Zwei Sätze über die Abschnitte der schlichten Potenzreihen

Von

Akira Kobori

(Eingegangen am 13. April 1934)

Nach der Untersuchung von Herrn G. Szegö[1] ist es bekannt, dass die sämtlichen Abschnitte

$$z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n, \qquad n=2,\ 3,\ldots$$

einer Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und denselben auf einen schlichten und sternigen bezw. konvexen Bereich abbildet, im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$ schlicht und sternig bezw. konvex sind. An diesen Satz anschliessend möchte ich in der vorliegenden Note die folgenden zwei Sätze hinzufügen.

I. *Die Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots a_nz^n+\ldots$$

sei regulär im Kreise $|z|<1$ *und bilde denselben auf einen schlichten und bezüglich des Nullpunktes sternigen Bereich ab. Dann sind sämtliche Abschnitte*

$$z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n, \qquad n=2,\ 3,\ldots$$

schlicht und konvex im Kreise $|z|<\frac{1}{8}$. *Diese Konstante* $\frac{1}{8}$ *kann durch keine grössere ersetzt werden.*

II. *Die Potenzreihe*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots a_nz^n+\ldots$$

---

1. G. Szegö: Zur Theorie der schlichten Abbildungen. Math. Ann. **100** (1928) 188—211.

sei regulär im Einheitskreise $|z|<1$ *und bilde denselben auf einen schlichten und konvexen Bereich ab. Dann sind sämtliche Abschnitte*

$$z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n, \qquad n=2, 3,\ldots$$

schlicht und bezüglich des Nullpunktes sternig im Kreise $|z|<\frac{1}{2}$. *Die Konstante* $\frac{1}{2}$ *kann auch hier durch keine grössere ersetzt werden.*

I. Hilfssätze.

1. Es sei die Potenzreihe

$$(1) \qquad f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

im Einheitskreise $|z|<1$ regulär und bilde denselben auf einen schlichten und bezüglich des Nullpunktes sternigen Bereich ab. Dann sind für $|z|<1$

I. $$|f'(z)|\geqq\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3},$$

II.[1] $$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqq\frac{2|z|+4}{1-|z|^2},$$

III. $$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}\geqq\frac{1-4|z|+|z|^2}{1-|z|^2}$$

und

IV. $$|a_n|\leqq n, \qquad n=2, 3,\ldots$$

2. Für die Potenzreihe (1), die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und denselben auf einen schlichten und konvexen Bereich abbildet, sind die folgenden Sätze bekannt:

V. (Strohhäcker[2]) Ist $|z|\leqq r<1$, so liegt $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke $\left(\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r}\right)$ der reellen Achse ist.

VI. $$|a_n|\leqq 1, \qquad n=2, 3,\ldots$$

---

1. Diese Abschätzung ist eine unmittelbare Folge der Abschätzung

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqq\frac{4|z|}{1-|z|^2} \qquad \text{für } |z|<1,$$

die man im Bieberbachschen „Lehrbuch der Funktionentheorie," Bd. II findet.

2. Strohhäcker: Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Zeitschr. **37** (1933) 356—380.

II. Beweis des Satzes I.

3. Nach dem Satze, den Herr G. Szegö in der a. a. O. genannten Arbeit bewiesen hat, sind die sämtlichen Abschnitte

$$s_n(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n, \quad n=2, 3,\ldots$$

der Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

schlicht im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$, wenn die Potenzreihe im Einheitskreise $|z|<1$ regulär und schlicht ist. Damit haben die Polynomen

$$s_n'(z)=1+2a_2z+\ldots+na_nz^{n-1}, \qquad n=2, 3,\ldots$$

keine Nullstelle im Kreise $|z|<\frac{1}{4}$, daher *a fortiori* im Kreise $|z| \leqq \frac{1}{8}$. Folglich ist die Funktion

$$1+\frac{zs_n''(z)}{s_n'(z)}=1+\frac{2a_2z+\ldots+n(n-1)a_nz^{n-1}}{1+2a_2z+\ldots+na_nz^{n-1}}$$

