

Sur le Trajet d'un Rayon Sonore dans une Couche peu Profonde d'Eau de Mer

Par

Kiugoro Kitagawa

(Reçu le 20 juin, 1933)

Sommaire

Étudiant au point de vue des variations de la température les lois de croissance linéaire de la compressibilité et de la densité des eaux de mer suivant leur profondeur dans la mer, on en déduit une formule sur la vitesse de propagation des ondes sonores comme fonction de la profondeur. En conséquence, on arrive à une équation exprimant le trajet du rayon sonore dans la mer, dont la forme est parabolique et tout à fait semblable à celle que l'on a déjà récemment trouvée.

§ 1. Préambule

Dans une Note précédente¹, nous avons étudié dans la mer normale, d'une salinité de 35‰ et à 0° C, la propagation des ondes sonores, dont la vitesse est en rapport de la pression variable une fonction de la profondeur z comptée en descendant à partir de la surface de la mer, et trouvé que, dans le cas simple, le trajet du rayon sonore a une forme parabolique convexe vers le fond. L'influence de l'augmentation de pression dans la mer sur la vitesse prend en couche assez profonde de l'importance, alors qu'elle est en couche peu profonde de niveau à: $z=1$ km, négligeable, et est, grâce aux données extraites des tableaux de M. Bjerknes, une vitesse constante².

Ainsi donc la vitesse du rayon sonore ne dépend en couche peu profonde que de la variation de la température, supposant la salinité normale. Quel est le régime de propagation des ondes sonores? Le découvrir, c'est le but du présent travail.

1. K. Kitagawa, *Ce Mémoire*, 15, 327 (1932).

2. K. Kitagawa, *loc. cit.* 328.

§ 2. Distribution verticale de la température des eaux de mer

Il ne peut être question ici de rechercher une loi exacte traduisant en réalité une correspondance des températures avec les profondeurs, car la mer naturelle est essentiellement variable dans le temps et dans l'espace, au moins jusqu'à 500 mètres de profondeur. Quel est donc le régime de distribution verticale de la température des eaux de mer en fonction de la profondeur? Pour l'établir, on applique, comme état naturel et moyen des océans, des données extraites de celles qui sont rapportées sur le Pacifique Nord par le bateau à vapeur Challenger comme suit (Tableau I).

Tableau I

profondeur z m.	0	80	160	320	480
temp. moyenne t° C	24,9	20,5	16,4	10,1	7,4

Supposons que les couches horizontales des eaux de mer soient superposées, et distinguons les deux cas suivants, afin de représenter en fonction linéaire de la profondeur z la température t , bien que l'expression de celle-là soit en général assez compliquée par rapport à celle-ci. On peut donc avoir recours à une ligne droite définie par l'équation

$$t = Az + B \dots\dots\dots(1)$$

A et B étant déterminés par les données du tableau I, et z restant borné entre certaines valeurs.

I^o Cas, où la profondeur z varie depuis zéro jusqu'à 160 mètres.

Substituant successivement pour t et z dans (1) les valeurs des trois premières colonnes du tableau I, on a, entre des quantités A , B à déterminer, trois équations d'observation qui sont incompatibles. En appliquant la méthode des moindres carrés, on obtient un système de deux équations normales, dont la résolution nous donne

$$t = -0.0531 z + 24.848 \dots\dots\dots(2)$$

valable jusqu'à 160 mètres.

II^o Cas, où la profondeur z varie depuis 160 jusqu'à 480 mètres.

Le raisonnement et la méthode de calcul précédents s'appliquent de même ici. Par l'emploi des données des trois dernières colonnes du tableau I, on aura de façon correspondante :

$$t = -0.0281 z + 20.29 \dots\dots\dots(3)$$

z restant compris entre 160 et 480 mètres.

§ 3. Loi de croissance linéaire de la compressibilité des eaux de mer avec leur profondeur

On a, d'après M. V. W. Ekman¹, la formule suivante qui représente la compressibilité moyenne μ des eaux de mer en fonction de leur température t° C et de leur pression p bars, $p=0$ correspondant à la pression atmosphérique.

$$10^8 \mu = \frac{4886}{1 + 0.000183 p} - [227 + 28.33 t - 0.551 t^2 + 0.004 t^3] + \frac{p}{1000} [105.5 + 9.50 t - 0.158 t^2] - \frac{1.5 p^2 t}{1000000} - \frac{\sigma_0 - 28}{10} [147.3 - 2.72 t + 0.04 t^2 - \frac{p}{1000} (32.4 - 0.87 t + 0.02 t^2)] + \frac{(\sigma_0 - 28)^2}{100} [4.5 - 0.1 t - \frac{p}{1000} (1.8 - 0.06 t)].$$

En prenant $\sigma_0=28$ et $p=0$ dans notre cas, on obtient

$$10^8 \mu = 4659 - 28.33 t + 0.551 t^2 - 0.004 t^3.$$

On en calcule les valeurs numériques μ , qui sont consignées dans le tableau II suivant :

Tableau II

t° C	5	10	15	20	25
$10^8 \mu$	4531	4427	4345	4281	4233

Cette relation est tracée sur la figure anexe (Fig. 1), dont on remarque la courbe presque rectiligne. En effet, on peut voir qu'elle satisfait à la condition de la droite, le dérivé secondaire de μ par rapport à t étant négligeable.

