) = c_0$ sternigen

Bereich ab. Dann ist für ihre Existenz notwendig und hinreichend, dass

$$\rho \leq \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu(\nu-1)} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|}$$

ist.

Satz XXIII. Wenn $\rho > \sqrt[\nu-1]{\frac{2}{\nu(\nu-1)} \left| \frac{c_1}{c_\nu} \right|}$ ist, so besitzt die

durch die Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_\nu z^\nu + \dots, \quad c_1 \neq 0, \quad c_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 2$$

dargestellte Funktion im Kreise $|z| < \rho$ entweder singuläre Stellen oder sie bildet denselben Kreisbereich auf den nicht schlichten und in Bezug auf $f(0) = c_0$ konvexen Bereich ab.

V. Über a -Stellen von Funktionen vom Typus (I).

11. Hierbei möchte ich einige Bemerkungen über a -Stellen der Funktionen vom Typus (I) hinzufügen.

Satz XXIV. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > A.$$

Es seien ferner z_1, z_2, \dots, z_ν die a -Stellen von $f(z)$, so ist

$$|z_1, z_2, \dots, z_\nu| \geq \left| \frac{c_0 - a}{c_0 + a - 2A} \right| \rho^\nu.$$

Beweis. Die Funktion

$$(9) \quad f_1(z) = \frac{f(z) - A - 1}{f(z) - A + 1}$$

ist im Kreise $|z| < \rho$ regulär und absolut < 1 .

Die $\frac{a-A-1}{a-A+1}$ -Stellen von $f(z)$ sind die a -Stellen von $f(z)$.

Daher ist die Funktion

$$f_2(z) = \frac{f_1(z) - \frac{a-A-1}{a-A+1}}{1 - \frac{\bar{a}-A-1}{\bar{a}-A+1} \cdot f_1(z)} \cdot \prod_{m=1}^{\nu} \left\{ \frac{\rho^2 - \bar{z}_m z}{\rho(z - \bar{z}_m)} \right\}$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und absolut < 1 . Daher ist

$$|f_2(0)| < 1,$$

d. h.

$$\left| \frac{\frac{c_0 - A - 1}{c_0 - A + 1} - \frac{a - A - 1}{a - A + 1}}{1 - \frac{c_0 - A - 1}{c_0 - A + 1} \cdot \frac{\bar{a} - A - 1}{\bar{a} - A + 1}} \right| \cdot \frac{\rho^\nu}{|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_\nu|} < 1,$$

folglich ist

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_\nu| > \left| \frac{c_0 - a}{c_0 + \bar{a} - 2A} \right| \rho^\nu.$$

Dass die Schranke

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_\nu| = \left| \frac{c_0 - a}{c_0 + \bar{a} - 2A} \right| \rho^\nu$$

wirklich vorkommt, sieht man an dem Beispiel:

$$f(z) = \frac{(A+1) - (A-1)f_1(z)}{1 - f_1(z)},$$

wobei

$$f_1(z) = \frac{\frac{a-A-1}{a-A+1} + \left\{ \frac{\rho(\lambda-z)}{\rho^2 - \lambda z} \right\}^\nu}{1 + \frac{\bar{a}-A-1}{\bar{a}-A+1} \cdot \left\{ \frac{\rho(\lambda-z)}{\rho^2 - \lambda z} \right\}^\nu}, \quad \lambda^\nu = \frac{(c_0 - a)\rho^\nu}{c_0 + \bar{a} - 2A}$$

bedeutet, w. z. b. w.

12. Es sei

$$\rho \cong |z_1| \cong |z_2| \cong \dots \cong |z_\nu|,$$

so ist

$$|z_\nu| \rho^{\nu-1} \cong |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_\nu|.$$

Daher ist

$$|z_\nu| \cong \left| \frac{c_0 - a}{c_0 + \bar{a} - 2A} \right| \rho.$$

Damit ist der Satz bewiesen :

Satz XXV. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > A.$$

Es sei ferner ρ_α den kleinste absolute Betrag der α -Stelle der Funktion, so ist

$$\rho_\alpha \geq \left| \frac{c_0 - \alpha}{c_0 + \bar{\alpha} - 2A} \right| \rho.$$

Dieser Satz heisst mit anderen Worten :

Satz XXVI. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > A.$$

Dann besitzt $f(z)$ keine α -Stelle im Kreise

$$|z| < \left| \frac{c_0 - \alpha}{c_0 + \bar{\alpha} - 2A} \right| \rho.$$

12. Wenn man $\alpha = 0$ setzt, so erhält man drei Sätze über Nullstellen der Funktionen vom Typus (1).

Satz XXVII. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge der Bedingung

$$\Re f(z) > A.$$

Es seien ferner z_1, z_2, \dots, z_ν die Nullstellen von $f(z)$, so ist

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_\nu| \geq \left| \frac{c_0}{c_0 - 2A} \right| \rho^\nu.$$

