Sur l'Unicité de la Solution de $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$

Par

Hirosi Okamura

(Reçu le 5 Juillet, 1934)

Considérons l'équation différentielle aux variables réelles

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{1}$$

où $f(x, y)$ *est une fonction continue du point* (x, y) *dans un rectangle* $[0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b]$ $(a,\ b>0)$, *telle que* $f(x, 0)=0$.

Nous allons établir une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité de la solution de (1) passant par le point $(x, y)=(0, 0)$.[1] Elle sera donnée par le Théorème 2 ci-dessous qui se déduira d'un autre : le Théorème 1, de nature plus forte que le théorème de comparaison des intégrales de deux équations différentielles,[2] dû à MM. Tonelli, Bompiani et Montel.[3] Dans la seconde partie du présent mémoire, en généralisant la condition suffisante de l'unicité donnée par le Théorème 2, nous établirons le Théorème 3, d'où on tirera immédiatement diverses autres conditions déjà connues aujourd'hui.

I. Théorèmes d'unicité.

Théorème 1.—*Pour que* $y(x)=0$ *soit la seule solution de* (1) *partant du point* $O(0, 0)$, *il faut et il suffit qu'il existe une fonction*

---

1. *Cf.* Yosie, Jap. J. Math. **2** (1925), p. 161. Le travail de M. Yosie est une conséquence des résultats obtenus par M. Perron, Math. Ann. **76** (1915), p. 471.

2. Le théorème de comparaison : Soit $g(x, y)$ une fonction continue telle que $g(x, y) \geqq f(x, y)$ $[0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b]$. Alors une solution quelconque de (1) partant du point $O(0, 0)$ n'est jamais supérieure à la solution maximum $y=L(x)$ issue de O de l'équation $\frac{dy}{dx}=g(x, y)$.

3. Tonelli, Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. 6e série **1** (1925), p. 272 ; Bompiani, même Volume, p. 298 ; Montel, Bull. Sci. Math. 2e série **50** (1926), 1re partie, p. 205. Une généralisation : Iyanaga, Jap. J. Math. **5** (1928), p. 253.

$g(x, y)$ continue et bornée dans le domaine $D[0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y < +\infty]$ ayant les dérivées partielles continues $g'_x(x, y)$, $g'_y(x, y)$ dans $\bar{D}[0 \leqq x \leqq a,\ 0 < y < +\infty]$ telle que

$$g(x, 0)=0, \quad g(x, y) > f(x, y) \quad [0 \leqq x \leqq a,\ 0 < y \leqq b],$$

et que l'équation

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

n'ait d'autre solution issue de O que $y(x)=0$.

On peut remplacer, dans cet énoncé, l'inégalité $g(x, y) > f(x, y)$ par $g(x, y) \geqq f(x, y)$.

Démonstration.—D'après le théorème de comparaison, l'existence d'une telle fonction $g(x, y)$ est suffisante pour conclure l'unicité ; c'est aussi une conséquence du Lemme et du Théorème 2 suivants, ceux-ci étant indépendants de la conclusion. Par conséquent nous allons prouver, dans les lignes suivantes, l'existence d'une telle fonction $g(x, y)$.

Posons d'abord par définition $f(x, y) = f(x, a)$ pour $a < y < +\infty$.

Formons des fonctions $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ de manière que

$$y_n(x) = \int_0^x \{f[x, y_n(x)] + \frac{1}{n}\} dx + \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \ldots\ldots);$$

$y_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ soient définies dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$.[1] Evidemment la suite est positive et décroissante, et elle a une limite déterminée finie. Or on a

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \{f[x, y_n(x)] + \frac{1}{n}\} dx + \frac{1}{n}$$
$$= \int_0^x f[x, \lim_{n\to+\infty} y_n(x)] dx$$

d'après le théorème de M. Lebesgue, parce que $f[x, y_n(x)] + \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ sont bornés dans leur ensemble ;[2] par conséquent $\lim_{n\to+\infty} y_n(x)$ est une solution de (1) issue de O et l'on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = 0$ d'après l'hypothèse faite. Ainsi nous avons une suite décroissante $\{y_n(x)\}$ telle que

$$y'_n(x) > f[x, y_n(x)] \quad (n=1, 2, \ldots), \quad \lim_{n\to+\infty} y_n(x) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} y'_n(x) = 0.$$

1. Pour le théorème d'existence d'une solution, *voir*, par exemple, Perron, *loc. cit.*

2. On peut remarquer aussi que la suite $\{y_n(x)\}$ forme une famille également continue et que sa convergence est nécessairement uniforme.

