

# Zur Theorie der Kalziumchromosphäre

Von

Michinori Kurihara

(Eingegangen am 13. Dezember 1933)

---

## Auszug

In dieser Abhandlung hat der Verfasser erstens den Einfluss des „Flügeleffektes“ der Absorptionslinie auf die Dichteverteilung der nach aussen strömenden  $\text{Ca}^+$ -Chromosphäre von Woltjer untersucht (§§ 1 u. 2) und zweitens die Änderung des Ionisationszustandes erörtert (§ 3).

*Einleitung.* J. Woltjer<sup>1</sup> hat darauf hingewiesen, dass in der Sonnenchromosphäre der auf das Kalziumatom wirkende Lichtimpuls grösser als der Impuls der Gravitation ist; er hat nämlich als das Verhältnis der beiden Impulse 1.38 gefunden, indem er den von A. Zwaan abgeschätzten Wert des Emissionskoeffizienten des  $\text{Ca}^+$ -Atom angenommen hat. Und er hat eine aus nach aussen strömenden  $\text{Ca}^+$ -Atomen bestehende Chromosphäre betrachtet und gezeigt, dass die Dichte solcher Chromosphäre in hohen Schichten approximativ umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Höhe ist. Dabei hat er zwei Voraussetzungen gemacht: dass eine vertikale Kraft von konstantem Betrag vorhanden ist und dass man die Übergänge von  $\text{Ca}^+$  zu  $\text{Ca}^{++}$  oder zu  $\text{Ca}$  vernachlässigen kann.

In dieser Abhandlung sollen diese Voraussetzungen etwas genauer betrachtet werden.

In bezug auf die erstere, wie Woltjer selbst auch bemerkt hat, müssen wir den sogenannten Flügeleffekt<sup>2</sup> berücksichtigen, der den Lichtdruck als eine Funktion der Geschwindigkeit ändert. Wenn man diesen Effekt in Betracht zieht, so erhält man als Dichteverteilung das

---

<sup>1</sup> B. A. N. 167 (1929)

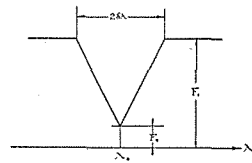
<sup>2</sup> E. A. Milne, M. N. 86, S 459 (1926)

Gesetz: Dichte  $\propto 1/\text{Höhe}$  für hinreichend grosse Höhen anstatt des Gesetzes von Woltjer. (Vgl. §§ 1, 2.)

In bezug auf die zweite Voraussetzung haben wir nicht nur die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Ca-Atom durch Ionisation in ein Ca-Atom verwandelt, sondern auch die Wahrscheinlichkeit für den entgegengesetzten Prozess betrachtet, der durch den Zusammenstoss zwischen Atom und Elektron verursacht wird. In § 3 haben wir den Einfluss dieser beiden Übergänge auf die Dichteverteilung untersucht.

§ 1. Wir wollen nach E. A. Milne der Einfachheit halber annehmen, dass die ursprüngliche Absorptionslinie V-förmig ist. (Fig. 1.) Bezeichnet man mit  $v$ ,  $n$  die Geschwindigkeit bzw. die Anzahl der Atome pro Einheitsvolumen der nach aussen gerichteten Ca-Strömung, so wird der Strahlungsdruck pro Einheitsvolumen durch

Fig. 1



$$Bn\bar{F} \equiv Bn \left\{ F_0 + \frac{2}{3} (F_1 - F_0) \frac{\lambda_0}{\partial \lambda} \cdot \frac{v}{c} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

gegeben, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist und  $B$  eine bekannte Konstante bedeutet.<sup>1</sup>

Wir wollen nun in den folgenden Ausführungen ausser der betreffenden Ca-Chromosphäre mit Woltjer auch die ruhende Generalatmosphäre annehmen, die auf die Ca-Strömung einen Widerstand ausübt, dessen Betrag  $\eta\rho\rho'v$  ist, wobei  $\rho$  und  $\rho'$  die Dichte der Ca- bzw. der Generalatmosphäre und  $\eta$  eine Konstante bedeutet; die Abhängigkeit der Dichte  $\rho'$  von der Höhe  $z$  lässt sich in der Form  $\rho' = \rho'_0 e^{-az}$  schreiben. Dann liefert die Bedingung für stationäre Bewegung

$$\rho v \frac{dv}{dz} = - \frac{d\rho}{dz} - \eta\rho\rho'v - \left( g - \frac{FB}{m} \right) \rho,$$

wobei  $p$  der Gasdruck bedeutet.