im Kreise $|z|\leqq\frac{1}{8}$ regulär. Hierbei setze ich

$$f(z)=s_n(z)+\sigma_n(z),$$

wobei

$$\sigma_n(z)=a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\ldots$$

bedeutet, so ist

$$1+\Re\frac{zs_n''(z)}{s_n'(z)}=1+\Re z\frac{f''(z)-\sigma_n''(z)}{f'(z)-\sigma_n'(z)}$$

$$=1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\Re z\frac{\sigma_n'(z)\dfrac{f''(z)}{f'(z)}-\sigma_n''(z)}{f'(z)-\sigma_n'(z)}$$

$$\geqq 1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}-|z|\cdot\frac{|\sigma_n'(z)|\cdot\left|\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right|+|\sigma_n''(z)|}{|f'(z)|-|\sigma_n'(z)|}.$$

4. Es ist

$$|\sigma_n'(z)|\leqq(n+1)|a_{n+1}|\;|z|^n+(n+2)|a_{n+2}|\;|z|^{n+1}+\ldots$$

und nach Hilfssatz IV ist

$$\leqq(n+1)^2|z|^n+(n+2)^2|z|^{n+1}+\ldots.$$

Nun ist für $0<r<1$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^2r^{\nu-1}=r^n\cdot\frac{(n+1)^2-(2n^2+2n-1)r+n^2r^2}{(1-r)^3},$$

so dass für $|z|=\frac{1}{8}$

$$|\sigma_n'(z)|\leqq\frac{49n^2+112n+72}{343\times 8^{n-1}}$$

$$=\frac{849}{343\times 64} \qquad \text{für } n=3.$$

Es ist ferner

$$|\sigma_n''(z)|\leqq n(n+1)^2|z|^{n-1}+(n+1)(n+2)^2|z|^n+\ldots.$$

Da aber für $0<r<1$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\nu-1)\nu^2 r^{\nu-2}$$

$$=r^{n-1}\frac{n(n+1)^2-(n+1)(3n^2-4)r+(3n^3-5n+2)r^2-(n^3-n^2)r^3}{(1-r)^4}$$

ist, so ist für $|z|=\frac{1}{8}$

$$|\sigma_n''(z)|\leqq\frac{343n^3+832n^2+728n+272}{2401\times 8^{n-2}}$$

$$=\frac{19205}{19208} \qquad \text{für } n=3.$$

Nach den Hilfssätzen I, II und III erhält man für $|z|=\frac{1}{8}$ die folgenden Abschätzungen:

$$|f'(z)|\geqq\frac{448}{729}, \qquad \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqq\frac{272}{63},$$

$$1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}\geqq\frac{11}{21}>0.523.$$

Folglich ist für $n=3$

$$|f'(z)|-|\sigma_n'(z)|\geqq\frac{448}{729}-\frac{849}{343\times 64}$$

$$>0.575.$$

Also ist für $n=3$

$$|z|\cdot\frac{|\sigma_n'(z)|\cdot\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|+|\sigma_n''(z)|}{|f'(z)|-|\sigma_n'(z)|}$$

$$<\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{849}{343\times 64}\times\frac{272}{63}+\frac{19205}{19208}}{0.575}$$

$$<\frac{1.181}{4.6}<0.26.$$

Da aber die Richtigkeit für $n=3$ die für $n\geqq 3$ zur Folge hat, so ist

$$1+\Re\frac{zs_n''(z)}{s_n'(z)}>0 \quad \text{für } |z|\leqq\frac{1}{8} \quad \text{und } n\geqq 3.$$

5. Für $n=2$ ist

$$1+\Re\frac{zs_2''(z)}{s_2'(z)}=\Re\left(1+\frac{2a_2z}{1+2a_2z}\right)$$

$$=\frac{1}{|1+2a_2z|^2}\cdot\Re(1+4a_2z)(1+2\bar{a}_2\bar{z})$$

$$=\frac{8}{|1+2a_2z|^2}\cdot\left(\left|\frac{3}{8}+a_2z\right|^2-\frac{1}{64}\right).$$

Man hat aber für $|z|<\frac{1}{8}$

$$\left|\frac{3}{8}+a_2z\right|>\frac{3}{8}-\frac{|a_2|}{8}$$

$$\geqq\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

Daher ist

$$1+\Re\frac{zs_2''(z)}{s_2'(z)}>0 \quad \text{für } |z|<\frac{1}{8}.$$

Dass die Konstante $\frac{1}{8}$ durch keine grössere ersetzt werden kann, sieht man bei der Potenzreihe

$$\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+\ldots+nz^n+\ldots,$$

die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und denselben auf einen schlichten und bezüglich des Nullpunktes sternigen Bereich abbildet, weil der Abschnitt

$$s_2(z)=z+2z^2$$

in $z=-\frac{1}{8}$ die Beziehung

$$1+\frac{zs_2''(z)}{s_2'(z)}=0$$

genügt.