Satz XXVIII. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > A.$$

Es sei ρ_0 der kleinste absolute Betrag der Nullstelle der Funktion, so ist

$$\rho_0 \cong \left| \frac{c_0}{c_0 - 2A} \right| \rho.$$

Satz XXIX. Es sei die Funktion

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > A.$$

Dann besitzt $f(z)$ keine Nullstelle im Kreise

$$|z| < \left| \frac{c_0}{c_0 - 2A} \right| \rho.$$

VI. Über die Schlichtheitschranke der Funktionen vom Typus (I)

13. Schliesslich möchte ich die Schlichtheitschranke der Funktionen vom Typus (I) hinzufügen.

Die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{\frac{f(z) - A - i\Im c_0}{\Re c_0 - A} - 1}{\frac{f(z) - A - i\Im c_0}{\Re c_0 - A} + 1}$$

ist im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genügt dort der Bedingung

$$|\varphi(z)| < 1.$$

Daher ist nach einem bekannten Satze

$$(10) \quad |\varphi(z)| \cong \frac{\frac{|c_1| \rho}{2(\Re c_0 - A)} - \frac{|z|}{\rho}}{1 - \frac{|c_1|}{2(\Re c_0 - A)} |z|} \cdot \frac{|z|}{\rho} \quad \text{für} \quad |z| < \frac{|c_1| \rho^2}{2(\Re c_0 - A)}.$$

Es sei nun

$$\varphi(z_1) = \varphi(z_2) = a, \quad |a| < 1, \quad a: \text{beliebig}$$

für $|z_1| = |z_2| = r < \rho$ ($z_1 \neq z_2$), da aber

$$|z_1 \cdot z_2| \cong |a| \rho^2$$

so ist

$$|a| \leq \frac{r^2}{\rho^2}$$

und nach (10) ist

$$|a| \geq \frac{\frac{|c_1|\rho}{2(\Re c_0 - A)} - \frac{r}{\rho}}{1 - \frac{|c_1|r}{2(\Re c_0 - A)}} \cdot \frac{r}{\rho}$$

Damit ist

$$\frac{r}{\rho} \geq \frac{\frac{|c_1|\rho}{2(\Re c_0 - A)} - \frac{r}{\rho}}{1 - \frac{|c_1|r}{2(\Re c_0 - A)}}$$

woraus die Ungleichung

$$r^2 - \frac{4(\Re c_0 - A)}{|c_1|} r + \rho^2 \leq 0$$

folgt, d. h.

$$r \geq \frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_1|} - \sqrt{\frac{4(\Re c_0 - A)^2}{|c_1|^2} - \rho^2}$$

Daher erhält man den Satz, welcher lautet:

Satz XXX. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > A.$$

Dann bildet $f(z)$ den Kreisbereich

$$|z| < \frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_1|} - \sqrt{\frac{4(\Re c_0 - A)^2}{|c_1|^2} - \rho^2}$$

auf den schlichten Bereich ab.

Die hiermit gewonnene Schranke

$$\rho_s = \frac{2(\Re c_0 - A)}{|c_1|} - \sqrt{\frac{4(\Re c_0 - A)^2}{|c_1|^2} - \rho^2}$$

kann durch keine grösseren Wert ersetzt, weil sie bei der Funktion

$$f(z) = A + i\Im c_0 + (\Re c_0 - A) \cdot \frac{\rho^2 - \frac{|c_1|\rho^2}{\Re c_0 - A} z + z^2}{\rho^2 - z^2}$$

$$= c_0 - |c_1|z + \dots$$

erreichbar ist.

14. Wenn man hier $A=0$ setzt, so erhält man den Satz über die Schlichtheitschranke der Funktionen mit positivem Realteil. Der Satz lautet:

Satz XXXI. *Es sei die Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

im Kreise $|z| < \rho$ regulär und genüge dort der Bedingung

$$\Re f(z) > 0.$$

Dann bildet $f(z)$ den Kreisbereich

$$|z| < \frac{2\Re c_0}{|c_1|} - \sqrt{\frac{4(\Re c_0)^2}{|c_1|^2} - \rho^2}$$

auf den schlichten Bereich ab.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Toshizô Matsumoto meinen herzlichsten Dank für seine wertvollen Ratschläge aussprechen.