Nimmt man die Temperatur  $T$  als konstant an, so ergibt sich, die Zustandsgleichung  $p = 2knT$  und die Kontinuitätsbedingung  $\rho v = \text{konst.}$  berücksichtigend,

1 Der Ausdruck (1) versagt für  $v \frac{\partial \lambda}{\lambda_0} > c$ : aber solche grosse Geschwindigkeit kommt für unser Problem nicht in Betracht. Die Konstante  $B$  steht mit der Masse  $m$  eines Ca-Atoms, der Gravitationsbeschleunigung  $g$  und der Residualintensität  $F_0$  in Zusammenhang  $B F_0 = 1.38 g$  (nach Woltjer).

$$(v^2 - v_0^2) \frac{dv}{v dz} = -\eta \rho' v + f_0 \left\{ \left( 1 + \gamma \frac{v}{c} \right) - \frac{g_0}{f_0} \right\} \dots\dots(2)$$

wo

$$\frac{2kT}{m} = v_0^2, \quad \frac{BF_0}{m} = f_0, \quad \frac{2}{3} \frac{F_1 - F_0}{F_0} \frac{\lambda_0}{\delta \lambda} = \gamma \quad (3)$$

ist.

Um die Grössenordnung der Glieder von (2) zu erkennen, wollen wir in bezug auf die Ca-Linie folgende Angaben machen:

$$\lambda_0 = 3950 \text{ \AA}, \quad \delta \lambda = 8 \text{ \AA}, \quad F_0/F_1 = 0.07, \quad f_0/g = 1.5,$$

und demgemäss  $\gamma = 4400$ . Dann wird das Lichtdruck bei sich bewegendenden Atomen etwa zweimal so gross wie bei ruhenden Atomen, wenn  $v = 70 \frac{\text{Kil}}{\text{sek}}$ , ist, welche Grösse, wie wir später sehen werden, einer Höhe  $Z = 6800 \text{ Km}$ . entspricht, während Woltjer einen von der Geschwindigkeit unabhängigen konstanten Lichtdruck gebraucht hat.

Das Verhältnis  $r$  des Gliedes, das den Widerstand der Generalatmosphäre bedeutet, zu dem des Flügeffektes wird gegeben durch

$$r = \frac{\eta \rho_0' e^{-\alpha z}}{f_0 \gamma} c. \quad \text{Wenn man nun diejenigen Zahlenwerte in bezug auf}$$

die Generalatmosphäre, die Woltjer gegeben hat, d. h.,  $\rho_0'$  (Gasdruck) =  $10 \text{ c. g. s.}$ ,  $m'$  (Molekulargewicht) = 20,  $T = 5000$ , und demgemäss  $\eta \rho_0' =$

$$g_0 = 11.4, \quad \alpha = \frac{gm'}{RT} = 1.32 \times 10^{-6} \text{ braucht, so kann man leicht sehen,}$$

dass  $r = 1$  wird für ungefähr  $z = 60 \text{ Km}$ ., und dass das Glied des Widerstandes bereits etwa in der Höhe  $z = 100 \text{ Km}$ . im Vergleich mit dem des Flügeffektes vernachlässigt werden kann.<sup>2</sup>

Der Widerstand der Generalatmosphäre spielt also nur am Boden der Chromosphäre eine wichtige Rolle, indem er den Ausfluss der Ca-Atome kontrolliert, wenn man sich aber mit der hohen Schichten der Chromosphäre beschäftigt, so genügt es, nur den Flügeffekt zu berücksichtigen.

§ 2. Setzt man  $f_0 - g = E$ ,  $f_0 \frac{\gamma}{c} = F$ , so ergibt sich aus (2) sofort

<sup>1</sup> Der Widerstand, den die Generalatmosphäre auf die freien Elektronen, die sich mit Ca-Atomen bewegen, ausübt, ist zu vernachlässigen.