Nous pouvons alors trouver des polynomes $P'_n(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ assez proches de $y'_n(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ respectivement, et nous obtenons une suite décroissante de polynomes $P_n(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ de façon que, pour $0\leqq x\leqq a$,

$$P'_n(x)>f[x, P_n(x)] \quad (n=1, 2,\ldots), \quad \lim_{n\to+\infty} P_n(x)=0, \quad \lim_{n\to+\infty} P'_n(x)=0.$$

Prenons ensuite des nombres positifs petits $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n,\ldots$ tels que, pour $0\leqq x\leqq a$,

$$P_n(x)-\varepsilon_n>P_{n+1}(x)+\varepsilon_{n+1}, \; P'_n(x)>f(x,y) \; [P_n(x)+\varepsilon_n\geqq y\geqq P_n(x)-\varepsilon_n],$$
$$(n=1, 2,\ldots);$$

et choisissons les nombres $M_1, M_2,\ldots, M_n,\ldots$ tels que, pour $0\leqq x\leqq a$,

$$M_1>f(x, y) \quad [+\infty>y\geqq P_1(x)],$$
$$M_n>f(x, y) \quad [P_{n-1}(x)\geqq y\geqq P_n(x)] \quad (n=2, 3,\ldots),$$
$$\lim_{n\to+\infty} M_n=0.$$

Posons enfin, par définition, pour $0\leqq x\leqq a$,

$$g(x, y)=\begin{cases} M_1 & [+\infty>y\geqq P_1(x)+\varepsilon_1], \\ M_n & [P_{n-1}(x)-\varepsilon_{n-1}\geqq y\geqq P_n(x)+\varepsilon_n] \quad (n=2, 3,\ldots), \\ [M_n-P'_n(x)]\,Q\left(\dfrac{y-P_n(x)}{\varepsilon_n}\right)+P'_n(x) & [P_n(x)+\varepsilon_n\geqq y\geqq P_n(x)] \\ & (n=1, 2,\ldots), \\ [M_{n+1}-P'_n(x)]\,Q\left(\dfrac{P_n(x)-y}{\varepsilon_n}\right)+P'_n(x) & [P_n(x)\geqq y\geqq P_n(x)-\varepsilon_n] \\ & (n=1, 2,\ldots), \\ 0 & [y=0], \end{cases}$$

où $Q(x)$ est un polynome de x tel que

$$Q(0)=0, \quad Q(1)=1, \quad Q'(0)=0, \quad Q'(1)=0, \quad 0<Q(x)<1 \quad (0<x<1),$$

par exemple $Q(x)=3x^2-2x^3$.

Cela étant, l'équation (2) admet des solutions $y=P_n(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ dont la limite est 0 pour $n\to+\infty$ et, comme $g(x, y)$ est continu dans $\bar{D}$, ainsi que $g'_x(x, y)$ et $g'_y(x, y)$, elle n'a pas d'autre solution issue de O que $y(x)=0$. (C. q. f. d.)

Lemme.—*$g(x, y)$ étant de même qu'à l'énoncé du Théorème* 1, *on peut poser, dans $\bar{D}$,*

$$g(x, y)=-\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)},$$

où $\varphi(x, y)$ *est une fonction continue dans* D, *telle que* $\varphi(x, 0)=0$, *ayant les dérivées partielles continues* $\varphi'_x(x, y)$, $\varphi'_y(x, y)$ *dans* $\bar{D}$, *telles que* $\varphi'_y(x, y)>0$ *dans* $\bar{D}$.

