Note sur une Intégrale de l'Équation de la Propagation du Son dans la Mer

par

Kiugoro Kitagawa

(Reçu le 11 décembre, 1933)

Sommaire

Dans une précédente Note[1], on a établi l'équation de la propagation du son dans la mer, et cherché sous une forme élementaire son intégrale, en déduisant quelques résultats. Le présent travail a pour objet de trouver sous la forme d'onde radiale et progressive une intégrale de cette équation.

§1 Une intégrale sous la forme d'onde radiale et progressive

Désignant par u_1 la vitesse de propagation d'une onde sonore à un point de profondeur z_1 dans la mer, on peut aisément la calculer par la formule suivante :

$$u_1 = u_0(1 + az_1)$$

avec $$u_0 = 2.08 \times 10^{10}, \quad a = 2.38 \times 10^{-7}.$$

Prenons ce point envisagé comme origine des coordonnées et le plan horizontal comme plan des xy, l'axe z étant dirigé vers le bas. En conséquence, on aura l'équation de propagation du son dans la mer comme suit :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = u_1^2(1 + az)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Delta + 2u_1^2 a \frac{\partial \Delta}{\partial z} \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

en appelant Δ la dilatation cubique.

Employons de préférence les coordonnées polaires posant

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \; y = r \sin\theta \sin\varphi, \; z = r\cos\theta,$$

---

1 K. Kitagawa, Ce Mémoire, **15**, 327 (1932)

et proposons-nous d'exprimer les paramètres différentiels de Δ dans (1) au moyen des dérivées partielles de Δ par rapport aux nouvelles variables r, θ et φ. On aura donc l'équation de propagation du son

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}=u_1^2(1+ar\cos\theta)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Delta)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}\right)\right]$$
$$+2u_1^2a\left[\cos\theta\frac{\partial\Delta}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}\right]\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

en négligeant des dérivées partielles de Δ par rapport à φ, en raison de la symétrie avec l'axe $\theta=0$.

Si l'on suppose préalablement a très petit, on aura l'onde sphérique dont l'équation se déduit de (2).

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}=\frac{u_1^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Delta)$$

Son intégrale est de la forme suivante:

$$\Delta=\frac{C}{r}e^{i\sigma\left(t-\frac{r}{u_1}\right)}$$

σ et C étant deux constantes arbitraires.

Par conséquent, cherchons à satisfaire à l'équation (2) par une fonction de la forme:

$$\Delta=\frac{C}{r}e^{i\sigma\left[t-\frac{r}{u_1}f(r,\theta)\right]}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$f(r,\theta)$ étant une fonction auxiliaire dont la grandeur absolue est comparable à une unité.

En le portant dans l'équation (2), on en déduira deux équations qui déterminent la forme de $f(r,\theta)$: à savoir d'une part comme membre réel

$$(1+ar\cos\theta)\left[\left(f+r\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2\right]+2a\frac{u_1^2}{\sigma^2}\frac{\cos\theta}{r}=1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

et d'autre part comme membre imaginaire

$$(1+ar\cos\theta)\left[\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]$$
$$+2a\cos\theta\left(r\frac{\partial f}{\partial r}+f\right)-2a\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}=0\quad\ldots(5)$$

Supposons que, pour simplifier, la fonction $f(r, \theta)$ s'exprime comme série de puissances de $ar \cos\theta$:

$$f(r, \theta) = 1 + D_1 ar \cos\theta + D_2(ar \cos\theta)^2 + \quad \ldots\ldots\ldots(6)$$

D_1, D_2...étant des constantes à déterminer, $ar\cos\theta$ variant de zéro à 0.238.

Opérons dans l'équation (4) la substitution (6), et négligeons comme première approximation le paramètre différentiel de $\varDelta$ par rapport à θ devant celui de $\varDelta$ par rapport à r, en tenant compte de la forme à peu près sphérique de front d'onde, et puis le dernier terme à membre gauche devant le permier terme, le coefficient $\alpha\frac{u_1^2}{\sigma^2}$ étant très petit. En conséquence, on aura

$$(1 + 4D_1)ar\cos\theta + (4D_1 + 4D_1^2 + 6D_2)(ar\cos\theta)^2 + \ldots\ldots = 0.$$

En égalant à zéro chacun de ces coefficients, il viendra

$$D_1 = -\frac{1}{4}, \quad D_2 = \frac{1}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6 \text{ bis})$$

Ainsi on a déterminé la fonction $f(r, \theta)$ qui satisfait aussi approximativement à l'équation (5), en vertu des raisonnements précédents.

Remplaçons $f(r, \theta)$, pour l'expliquer, dans le premier membre de l'équation (5) par son développement en série (6) ; on obtiendra :

Le premier membre de (5)

$$\begin{aligned}= a\cos\theta[2 + D_1 + (5D_1 + 4D_2)ar\cos\theta \\ + (10D_2 + 9D_3)a^2r^2\cos^2\theta + \ldots] \quad \ldots(5 \text{ bis})\end{aligned}$$

en négligeant comme cité plus haut le paramètre différentiel de $f(r, \theta)$ par rapport à θ devant celui de f par rapport à r.