<sup>2</sup> Nach einer verbesserten Theorie von Woltjer (B. A. N. VI, 213, (1931)) ist  $g_0$  um einen Faktor  $3.16 \times 10^2 \times \left[ -2.63 - \frac{2}{3} \log_{10} \rho' \right]$  grosser als der hier gebrauchte Wert, aber man kann dann auch dasselbe etwa für  $Z = 150 \text{ Km}$ . schliessen.

$$\frac{dv}{dz} = \frac{-q_0 e^{-\alpha z v} + E + Fv}{v^2 - v_0^2} v \dots\dots\dots(4)$$

Nun wollen wir zuerst die hohe Schicht der Chromosphäre (z. B.  $z > 100$  Km) ins Auge fassen. Wenn man, nach der Bemerkung am Schluss des vorhergehenden Paragraphen, in der rechten Seite von (4)  $q_0 e^{-\alpha z v}$  gegen  $Fv$  vernachlässigt, so erhält man

$$\frac{dv}{dz} = \frac{E + Fv}{v^2 - v_0^2} v, \dots\dots\dots(5)$$

oder integriert :

$$Z = \frac{v}{F} - \frac{v_0^2}{E} \log v - \frac{E^2 - F^2 v_0^2}{F^2 E} \log (E + Fv) + \text{Konst.} \dots\dots\dots(6)$$

Insbesondere erhält man für  $F=0$ ,

$$Z = \frac{v^2}{2E} - \frac{v_0^2}{E} \log v + \text{Konst.} \dots\dots\dots(7)$$

was nichts anderes als das Woltjersche Modell ist.

Da selbstverständlich diejenige Lösung, die eine mit der Höhe  $z$  zunehmenden Dichte gibt, physikalisch keinen Sinn hat, so liefert die einzige asymptotische Lösung von (6)

$$v \sim Fz, \dots\dots\dots(8)$$

während die entsprechende Lösung von (7) ist :

$$v \sim \sqrt{2Ez}.^{-1} \dots\dots\dots(9)$$

Es ist sehr bemerkenswert, dass die Proportionalitätskonstanten von (8) und (9) von wesentlich verschiedener Natur sind.

Wir wollen nunmehr zur allgemeineren Gleichung (4) zurückkehren.

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 y, & \alpha z &= x, \\ \frac{E}{\alpha v_0^2} &= \frac{f_0 - g_0}{\alpha v_0^2} = \lambda, & \frac{F}{\alpha v_0} &= \frac{f_0 \gamma}{\alpha v_0 c} = \mu, & \frac{q_0}{\alpha v_0} &= \nu, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

so erhält man

---

1 Für die ruhende Chromosphäre ergibt die Milnesche Theorie  $\rho \propto \frac{1}{Z^2}$  (M. N. 85, S. 111).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^2 - 1} \left\{ -\nu e^{-xy} + \lambda + \mu y \right\}. \quad \dots\dots\dots(11)$$

Diese Differentialgleichung besitzt für  $y \geq 0$  folgende zwei Singularitätskurven :

$$y=1, \quad e^{-x} = \frac{\lambda}{\nu y} + \frac{\mu}{\nu}. \quad \dots\dots\dots(12)$$

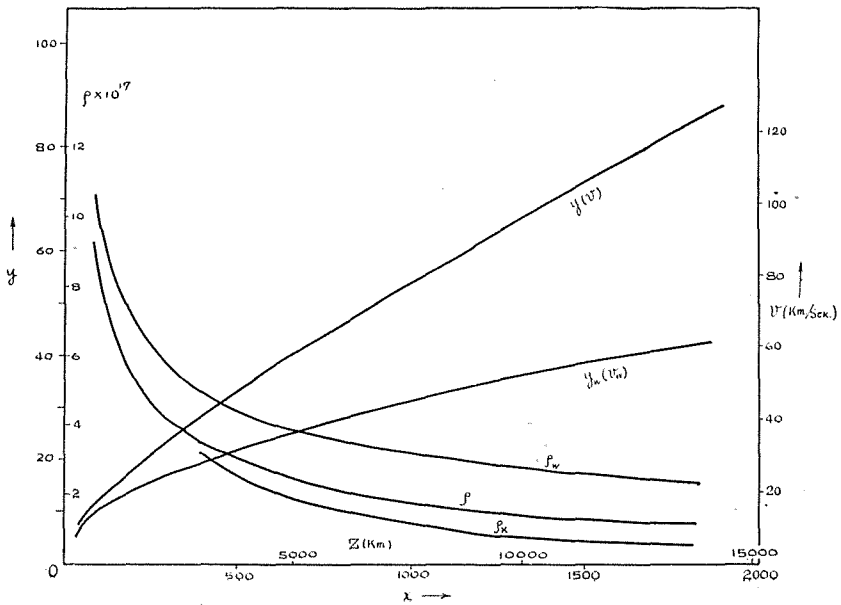
Die Tangenten der Lösungen von Gleichung (11) am Schnittpunkt dieser beiden Kurven,  $S\left(y=1, x = -\log\left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\mu}{\nu}\right)\right)$ , werden durch