Also ist der Satz I bewiesen.

III. Beweis des Satzens II.

6. Ich beweise zuerst, dass die sämtlichen Abschnitte

$$z+a_2z^2+\dots+a_nz^n, \qquad n=2,\ 3,\dots$$

der Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\dots+a_nz^n+\dots,$$

die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und denselben auf einen schlichten und konvexen Bereich abbildet, verschwinden niemals im Kreise $|z|\leqq\frac{1}{2}$.

Zu diesem Zwecke setze ich

$$f(z)=s_n(z)+\sigma_n(z),$$

wobei

$$s_n(z)=z+a_2z^2+\dots+a_nz^n$$

und

$$\sigma_n(z)=a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\dots$$

bedeutet, so ist

$$|s_n(z)|\geqq|f(z)|-|\sigma_n(z)|.$$

Da aber mit Rücksicht auf Hilfssatz VI

$$\begin{aligned}|\sigma_n(z)|&\leqq|a_{n+1}|\ |z|^{n+1}+|a_{n+2}|\ |z|^{n+2}+\dots\\&\leqq|z|^{n+1}+|z|^{n+2}+\dots\\&=\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}\qquad\text{für } |z|<1\end{aligned}$$

ist und nach Hilfssatz V

$$|f(z)|\geqq\frac{|z|}{1+|z|}\qquad\text{für } |z|<1$$

ist, so ist auf $|z|=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}|s_n(z)|&\geqq\frac{1}{3}-\frac{1}{2^n}\\&>0\qquad\text{für } n\geqq2.\end{aligned}$$

Folglich ist die Funktion

$$\frac{zs_n'(z)}{s_n(z)}=\frac{1+2a_2z+\dots+na_nz^{n-1}}{1+a_2z+\dots+a_nz^{n-1}}$$

im Kreise $|z|\leqq\frac{1}{2}$ regulär.

7. Nun ist

$$\Re\frac{zs_n'(z)}{s_n(z)}=\Re z\frac{f'(z)-\sigma_n'(z)}{f(z)-\sigma_n(z)}$$

$$=\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}+\Re z\frac{\sigma_n(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}-\sigma_n'(z)}{f(z)-\sigma_n(z)}$$

$$\geqq\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}-\left|\frac{\sigma_n(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}-\sigma_n'(z)}{\dfrac{f(z)-\sigma_n(z)}{z}}\right|.$$

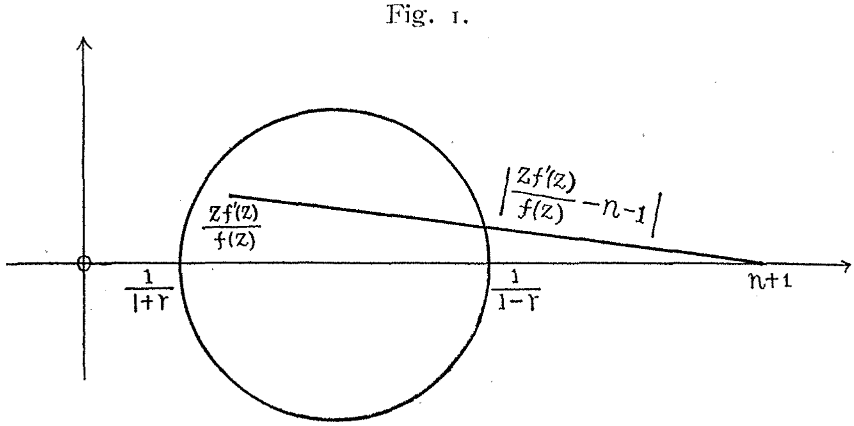
Es ist ferner

$$\sigma_n(z)\frac{f'(z)}{f(z)}-\sigma_n'(z)$$

$$=(a_{n+1}z^n+a_{n+2}z^{n+1}+\ldots)\frac{zf'(z)}{f(z)}-(n+1)a_{n+1}z^n-(n+2)a_{n+2}z^{n+1}-\ldots$$

$$=(a_{n+1}z^n+a_{n+2}z^{n+1}+\ldots)\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-(n+1)\right\}-a_{n+2}z^{n+1}-2a_{n+3}z^{n+2}-\ldots.$$

Fig. 1.