En portant la relation (6 bis) dans cette formule (5 bis), on aura

$$= a\cos\theta\left[\frac{7}{4} - \frac{3}{4}ar\cos\theta + \frac{35}{64}a^2r^2\cos^2\theta - \ldots\right]$$

peut-être au plus de l'order de 10^{-7}, $a\cos\theta$ variant de zéro à 2.38×10^{-7}. On voit ainsi que la solution (6) satisfait avec (6 bis) à la première condition rapportée au membre réel (4), et aussi approximativement à la deuxième condition rapportée au membre imaginaire (5).

Par suite, nous avons trouvé sous la forme d'onde radiale et progressives une intégrale de l'équation de propagation du son dans la mer comme suit :

$$\varDelta=\Sigma\frac{C}{r}e^{i\sigma\left[t-\frac{r}{u_1}\left(1-\frac{1}{4}\alpha r\cos\theta+\frac{1}{8}\alpha^2r^2\cos^2\theta-\dots\right)\right]}$$

..................................(3 bis)

σ et C étant deux constantes arbitraires qui se déterminent par des conditions assujetties.

§ 2 Les fronts d'onde et les trajets de rayon sonore

Un système des fronts d'onde sonore se déduira de l'équation (3 bis) comme il suit :

$$r\left(1-\frac{1}{4}ar\cos\theta\right)=A \qquad \dots\dots\dots\dots(7)$$

en négligeant les puissances supérieures à $(ar\cos\theta)^2$, A désignant un paramètre.

Puis l'équation (7) s'écrira sous la forme :

$$r=A\left(1+\frac{a}{4}A\cos\theta\right) \qquad \dots\dots\dots\dots(8)$$

en négligeant les puissances supérieures à $\left(\frac{a}{4}A\cos\theta\right)^2$.

Cette équation (8) permet de calculer des coordonnées des fronts d'onde, en faisant successivement les substitutions, par exemple,

$$\frac{a}{4}A=0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ \text{et}\ 0.3$$

c'est-à-dire

$$A=8.40\times10^5,\ 16.81\times10^5,\ 33.61\times10^5,\ \text{et}\ 50.42\times10^5.$$

On en calcule des coordonnées des points r qui se trouvent sur chaque front d'onde sonore (8), (Tableau I).

Tableau I. r des fronts d'onde

A \ θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$	$\times10^5$
$A_0=8.40$	8.82	7.76	8.68	8.61	8.40	8.19	8.11	8.04	7.98
$A_1=16.81$	18.49	18.29	17.99	17.65	16.81	15.96	15.62	15.35	15.12
$A_2=33.61$	40.33	39.43	38.36	36.97	33.61	30.25	28.89	27.79	26.89
$A_3=50.42$	65.54	63.52	61.10	57.98	50.42	42.86	39.73	37.32	35.29

Cherchons maintenant un système des trajets de rayon sonore, qui coupent orthogonalement les fronts d'onde.

Différentiant r dans (7) par rapport à θ, il viendra

$$\frac{1}{r}\;\frac{dr}{d\theta}=-\frac{a}{4}r\sin\theta\left(1+\frac{a}{2}r\cos\theta\right).$$

En substituant $-r\dfrac{d\theta}{dr}$ au lieu de ce membre gauche, on aura comme première approximation

$$\tan\frac{\theta}{2}=Be^{\frac{\alpha}{4}r} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(9)$$

qui représente un système des trajets de rayon sonore, B étant un paramètre.