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_S = \frac{1}{4}(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 8(\lambda + \mu)}) \quad \dots\dots\dots(13)$$

ausgedrückt, und zwar mit entgegengesetztem Zeichen, was bedeutet dass der Punkt  $S$  ein sogenannter „Sattelpunkt“ ist. Dann gibt es keine anderen durch den Punkt  $S$  hindurchgehenden Lösungen mehr ausser den beiden, deren Tangenten durch (13) dargestellt werden. Aber die eine dieser beiden, die dem negativen Wert von (13) entspricht, müssen wir ausschliessen aus demselben Grund wie in der Woltjerschen Untersuchung.

Mit den in § 1 gegebenen Angaben erhält man aus (3) und (10):

Fig. 2



$$\tau_0 = 1.44 \times 10^5, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = 0.03, \quad \nu = 60.$$

Demgemäss ist man jetzt instande, den Wert der Geschwindigkeit mit Hilfe von (6), (11), (12) und (13) numerisch zu berechnen. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Fig. 2 veranschaulicht. Dabei bezieht sich das Suffix „ $\tau$ “ auf das Woltjersche Modell.

In ähnlicher Weise wie in der Arbeit von Woltjer erhalten wir  $\rho' = 0.48 \times 10^{-10} \rho'$ ,  $\rho'_{z=0} = 10^{-1} \text{c. g. s.}$  und für den Sattelpunkt  $y_s = 1$ ,  $e^{-x_s} \frac{\lambda}{\nu} = \frac{1}{120}$ ,  $\rho'_s = 4 \times 10^{-14} \text{c. g. s.}$ . Andererseits gibt eine kleine numerische Berechnung:  $\rho'_{z=0} = \frac{1}{50}$ . Wenn man dann mit Woltjer

$\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{z=0} = \frac{1}{100}$  annimmt, so folgt aus der Kontinuitätsbedingung sofort:

$\rho_s = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{100} \cdot \rho'_{z=0} = 9.6 \times 10^{-16}$ . Da, für  $z = 14000 \text{ Km.}$ ,  $y = 86$  und  $y_w = 43$  ist, erhält man schliesslich  $\rho = 1.1 \times 10^{-17} \text{c. g. s.}$ , bzw.  $\rho_w = 2.2 \times 10^{-17} \text{c. g. s.}$

§ 3. In diesem Paragraphen wollen wir nach der Kramererschen Theorie des Einfangens von Elektronen und nach der Milneschen Abschätzung der Wahrscheinlichkeit vom Übergang  $\text{Ca}^+ \rightarrow \text{Ca}^{++}$  in der Sonnenschromosphäre<sup>1</sup> den Einfluss des Vorhandenseins von Übergängen  $\text{Ca}^+ \leftrightarrow \text{Ca}^{++}$  auf die Dichteverteilung in der hohen Schicht der Chromosphäre untersuchen.

Es seien  $n$ ,  $n_i$  und  $n_e$  die Anzahlen von  $\text{Ca}^+$ , von  $\text{Ca}^{++}$ -Atomen und von Elektronen in Einheitsvolumen. Dann  $n_e = 2n_i + n$ .

Die Wahrscheinlichkeit,  $f_{12}$ , dafür, dass ein Übergang  $\text{Ca}^+ \rightarrow \text{Ca}^{++}$  stattfindet, ist eine Konstante. Ein entgegengesetzter Übergang  $\text{Ca}^{++} \rightarrow \text{Ca}^+$  ist immer mit dem Einfangen eines Elektrons begleitet. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Übergangs  $\text{Ca}^{++} \rightarrow \text{Ca}^+$  gleich derjenigen dafür, dass ein  $\text{Ca}^{++}$ -Atom ein Elektron einfängt, nämlich

$$f_{21} = \pi \sigma^2 n_e \bar{C}_e,$$

wo man mit  $\sigma$  den Radius der scheinbaren Zielscheibe und mit  $\bar{C}_e$  die mittlere Quadratgeschwindigkeit der Elektronen bezeichnet.