Par conséquent, supposons qu'il y ait une relation linéaire

$$10^8 \mu = At + B.$$

En remplaçant μ et t successivement par les paires des données du tableau II dans cette équation, on en arrive à cinq équations d'ob-

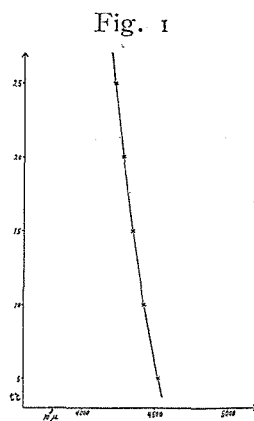


Fig. 1

1. M. V. W. Ekman, Die Zusammendrückbarkeit des Meerwassers usw. Publ. de Circ. Nr. 43 (1908)

servation. Dès lors, en déduisant les équations normales, la résolution de ce système définit la forme cherchée

$$10^8 \mu = 4586 - 14.84t \dots \dots \dots (4)$$

t restant compris entre 5°C et 25°C .

Nous trouvons donc, par la combinaison de l'équation (2) avec l'équation (4), l'équation rapportée au cas I.

$$10^8 \mu = 4217.25 + 0.788z \dots \dots \dots (5)$$

De même, par la combinaison de l'équation (3) avec (4), on obtient l'équation rapportée au cas II.

$$10^8 \mu = 4284.89 + 0.417z \dots \dots \dots (6)$$

§ 4. Loi de croissance de la densité des eaux de mer avec leur profondeur

En introduisant, d'après M. Ekman, l'excès σ_t de la densité ρ définie par la formule suivante

$$\rho = 1 + 10^{-3} \sigma_t$$

et en prenant pour la salinité normale $\sigma_0 = 28$, on obtient les valeurs numériques suivantes (Tableau III).

Tableau III

$t^\circ\text{C}$	Cas I					Cas II				
	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6
σ_t	23.544	24.119	24.662	25.171	25.646	26.084	26.486	26.849	27.171	27.450

L'excès σ_t s'exprime en fonction presque linéaire de la température t comme on le voit (Fig. 2).

Pour mieux satisfaire à la condition de distribution linéaire, on partage l'étude de l'excès en deux cas comme nous l'avons fait plus haut.

Dans le cas I, déduisant par l'emploi de la méthode des moindres carrés comme précédemment cinq équations d'observation, puis deux équations normales, on les résout. On obtient :

$$\sigma_t = 29.8844 - 0.2628t$$

On en déduit, en vertu de (2), la relation suivante :

$$\sigma_t = 23.3543 + 0.013955z \dots (7)$$

Dans le cas II, on déduit de la même manière l'équation suivante :

$$\sigma_t = 28.6009 - 0.1806t.$$

Par suite,

$$\sigma_t = 24.9365 + 0.05075z \dots (8)$$

§ 5. Vitesse de propagation des ondes sonores comme fonction de la profondeur

Désignant par V la vitesse de propagation des ondes sonores dans la mer, on obtient comme on le sait

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} \dots (9)$$

Dans le cas I, réunissant (5) et (7), on en déduit comme première approximation l'expression de V en fonction de la profondeur z .

$$V = 1522(1 - 1.0 \times 10^{-4} z) \frac{\text{mètre}}{\text{sec.}} \dots (10)$$

jusqu'à 160 mètres.

Dans le cas II, réunissant (6) et (8), on obtient de même

$$V = 1509(1 - 7.3 \times 10^{-5} z) \frac{\text{mètre}}{\text{sec.}} \dots (11)$$

valable pour les profondeurs entre 160 et 480 mètres.