Da aber nach Hilfssatz V

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-(n+1)\right|\leqq n+1-\frac{1}{1+r}=n+\frac{r}{1+r}$$

ist und mit Rücksicht auf Hilfssatz VI

$$|a_{n+1}z^n+a_{n+2}z^{n+1}+\ldots|\leqq|a_{n+1}|\;|z|^n+|a_{n+2}|\;|z|^{n+1}+\ldots$$

$$\leqq|z|^n+|z|^{n+1}+\ldots$$

$$=\frac{|z|^n}{1-|z|}\qquad\text{für }|z|<1$$

und

$$|a_{n+2}z^{n+1}+2a_{n+3}z^{n+2}+\dots| \leqq |a_{n+2}|\ |z|^{n+1}+2\,|a_{n+3}|\ |z|^{n+2}+\dots$$
$$\leqq |z|^{n+1}+2\,|z|^{n+2}+\dots$$
$$=\frac{|z|^{n+1}}{(1-|z|)^2} \quad \text{für } |z|<1.$$

Daher ist für $|z|=r<1$

$$\left|\sigma_n(z)\frac{f'(z)}{f(z)}-\sigma_n'(z)\right| \leqq \frac{r^n}{(1-r)}\cdot\left\{n+\frac{r}{1+r}\right\}+\frac{r^{n+1}}{(1-r)^2}.$$

Also ist für $r=\frac{1}{2}$

$$(2) \qquad \left|\frac{\sigma_n(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}-\sigma_n'(z)}{\dfrac{f(z)-\sigma_n(z)}{z}}\right| \leqq \frac{3n+4}{2^n-3}$$
$$<0.656 \qquad \text{für } n=5.$$

Andererseits, nach Hilfssatz V, ist

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{1}{1+|z|} \qquad \text{für } |z|<1,$$

so ist für $|z|\leqq\frac{1}{2}$

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{2}{3}>0.666.$$

Da ferner die Richtigkeit für $n=5$ die für $n\geqq5$ zur Folge hat, so ist

$$\Re\frac{zs_n'(z)}{s_n(z)}>0 \qquad \text{für } |z|\leqq\frac{1}{2} \quad \text{und } n\geqq5.$$

8. Nun beweise ich den Satz für $n=4$. Da die Funktion

$$\frac{zs_4'(z)}{s_4(z)}=\frac{1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3}{1+a_2z+a_3z^2+a_4z^3}$$

im Kreise $|z|\leqq\frac{1}{2}$ regulär ist, so genügt es die Ungleichung

$$\Re\frac{zs_4'(z)}{s_4(z)}>0$$

für $z=\frac{1}{2}$ zu beweisen. Die Behauptung lautet also

$$\Re\frac{1+a_2+\dfrac{3a_3}{4}+\dfrac{a_4}{2}}{1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{4}+\dfrac{a_4}{8}}>0.$$

Ferner kann man annehmen, dass die Koeffizient a_4 reell und positiv sein; denn, wenn a_4 komplex ist, so kann man ein η mit $|\eta|=1$ so finden, dass $a_4\eta^3$ positiv ist. Daher in diesem Falle, betrachtet man $\frac{1}{\eta}\cdot f(\eta z)$ anstatt $f(z)$. Also nehme ich hierbei an, dass

$$a_4=p, \quad 0<p\leqq 1$$

ist, so ist

$$\mathfrak{R}\frac{1+\frac{p}{2}+a_2+\frac{3a_3}{4}}{1+\frac{p}{8}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{4}}>0 \tag{3}$$

die Ungleichung, die zu beweisen ist.