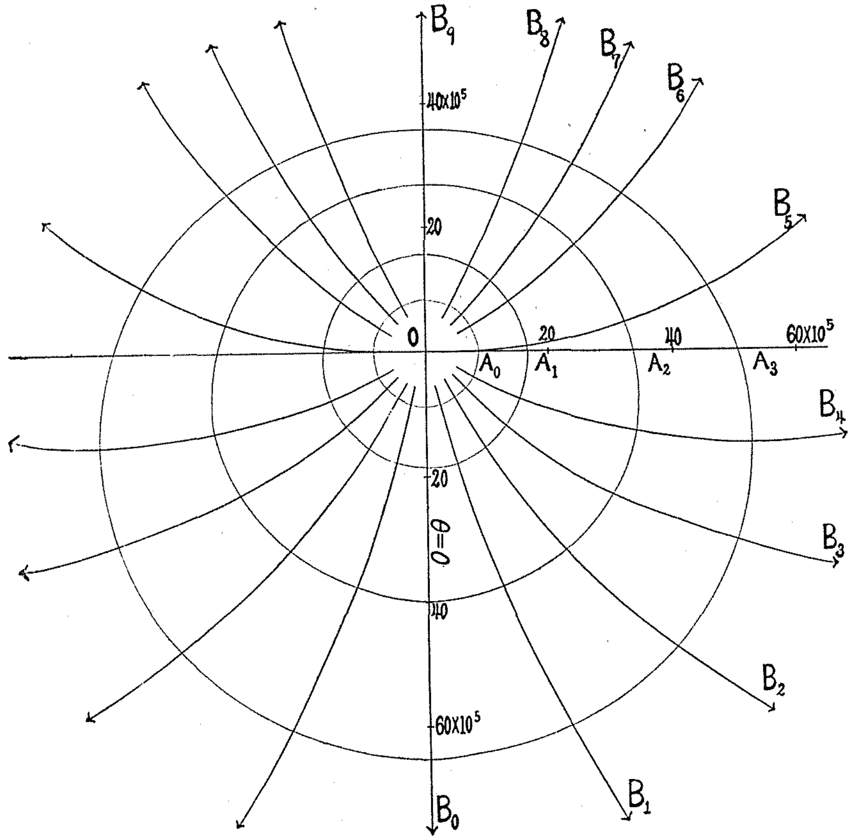
On en calcule des valeurs numériques des coordonnées θ qui sont consignées dans le tableau II suivant :

Tableau II. θ des trajets de rayon

B \ $\frac{\alpha}{4}r$ / r	0.05 8.40×10^5	0.1 16.81×10^5	0.2 33.61×10^5	0.3 50.42×10^5
$B_0=0$	0°	0°	0°	0°
$B_1=0.1253$	15°	15° 46′	17° 24′	19° 12′
$B_2=0.2550$	30°	31° 28′	34° 36′	38° 0′
$B_3=0.3941$	45°	47° 4′	51° 24′	56° 2′
$B_4=0.5493$	60°	62° 32′	67° 42′	73° 8′
$B_5=0.9515$	90°	92° 52′	98° 34′	104° 12′
$B_6=1.648$	120°	122° 28′	127° 10′	131° 36′
$B_7=2.297$	135°	137° 0′	140° 46′	144° 16′
$B_8=3.551$	150°	151° 24′	154° 2′	156° 26′
$B_9=\infty$	180°	180°	180°	180°

La relation exprimée d'entre les tableaux I et II est traçée sur la figure annexé (Fig. I), dont on trouve des fronts d'onde sonore A_0 A_1 A_2 et A_3, et des trajets de rayon sonore B_0 B_1 B_2 et B_3....

Fig. 1. Fronts et Rayons



§ 3 Le trajet d'un rayon sonore à forme parabolique

L'équation (9) représente une famille des trajets des rayons sonores émises de l'origine des coordonnées O (Fig. I). Nous nous proposons ici d'en déduire une équation du trajet d'un rayon sonore dont le vertex se confond avec l'origine des coordonnées.

Posant dans l'équation (9) $r=0$ et $\theta=\frac{1}{2}\pi$, on en déduira

$$B=1.$$

On aura donc :

$$\tan\frac{\theta}{2}=e^{\frac{a}{4}r} \qquad \text{.......................(10)}$$

C'est l'équation demandée, qui s'exprimera comme suit :

$$\frac{x}{z} = \frac{1+e^{\frac{\alpha}{2}r}}{1-e^{\frac{\alpha}{2}r}}$$

ou bien

$$\frac{1-\dfrac{z}{x}}{1+\dfrac{z}{x}} = e^{\frac{\alpha}{2}x\sqrt{1+\left(\frac{z}{x}\right)^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

en tenant compte des relations $x=r\sin\theta$, $z=r\cos\theta$.

Développons en séries de puissances de $\frac{z}{x}$ plus petit que l'unité les deux membres de (11), et négligeons les puissances supérieures à $\left(\frac{z}{x}\right)^2$; nous en obtenons

$$1-2\frac{z}{x} = 1+\frac{a}{2}x$$

c'est-à-dire

$$x^2 = \frac{4}{a}z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

en changeant le sens des z comptés maintenant vers le haut. Cette équation représente à forme parabolique le trajet d'un rayon sonore dans la mer ; elle s'accord avec le résultat récemment achevé en vertu de la loi de réfraction[1].

Dans une précédente Note[2], on a établi l'équation d'une famille des fronts d'onde, en égalant la dilatation cubique à une constante arbitraire, le temps t étant un paramètre. Cette hypothèse n'est pas rigoureuse, lorsque l'amplitude d'onde est une fonction de position ; par conséquent, il faut la modifier comme nous l'avons faite plus haut.

Je prie, en terminant, M. le professeur T. Nomitsu de bien vouloir trouver ici l'expression de ma plus vive reconnaissance pour ses précieuses critiques.

1 K. Kitagawa, Ce Mémoire, **16**, 294 (1933).
2 K. Kitagawa, Ce Mémoire, **15**, 334 (1932).