Opérons dans cette équation la substitution suivante :

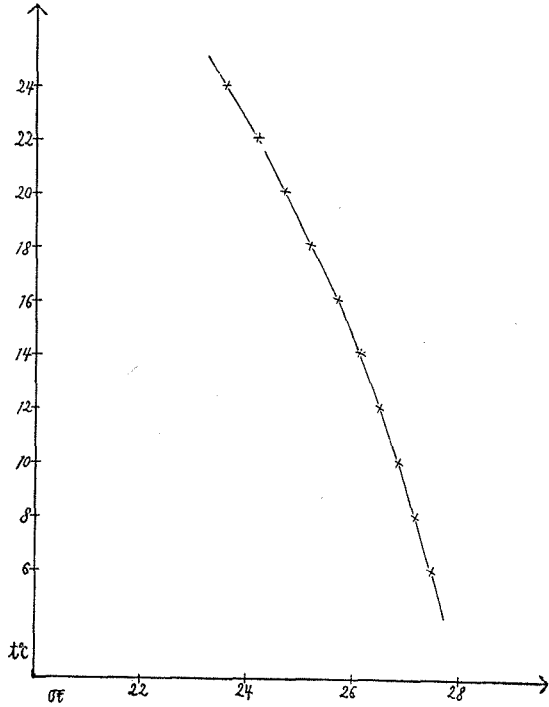
$$z = z_1 + 160$$

elle s'écrit :

$$V = 1491(1 - 7.3 \times 10^{-5} z_1) \dots (11 \text{ bis})$$

z_1 variant de zéro à 320 mètres.

Fig. 2



En fin de calcul, on arrive à la forme suivante

$$V = C_0(1 - az) \dots\dots\dots(12)$$

C_0 et a désignant à chaque fois les constantes convenables.

Il faut donc admettre comme nous l'avons dit plus haut (page 289), que le coefficient $\frac{1}{2} a_p = 1.19 \times 10^{-7}$, calculé dans notre mémoire précédent au point de vue de la variation de la pression hydrolique en mer, est négligeable par rapport à celui qui est trouvé dans le présent cas au point de vue des variations de la température des eaux de mer.

§ 6. Trajet de propagation des ondes sonores

Supposons que, pour simplifier, la loi de réfraction du rayon sonore soit applicable aux couches horizontales des eaux de mer

$$\frac{V}{\sin \varphi} = C$$

φ étant l'angle d'incidence. En conséquence, on aura l'équation du trajet de la propagation des ondes sonores comme suit¹:

$$x = \int \frac{V dz}{\sqrt{C^2 - V^2}} \dots\dots\dots(13)$$

en prenant le niveau de la mer pour plan des xy , l'axe z étant dirigé vers le bas. Intégrons cette équation, en tenant compte de l'équation (12). On obtient

$$x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{C^2}{C_0^2} - (1 - az)^2} + \text{const.}$$

Supposons que l'origine des coordonnées se trouve sur le trajet, $C = C_0$, et $\text{const.} = 0$, on en déduira l'équation :

$$az = 1 - \sqrt{1 - a^2 x^2}$$

en substituant x à z .

Développons ce membre gauche en série de Maclaurin, et négligeons les puissances plus élevées de x^2 ; nous obtenons une formule approchée, bien suffisante pour les besoins pratiques², comme suit (Fig. 3).

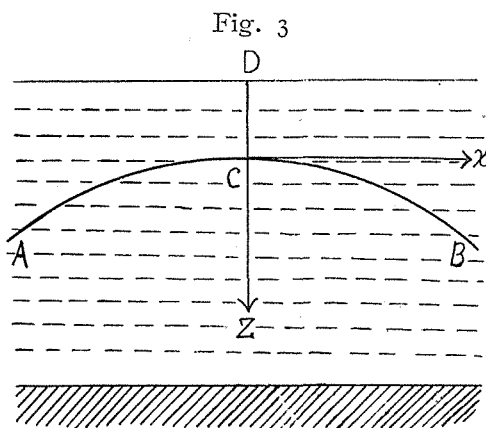
$$x^2 = \frac{2}{a} z \dots\dots\dots(13)$$

1 Lord Rayleigh, Theory of Sound, 2, 131 (1926)

2 Lord Rayleigh, loc. cit.

α étant 1.0×10^{-4} dans le cas I, où z varie depuis zéro jusqu'à 160 mètres, et 7.3×10^{-5} dans le cas II, où z reste borné entre 160 et 480 mètres. L'équation (13) est de la même forme que celle que nous avons déjà achevée¹, sauf l'inversion du sens de l'axe z : l'un dirigé vers le bas, l'autre dirigé vers le haut.

Comme conclusion, j'ai l'agréable devoir de remercier très vivement M. le professeur T. Nomitsu de m'avoir autorisé à faire état de mes recherches antérieures dans le présent travail qui a des rapports intimes avec mon mémoire précédent, et d'avoir bien voulu me donner des renseignements très utiles pour ce travail.



¹ K. Kitagawa, loc. cit. 337; et H. Lichte, Ueber den Einfluss horizontaler Temperaturschichtung des Seewassers auf die Reichweite von Unterwasserschallsignalen, Phys. Zeitschr. 20, 385 (1919)