Die Funktion

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=1+\frac{2a_2z+6a_3z^2+\ldots}{1+2a_2z+\ldots}$$
$$=1+b_1z+b_2z^2+\ldots$$

ist im Kreise $|z|<1$ regulär und besitzt dort den positiven Realteil, so ist nach dem Carathéodory-Toeplitzschen Satze

$$|b_1|\leqq 2, \quad |2b_2-b_1^2|\leqq 4-|b_1|^2. \tag{4}$$

Es ist

$$a_2=\frac{b_1}{2}, \quad a_3=\frac{b_1^2+b_2}{6}, \tag{5}$$

so kann man die linke Seite von (5) folgendermassen schreiben:

$$\mathfrak{R}\frac{1+\frac{p}{2}+\frac{b_1}{2}+\frac{b_1^2+b_2}{8}}{1+\frac{p}{8}+\frac{b_1}{4}+\frac{b_1^2+b_2}{24}}$$

oder, wenn man

$$2b_2-b_1=\varepsilon(4-|b_1|^2), \quad |\varepsilon|\leqq 1 \tag{4'}$$

setzt,

$$\mathfrak{R}\frac{1+\frac{p}{2}+\frac{b_1}{2}+\frac{3b_1^2}{16}+\frac{\varepsilon}{16}(4-|b_1|^2)}{1+\frac{p}{8}+\frac{b_1}{4}+\frac{b_1^2}{16}+\frac{\varepsilon}{48}(4-|b_1|^2)}. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck ist, wenn man als eine Funktion von ε auffasst, regulär für $|\varepsilon|\leqq 1$, weil

$$\left|\frac{b_1}{4}+\frac{b_1^2}{16}+\frac{\varepsilon}{48}(4-|b_1|^2)\right| \leqq \frac{|b_1|}{4}+\frac{|b_1|^2}{16}+\frac{4-|b_1|^2}{48}$$
$$\leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{3}{4}$$
$$<1.$$

Daher darf man $|\varepsilon|=1$ annehmen. Man hat also zu zeigen, dass

$$\Re\left\{1+\frac{p}{2}+\frac{b_1}{2}+\frac{3b_1^2}{16}+\frac{\varepsilon(4-|b_1|^2)}{16}\right\}\left\{1+\frac{p}{8}+\frac{\bar{b}_1}{4}+\frac{\bar{b}_1^2}{16}+\frac{\bar{\varepsilon}(4-|b_1|^2)}{48}\right\}>0 \tag{7}$$

ist.

Wenn man

$$1+\frac{p}{2}+\frac{b_1}{2}+\frac{3b_1^2}{16}=3u, \quad 1+\frac{p}{8}+\frac{b_1}{4}+\frac{b_1^2}{16}=v \tag{8}$$

setzt, so lautet die linke Seite von (7)

$$3\Re\left\{u+\frac{\varepsilon}{48}(4-|b_1|^2)\right\}\left\{\bar{v}+\frac{\bar{\varepsilon}}{48}(4-|b_1|^2)\right\}.$$

Es ist ferner

$$\Re\left\{u+\frac{\varepsilon}{48}(4-|b_1|^2)\right\}\left\{\bar{v}+\frac{\bar{\varepsilon}}{48}(4-|b_1|^2)\right\}$$
$$=\Re u\bar{v}+\frac{(4-|b_1|^2)^2}{(48)^2}+\frac{4-|b_1|^2}{48}\Re(u+v)\bar{\varepsilon}$$
$$\geqq \Re u\bar{v}+\frac{(4-|b_1|^2)^2}{(48)^2}-\frac{4-|b_1|^2}{48}\cdot|u+v|$$
$$=\frac{|u+v|^2}{4}-\frac{|u-v|^2}{4}+\frac{(4-|b_1|^2)^2}{(48)^2}-\frac{4-|b_1|^2}{48}\cdot|u+v|$$
$$=\left(\frac{|u+v|}{2}+\frac{|u-v|}{2}-\frac{4-|b_1|^2}{48}\right)\left(\frac{|u+v|}{2}-\frac{|u-v|}{2}-\frac{4-|b_1|^2}{48}\right).$$