Démonstration.—Soit $y=\chi(x, C)$ la solution de l'équation (2) qui prend la valeur C pour $x=0$; alors $\chi(x, C)$ est, comme on le sait,[1] une fonction continue dans le domaine $[0\leqq x\leqq a,\ 0<C<+\infty]$, $\chi(x, C)$ variant de 0 à $+\infty$ avec C, ayant les dérivées partielles continues $\chi'_x(x, C)$ et $\chi'_C(x, C)$, $\chi'_C(x, C)>0$. En résolvant $y=\chi(x, C)$ on obtient $C=\varphi(x, y)$ qui répond à notre condition. (C. q. f. d.)

Théorème 2.—*Pour que* $y(x)=0$ *soit la seule solution de* (1) *partant de* O, *il faut et il suffit qu'il existe une fonction* $\varphi(x, y)$ *continue dans le domaine* D, *telle que* $\varphi(x, 0)=0$, *ayant les dérivées partielles continues dans* $\bar{D}$ *telles que* $\varphi'_y(x, y)>0$ *dans* $\bar{D}$, *et que l'on ait*

$$f(x, y)<-\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} \quad [0\leqq x\leqq a,\ 0<y\leqq b]. \tag{3}$$

On peut remplacer, dans cet énoncé, la condition (3) par

$$f(x, y)\leqq-\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} \quad [0\leqq x\leqq a,\ 0<y\leqq b]. \tag{4}$$

Démonstration.—L'existence d'une telle $\varphi(x, y)$ est une conséquence simple du Théorème 1 et du Lemme. Réciproquement, s'il y a une telle fonction $\varphi(x, y)$, en transformant (1) par $u=\varphi(x, y)$ nous avons, pour $y>0$, c'est-à-dire pour $u>0$,

$$\frac{du}{dx}=\varphi'_x(x, y)+\varphi'_y(x, y)f(x, y)\leqq 0 \qquad \text{par } (4);$$

donc, pour une solution $y(x)$ de (1) qui est positive pour certain x positif, soit $x=x_1$, $u(x)=\varphi[x, y(x)]$ est une fonction non croissante de x et ne peut s'annuler entre 0 et x_1; par conséquent $y(x)$ l'est aussi, car $y(x)=0$ entraînerait $u(x)=\varphi(x, 0)=0$. (C. q. f. d.)

Corollaire.—*Considérons une équation*

$$\frac{dy}{dx}=F(x, y) \tag{5}$$

où $F(x, y)$ *est une fonction continue dans un domaine* $[a_0\leqq x\leqq a_1,\ b_0<y<b_1]$. *Cette équation admet une solution unique en chaque point du domaine, pourvu que* $F(x, y)$ *satisfasse des inégalités :*

1. *Voir*, par exemple, Goursat, Cours d'analyse mathématique, t. 3, 4e éd., n° 461, ou de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, t. 2, 6e éd., Chap. V, §3.

$$(6)\qquad \begin{aligned}&-\frac{\underline{\Phi}'_x(x, y, z)+\underline{\Phi}'_y(x, y, z)\,F(x, y)}{\underline{\Phi}'_z(x, y, z)}\\ &\leqq F(x, y+z)-F(x, y)\\ &\leqq -\frac{\bar{\Phi}'_x(x, y, z)+\bar{\Phi}'_y(x, y, z)\,F(x, y)}{\bar{\Phi}'_z(x, y, z)}\end{aligned}$$

pour $a_0\leqq x\leqq a_1$, $b_0<y<y+z<b_1$, *où* $\bar{\Phi}(x, y, z)$ *et* $\underline{\Phi}(x, y, z)$ *sont deux fonctions continues dans le domaine* $[a_0\leqq x\leqq a_1,\ b_0<y<b_1,\ 0\leqq z<+\infty]$, *telles que* $\bar{\Phi}(x, y, 0)=\underline{\Phi}(x, y, 0)=0$, *ayant toutes les dérivées partielles du premier ordre continues dans le domaine* $[a_0\leqq x\leqq a_1,\ b_0<y<b_1,\ 0<z<+\infty]$, *tandis que* $\bar{\Phi}'_z(x, y, z)>0$, $\underline{\Phi}'_z(x, y, z)>0$.

