Note sur les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi d'un corps liquide, ayant une masse finie au centre

Par

Kiyosi Yamamura

(Reçu le 18 juillet, 1933)

Le problème des figures d'équilibre d'un corps liquide en rotation uniforme a été étudié par beaucoup de savants illustres. Or dans une étoile actuelle la densité n'est pas uniforme, mais elle devient de plus en plus grande en mesure qu'on s'approche du centre. En particulier une hypothèse proposée par E. A. Milne[1] nous a montré que la densité du corps de l'étoile n'est pas continue uniformément, mais que près de centre elle devient brusquement très grande. En conséquence il me semble qu'il est utile d'étudier, comme approximation des figures d'équilibre d'une étoile actuelle, les figures d'équilibre d'un corps liquide en rotation uniforme dont la densité a deux valeurs différentes, celle près du centre étant la plus haute. Mais il est très difficile de traiter d'une façon générale ce problème où les dimensions de deux parties de densités différentes sont finies.

Dans cette note nous allons considérer seulement dans le problème ci-dessus le cas où un corps liquide de densité uniforme a une masse finie concentrée au centre, c'est-à-dire en un point. Il est facile de voir qu'il y a des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi comme figures d'equilibre. En désignant par $\bar{\rho}$, ω et f la densité moyenne d'un corps renferment sa masse au centre, la vitesse angulaire constante et la constante de la gravitation respectivement, nous allons voir que la valeur maximum de la quantité $\dfrac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}$ varie suivant du rapport entre

1. E. A. Milne; M. N. **91**, pp. 4—55 (1930).

la masse au centre M_c et la masse extérieur M_e. Dans le cas ordinaire on sait que la quantité $\dfrac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}$ joue un rôle très important.

§ 1. *Cas des ellipsoïdes de Maclaurin.*

Comme cas ordinaire, soient a et c, les deux semi-axes où a est plus grand que c. En posant $l=\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}$, l'expression de $h=\dfrac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}$ est très facilement dérivée comme suit :

$$(1)\quad h=\left(\frac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}\right)_0\left(1-\frac{M_c}{M_c+M_e}\right)+\frac{4}{3}\,\frac{M_c}{M_c+M_e}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+l^2}}\right),$$

où $\left(\dfrac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}\right)_0$ est l'expression de h dans le cas ordinaire[1], c'est-à-dire,

$$(2)\quad \left(\frac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}\right)_0=\frac{(3+l^2)\arctan l-3l}{l^3}.$$

Tableau 1.

Mc/Me	h
0.0	0.224
0.1	0.28
0.2	0.34
0.5	0.48
1.0	0.67
∞	1.33

Le maximum de h pour la valeur fixe de M_c/M_e a lieu pour l plus grande que 2.53..., — la valeur correspondante au maximum de h dans le cas où $M_c=0$ — et celui-ci augmente sans limite avec M_c/M_e. Ainsi il peut exister des ellipsoïdes avec les grandes valeurs de h dont les applatissement sont aussi grands que possible si l'on prend une valeur assez grande de M_c/M_e. On trouvera dans le tableau 1 les maximums de h calculés pour les quelques valeurs différentes de M_c/M_e.

§ 2. *Cas des ellipsoïdes de Jacobi.*

Soient a, b et c les trois semi-axes où $a>c$ et $b>c$. Posant $s=\dfrac{c^2}{a^2}<1$ et $t=\dfrac{c^2}{b^2}<1$, on aura pour h l'expression suivante :

$$(3)\quad h=\left(\frac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}\right)_0\left(1-\frac{M_c}{M_c+M_e}\right)+\frac{M_c}{M_c+M_e}\cdot\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{st}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}},$$

où

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\omega^2}{2\pi f\bar{\rho}}\right)_0=st\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)(1+tx)\Delta}, \\ \Delta=\sqrt{(1+sx)(1+tx)(1+x)}\,. \end{cases}$$

1. P. Appel : Traité de Mécanique rationnelle t. IV. pp. 49—70 (1921).

Comme cas ordinaire nous pouvons déduire une autre équation qui lie les deux quantités s et t.

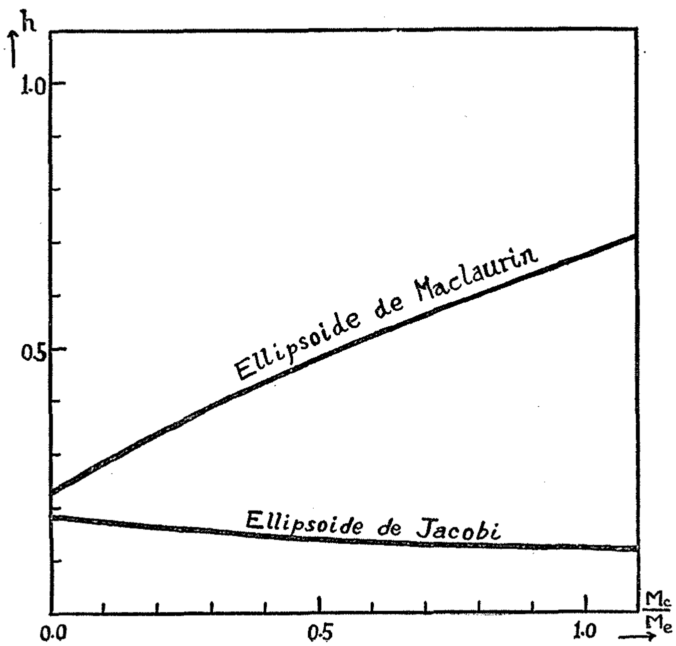
$$(5) \quad 0=(1-s-t)\int_0^\infty \frac{x dx}{\Delta^1} - st\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\Delta^3} + \frac{4}{3}\frac{M_c}{M_e} \times \frac{\sqrt{s}+\sqrt{t}-\sqrt{ts}-s-t}{\sqrt{st}\,(\sqrt{s}+\sqrt{t})}.$$

En partant des équations (3) et (5) on peut tirer par une méthode analogue au cas ordinaire une conséquence similaire, c'est-à-dire que le maximum de h a lieu pour $a=b$ ou $s=t$. Les valeurs correspondantes de $s=t$ augment de 0.339...à 0.444...suivant que M_c/M_e augmente de 0 à ∞. En conséquence, au voisinage de la valeur maximum de h, les applatissements des ellipsoïdes ne deviennent pas aussi grands avec M_c/M_e que dans le cas premier.

Tableau 2.

Mc/Me	h
0.0	0.187
0.1	0.17
0.2	0.16
0.5	0.14
1.0	0.12
∞	0.08

Figure 1



Les valeurs maximums de h correspondantes aux quelques valeurs de M_c/M_e sont données dans le tableau 2.

Conclusion.

Nous voyons dans la figure 1 comment varie le maximum de h avec la valeur M_c/M_e, correspondant aux deux cas considérés plus haut.

Comme conséquence nous devons faire attention à l'influence de la concentration centrale, quand la stabilité et les figures d'équilibre des étoiles actuelles en rotation sont considérées.

Je tiens à exprimer, en terminant, ma reconnaissance à M. le professeur T. Araki pour ses suggestions qui m'ont été très utiles.