Wegen

$$|u+v|=\left|\frac{4}{3}+\frac{7p}{24}+\frac{5b_1}{12}+\frac{b_1^2}{8}\right|$$

$$\geqq \frac{4}{3}+\frac{7p}{24}-\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7p}{24}$$

und

$$|u-v| = \left|\frac{2}{3}-\frac{p}{24}+\frac{b_1}{12}\right|$$
$$\geqq \frac{2}{3}-\frac{p}{24}-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{p}{24},$$

ist

$$\frac{|u+v|}{2}+\frac{|u-v|}{2}-\frac{4-|b_1|^2}{48}$$
$$\geqq \frac{7p}{24}+\frac{1}{2}-\frac{p}{24}-\frac{1}{12}$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{p}{4}$$
$$>0.$$

Daher muss man zeigen, dass

$$\frac{|u+v|}{2}-\frac{|u-v|}{2}-\frac{4-|b_1|^2}{48}>0$$

d. h.

$$|u+v|-|u-v|-\frac{4-|b_1|^2}{24}>0. \tag{9}$$

9. Mit Hilfe der Beziehungen (8) lässt die linke Seite von (9) folgendermassen schreiben:

$$\left|\frac{4}{3}+\frac{7p}{24}+\frac{5b_1}{12}+\frac{b_1^2}{8}\right|-\left|\frac{2}{3}-\frac{p}{24}+\frac{b_1}{12}\right|-\frac{4-|b_1|^2}{24}$$
$$=\frac{1}{12}\cdot\left\{\left|16+\frac{7p}{2}+5b_1+\frac{3}{2}b_1^2\right|\right.$$
$$\left.-\left|8-\frac{p}{2}+b_1\right|-\frac{1}{2}(4-|b_1|^2)\right\}.$$

Also ist die Ungleichung (9) gleichwertig mit

$$\left|16+\frac{7p}{2}+5b_1+\frac{3}{2}b_1^2\right|-\left|8-\frac{p}{2}+b_1\right|-\frac{1}{2}(4-|b_1|^2)>0.$$

Hierbei setzt man

$$8-\frac{p}{2}+b_1=re^{i\varphi},$$

so ist es klar, dass

$$(10)\qquad 6-\frac{p}{2}\leqq r\leqq 10-\frac{p}{2}$$

ist und, dass bei jedem festen r

$$(10')\qquad |\varphi|\leqq\varphi_0(r)$$

gilt, wobei $\varphi_0(r)$ aus der Gleichung

$$\left|-8+\frac{p}{2}+re^{i\varphi}\right|=2$$

d. h.

$$(11)\qquad \cos\varphi_0(r)=\frac{\left(8-\frac{p}{2}\right)^2+r^2-4}{(16-p)r}$$

bestimmt werden kann. Es ist $0<\varphi_0(r)<\frac{\pi}{2}$ und der Punkt $-8+\frac{p}{2}+re^{i\varphi_0(r)}$ liegt auf dem Kreise mit Radius 2.

Nun ist

$$\begin{aligned}&\left|16+\frac{7p}{2}+5b_1+\frac{3}{2}b_1^2\right|-\left|8-\frac{p}{2}+b_1\right|-\frac{1}{2}(4-|b_1|^2)\\&=\left|72-6p+\frac{3}{8}p^2-\left(19-\frac{3p}{2}\right)re^{i\varphi}+\frac{3}{2}r^2e^{i2\varphi}\right|-(2+Q),\end{aligned}$$

wobei

$$Q=-\frac{1}{2}\left(8-\frac{p}{2}\right)^2+r+\frac{(16-p)r}{2}\cdot\cos\varphi-\frac{r^2}{2}$$

bedeutet.

Wegen (11) ist

$$\begin{aligned}Q&\geqq-\frac{1}{2}\left(8-\frac{p}{2}\right)^2+r+\frac{\left(8-\frac{p}{2}\right)^2+r^2-4}{2}-\frac{r^2}{2}\\&=-2+r.\end{aligned}$$