Démonstration.—S'il y a deux solutions passant à droite par un même point (x_0, y_0), et si l'on désigne la plus petite et la plus grande valeurs de ces solutions par $y(x)$ et $y(x)+z(x)$ $(z(x)\geqq 0)$ respectivement, on a nécessairement $z(x)=0$ par la deuxième inégalité de (6) et par le Théorème 2, en regardant $\bar{\Phi}[x_0+\xi,\ y(x_0+\xi),\ \eta]$ comme $\varphi(\xi, \eta)$ du Théorème. Il en est de même pour deux solutions passant à gauche par un même point, seulement en remplaçant $-x$ par x et au moyen de la première inégalité de (6). (C. q. f. d.)

Signalons qu'au cas particulier: $\bar{\Phi}(x, y, z)=e^{Z(z)-x}$ et $\underline{\Phi}(x, y, z)=e^{Z(z)+x}$, nous obtenons la condition de M. Osgood[1] $|F(y+z)-F(y)|\leqq\dfrac{1}{Z'(z)}$ $(z>0)$, où $Z(z)$ est une fonction continue ainsi que sa dérivée $Z'(z)$ pour $0<z<+\infty$, telle que $Z'(z)>0$ $(0<z<+\infty)$ et $\lim\limits_{z\to+0} Z(z)=-\infty$. La condition habituelle de Lipschitz est un cas encore plus particulier, tel que $Z'(z)=\dfrac{1}{kz}$ $(k>0)$.

Remarquons que, dans ce Corollaire, la condition (6) est suffisante pour l'unicité en chaque point, mais nous ne savons en rien si elle est nécessaire; il y a ici une question à résoudre plus tard.

II. Diverses conditions suffisantes pour l'unicité.

Nous allons généraliser de plus en plus la condition suffisante de l'unicité au Théorème 2. Commençons par élargir la continuité de $\varphi'_x(x, y)$.

Pour cela, disons par définition qu'une fonction $\varphi(x, y)$ est

1. Mh. Math. Phys. **9** (1898), p. 331. Récemment M. Nikliborc donne une condition suffisante d'unicité [Studia Math. **1** (1929), p. 201], mais on peut prouver que sa condition implique celle de M. Osgood.

absolument continue en x *uniformément en un point* (x_0, y_0), lorsque, pour certain nombre positif h, elle est une fonction absolument continue de x dans l'intervalle $x_0-h\leqq x\leqq x_0+h$ pour y fixe tel que $y_0-h\leqq y\leqq y_0+h$, et que la continuité absolue est uniforme pour y, c'est-à-dire, pour ε positif arbitraire, l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i'-x_i|<\delta \quad [x_0-h\leqq x_i,\ x_i'\leqq x_0+h \quad (i=1,\ 2,\dots,\ m)]$$

entraîne

$$\sum_{i=1}^{m}|\varphi(x_i',\ y)-\varphi(x_i,\ y)|<\varepsilon \quad (y_0-h\leqq y\leqq y_0+h),$$

δ étant un nombre positif convenable dépendant de ε seul et indépendant du choix de x_i, x_i', m et y.

Alors, *si* $\varphi(x, y)$ *est de même qu'au Théorème* 2, *sauf l'existence et la continuité de* $\varphi_x'(x, y)$, *si cependant* $\varphi(x, y)$ *est absolument continue en* x *uniformément en chaque point intérieur à* D, *et si l'inégalité* (4) *a lieu en un point quelconque intérieur de* D *tant que* $\varphi_x'(x, y)$ *y existe, la solution de* (1) *issue de* O *est unique.*[1]

En effet, si $y(x)$ est une fonction absolument continue, $u(x)=\varphi[x, y(x)]$ l'est aussi au voisinage d'un point x où $y(x)>0$, et l'on a

$$\frac{du(x)}{dx}=\varphi_x'(x,\ y)+\varphi_y'(x,\ y)\frac{dy(x)}{dx},$$

tant que $\dfrac{dy(x)}{dx}$ et $\dfrac{du(x)}{dx}$ existent simultanément ; ainsi on peut raisonner comme dans la démonstration du Théorème 2.