<sup>1</sup> M. N. 88, S. 201. (1928).

Fassen wir nun eine bestimmte Masse von strömendem Gas ins Auge, dessen Volumen man mit  $V$  bezeichnet, so steht zwischen  $n_i$ ,  $n$  und  $n_e$  eine Beziehung:

$$d(n_i V) = f_{12} n V dt - f_{21} n_i V dt.$$

Oder mit  $\zeta = \frac{n_i}{n_i + n}$  erhalten wir

$$\frac{d\zeta}{dt} = f_{12}(1 - \zeta) - f'_{21} n_e \zeta, \quad \dots\dots\dots(14)$$

wo

$$f'_{21} = \pi \sigma^2 \bar{C}_e \quad \dots\dots\dots(15)$$

ist.

Nun wollen wir uns auf den Fall  $\zeta \ll 1$  beschränken. Indem man  $\zeta$  im Vergleich mit 1 vernachlässigt und ausserdem die Beziehungen:  $n_e \dot{=} n = \frac{n_s}{y}$ ,  $dt = \frac{dz}{v} = \frac{dx}{\alpha v_0 y}$ , wo das Suffix „ $S$ “ sich auf den Sattelpunkt  $S$  bezieht, in die Gleichung (14) einsetzt, erhält man in erster Annäherung

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{\alpha v_0 y} \left\{ f_{12} - f'_{21} n_s \frac{\zeta}{y} \right\}. \quad \dots\dots\dots(16)$$

Da es für unseren Zweck genügt, nur eine approximative Lösung für die hohen Schichten aufzufinden, können wir, wie Fig. 2 zeigt, von einer angenäherten Beziehung,  $y = ax + b$ , Gebrauch machen.

Setzt man dann

$$\frac{f_{12}}{\alpha v_0} = f, \quad \frac{f'_{21} n_s}{\alpha v_0} = h, \quad \dots\dots\dots(17)$$

so gibt das Integral von (16)

$$\zeta = \frac{f}{a} e^{-\frac{h}{ay}} \int_{y_0}^y \frac{c - \frac{h}{ay}}{y} dy + \zeta_0 e^{\frac{h}{a} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right)}. \quad \dots\dots(18)$$

Nach Kramers wird der Radius der scheinbaren Zielscheibe  $\sigma$  durch

$$\sigma = b(4\pi)^{\frac{1}{5}} A^{\frac{4}{5}} \left( \frac{c}{C} \right)^{\frac{7}{5}}$$

gegeben, wo  $A$  die elektrische Ladung des Ions bedeutet und  $b = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.81 \times 10^{-13}$  cm. ist. In unserem Problem ist  $\bar{C}_e = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} =$

$4.8 \times 10^7 \text{cm/sec.}$  ( $T=5000^\circ$ ) und  $A=2$  für  $\text{Ca}^{++}$ ; also  $\sigma=6.7 \times 10^{-9} \text{cm.}$ ,  
 $f'_{21}=6.8 \times 10^{-9}$  (aus (15)). Andererseits ist nach Milne  $f_{12} = \frac{1}{200}$ .  
 Ferner geben die Ergebnisse unserer Berechnungen  $n_s = \frac{\rho_s}{m} = 1.45 \times 10^7$ ,  $a_s = 0.04$ .

Aus den obigen numerischen Werten erhalten wir schliesslich:

$$\zeta = 0.66 e^{-\frac{13}{y} \int_{y_0}^y \frac{c^{-\chi}}{\chi} d\chi} + \zeta_0 e^{13 \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right)}. \quad \dots\dots(19)$$

Dies ergibt  $\zeta$  als eine Funktion von  $y$ , also auch von  $z$ . Die Dichteverteilung mit dieser Korrektur ist in Fig. 2 veranschaulicht (Kurve  $\rho_K$ ); dabei haben wir  $y_0=20$  angenommen und das zweite Glied der rechten Seite von (19) als eine additive Konstante ausser Acht gelassen, weil seine Änderung in dem von uns betrachteten Bereiche von  $x$  sehr klein ist.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Toshima Araki für seine ständige Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeit an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszusprechen.

November, 1933.

Institut für Astrophysik, Kyoto.