Ferner setze ich

$$(12)\qquad \psi(r,\ Q)\equiv\left|72-6p+\frac{3}{8}p^2-\left(19-\frac{3p}{2}\right)re^{i\varphi}+\frac{3}{2}r^2e^{i2\varphi}\right|^2-(2+Q)^2,$$

wobei ich mich

$$(13)\qquad \cos\varphi = \frac{Q + \frac{1}{2}\left(8 - \frac{p}{2}\right)^2 - r + \frac{r^2}{2}}{\frac{(16-p)r}{2}}$$

gesetzt denken. Ich beweise, dass

$$\begin{aligned}\psi(r, Q) = {} & \left(72 - 6p + \frac{3}{8}p^2\right)^2 + \left(145 - 39p + \frac{9}{8}p^2\right)r^2 + \frac{9}{4}r^4 \\ & - \left\{2\left(72 - 6p + \frac{3}{8}p^2\right)\left(19 - \frac{3p}{2}\right)r \right. \\ & \left. + 3\left(19 - \frac{3p}{2}\right)r^3\right\}\cos\varphi \\ & + 6\left(72 - 6p + \frac{3}{8}p^2\right)r^2\cos^2\varphi - (2 + Q)^2\end{aligned}$$

in einem Intervalle $Q_1(r) \geqq Q \geqq -2 + r$ eine monoton wachsende Funktion von Q ist. In der Tat hat man

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial Q} = {} & -\frac{1}{16-p}\cdot\left\{2\left(72 - 6p + \frac{3}{8}p^2\right) + 3r^2\right\}(38 - 3p) \\ & + \frac{48\left(72 - 6p + \frac{3p^2}{8}\right)}{(16-p)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(8 - \frac{p}{2}\right)^2 - r + \frac{r^2}{2}\right\} \\ & + \frac{48\left(72 - 6p + \frac{3}{8}p^2\right)}{(16-p)^2}\cdot Q - 2Q - 4,\end{aligned}$$

und da

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial Q^2} & = \frac{48\left(72 - 6p + \frac{3}{8}p^2\right)}{(16-p)^2} - 2 \\ & = \frac{1}{(16-p)^2}\cdot(2935 - 224p + 16p^2) \\ & \geqq \frac{1}{(16-p)^2}\cdot(2711 + 16p^2) > 0\end{aligned}$$

ist, so genügt es das Vorzeichen von $\frac{\partial\psi}{\partial Q}$ an der Stelle $Q = -2 + r$ zu betrachten. Man hat aber mit Rücksicht auf (10)

$$\frac{\partial\psi}{\partial Q} \geqq -\frac{1}{16-p}\cdot\left\{2\left(72 - 6p + \frac{3}{8}p^2\right) + 3r^2\right\}(38 - 3p)$$

$$+\frac{48\left(72-6p+\frac{3}{8}p^2\right)}{(16-p)^2}\cdot\left\{\frac{(16-p)^2}{8}-r+\frac{r^2}{2}\right\}$$

$$-\frac{96\left(72-6p+\frac{3}{8}p^2\right)}{(16-p)^2}+\frac{48\left(72-6p+\frac{3}{8}p^2\right)}{(16-p)^2}\cdot r$$

$$-4-2(-2+r)$$

$$\geqq\frac{1}{(16-p)^2}\cdot\left(10048-3076p+179p^2-\frac{13}{2}p^3\right)$$

$$>\frac{1}{(16-p)^2}\cdot(6965+179p^2)>0.$$

Folglich ist $\psi(r, Q)$ bei festem r, $6-\frac{p}{2}\leqq r\leqq 10-\frac{p}{2}$, als Funktion von Q für $Q_1(r)\geqq Q\geqq -2+r$ monoton wachsend. Daher wird $\psi(r, Q)$ Minimum für $Q=-2+r$, d. h. wegen (11) und (13), für

$$\cos\varphi=\frac{\left(8-\frac{p}{2}\right)^2+r^2-4}{(16-p)r}=\cos\varphi_0(r),$$

mit anderen Worte, für $|b_1|=2$. Daher, wenn man

$$b_1=2e^{i\theta},\qquad \theta \text{ reell}$$

setzt, lautet die Behauptung

$$\left|16+\frac{7p}{2}+10e^{i\theta}+6e^{i2\theta}\right|-\left|8-\frac{p}{2}+2e^{i\theta}\right|>0.$$

10. Nun genügt es zu zeigen, dass

$$\left|\left(16+\frac{7p}{2}\right)e^{-i\theta}+10+6e^{i\theta}\right|^2-\left|8-\frac{p}{2}+2e^{i\theta}\right|^2>0 \tag{14}$$

ist, d. h.

$$\left\{\left(22+\frac{7p}{2}\right)\cos\theta+10\right\}^2+\left(10+\frac{7p}{2}\right)^2\sin^2\theta$$
$$-\left(8-\frac{p}{2}+2\cos\theta\right)^2-4\sin^2\theta>0$$

oder

$$(384+84p)\cos^2\theta+(408+72p)\cos\theta+(132+78p+12p^2)>0.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung wird für

$$\cos\theta=-\frac{408+72p}{2(384+84p)}$$

Minimum, und beträgt dies

$$(384+84p)\cdot\left\{\frac{408+72p}{2(384+84p)}\right\}^2$$

$$-(408+72p)\cdot\left\{\frac{408+72p}{2(384+84p)}\right\}+(132+78p+12p^2)$$

$$=-\frac{(34+6p)(102+18p)}{32+7p}+132+78p+12p^2$$

$$=\frac{34+6p}{32+7p}\cdot\left\{(66+39p+6p^2)\cdot\frac{32+7p}{17+3p}-102-18p\right\}$$

$$=\frac{2}{32+7p}\cdot(378+1098p+411p^2+42p^3)$$

$$>0.$$

Damit ist bewiesen, dass der Satz für $n=4$ richtig ist.

11. Für $n=3$ ist die Funktion

$$\frac{zs_3'(z)}{s_3(z)}=\frac{1+2a_2z+3a_3z^2}{1+a_2z+a_3z^2}$$

im Kreise $|z|\leqq\frac{1}{2}$ regulär, so genügt es zu zeigen, dass das Realteil dieser Funktion an der Stelle $z=\frac{1}{2}$ positiv ist, d. h.

$$\Re\frac{1+a_2+\frac{3}{4}a_3}{1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{4}}>0.$$

Wenn man hier (5) in Betracht zieht, so wird dieser Ausdruck

$$\Re\frac{1+\frac{b_1}{2}+\frac{b_1^2+b_2}{8}}{1+\frac{b_1}{4}+\frac{b_1^2+b_2}{24}}>0.$$

Ferner nach der Beziehung (4′) erhält man

$$\Re\frac{1+\frac{b_1}{2}+\frac{3}{16}b_1^2+\frac{\varepsilon}{16}\cdot(4-|b_1|^2)}{1+\frac{b_1}{4}+\frac{b_1^2}{16}+\frac{\varepsilon}{48}\cdot(4-|b_1|^2)}>0.$$

Bezüglich dieser Ungleichung kann man in ähnlicher Weise wie im Falle $n=4$ beweisen, und erkennt man sofort, dass der Satz auch für $n=3$ richtig ist.[1]

12. Für $n=2$ ist die Behauptung leicht zu zeigen.

$$\begin{aligned}\Re\frac{zs_2'(z)}{s_2(z)} &= \Re\frac{1+2a_2z}{1+a_2z} \\ &= \frac{1}{|1+a_2z|^2}\cdot\Re(1+2a_2z)(1+\bar{a}_2\bar{z}) \\ &= \frac{1}{|1+a_2z|^2}\cdot\left\{\left|\frac{3}{4}+a_2z\right|^2-\frac{1}{16}\right\}.\end{aligned}$$

Da aber für $|z|<\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{3}{4}+a_2z\right| &> \frac{3}{4}-\frac{|a_2|}{2} \\ &\geqq \frac{3}{4}-\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$

so ist bewiesen, dass

$$\Re\frac{zs_2'(z)}{s_2(z)}>0 \quad \text{für } |z|<\frac{1}{2}.$$

Die Konstante $\frac{1}{2}$ kann auch hier durch keine grössere ersetzt werden, weil bei der Potenzreihe

$$\frac{z}{1-z}=z+z^2+\ldots+z^n+\ldots,$$

die im Einheitskreise $|z|<1$ regulär ist und denselben auf einen schlichten und konvexen Bereich abbildet, der Abschnitt $z+z^2$ eine in $z=-\frac{1}{2}$ verschwindende Ableitung besitzt.

Also ist der Satz II vollständig bewiesen.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Toshizô Matsumoto für seine wertvollen Ratschläge meinen besten Dank abstatten.

---

1. Um ausführlichen Beweis einzusehen, genügt es p im Falle $n=4$ gleich Null einzusetzen.