Comme exemple de cette proposition, posons $\varphi(x, y)=e^{Z(y)-X(x)}$ où $X(x)$ est une fonction absolument continue de x dans l'intervalle $\varepsilon\leqq x\leqq a$ pour tout nombre positif petit ε, telle que $\lim\limits_{x\to+0} X(x)$ soit déterminée finie, et $Z(y)$ a une dérivée continue positive pour $0<y<+\infty$, telle que $\lim\limits_{y\to+0} Z(y)=-\infty$; nous obtenons la condition $f(x, y)\leqq\dfrac{X'(x)}{Z'(y)}$ due à M. Tonelli[2].

---

1. Dans cette conclusion et dans quelques résultats suivants, la continuité de $f(x, y)$ n'est en rien essentielle et on peut conclure de même pour $f(x, y)$ quelconque définie dans le rectangle, en entendant, par une solution de (1) issue de O, une fonction $y(x)$, telle que $y(x)$ soit une intégrale indéfinie de $f[x, y(x)]$, au sens de M. Lebesgue, pour $x>0$, et que $\lim\limits_{x\to+0} y(x)=0$.

2. *Loc. cit.* Il suffit que cette inégalité subsiste en dehors d'un ensemble dont la projection sur l'axe de x est de mesure linéaire nulle, car si l'on modifie $f(x, y)$ sur un tel ensemble, les solutions de (1) ne changent rien.

D'autre part, on en tire une condition suffisante pour l'unicité de la solution de (5) en

Ce résultat cependant ne donne pas la condition d'unicité de M. Nagumo[1] $f(x, y)<\frac{y}{x}\cdot$ Pour l'obtenir simultanément, nous rejettons la continuité de $\varphi(x, y)$ sur la droite $x=0$.

Théorème 3.—*Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue dans le domaine $E[0<x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq a(x)]$, où $a(x)$ est une fonction continue et positive pour $0<x\leqq a$; et soit $\varphi(x, 0)=0$. De plus $\varphi(x, y)$ est absolument continue en x uniformément en chaque point intérieur de E, ayant la dérivée $\varphi'_y(x, y)$ continue et positive dans l'intérieur de E. Alors si $y(x)$ est une solution de* (1) *telle que $0\leqq y(x)<a(x)$ $(0<x<\delta)$[2] et*

$$\lim_{x\to+0}\varphi[x, y(x)]=0, \tag{7}$$

et si l'inégalité

$$f(x, y)\leqq-\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} \tag{8}$$

est vérifiée sur la courbe intégrale, tant que $y(x)>0$ et $\varphi'_x[x, y(x)]$ existe, on a nécessairement $y(x)=0$ $(0\leqq x\leqq a)$.

Démonstration.—Comme dans la démonstration du Théorème 2, la fonction $u(x)=\varphi[x, y(x)]$ $(0<x<\delta)$ est non croissante dans un intervalle de x où $y(x)>0$, tandis qu'elle ne s'annule pas entre $x=0$ et $x=x_1$ si $y(x_1)>0$; on a par suite $\lim_{x\to+0}\varphi[x, y(x)]>0$ contradictoirement à l'hypothèse (7). (C. q. f. d.)

Il s'ensuit évidemment toutes les conditions suffisantes pour l'unicité que nous avons rencontrées dans les lignes précédentes.

Comme autre exemple, posons $\varphi(x, y)=e^{Z(y)-X(x)}$ où $X(x)$ est absolument continue dans l'intervalle $0<\varepsilon\leqq x\leqq a$ pour tout ε et où $Z(y)$ est de même que précédemment; nous obtenons, comme condition suffisante pour l'unicité de la solution telle que $\lim_{x\to+0}\{Z[y(x)]-X(x)\}=-\infty$, la condition[3]

---

chaque point du domaine; c'est

$$|F(x, y+z)-F(x, y)|\leqq\frac{X'(x)}{Z'(z)}\quad(z>0),$$

$X'(x)$ étant sommable pour $a_0\leqq x\leqq a_1$; elle contient les conditions précédentes de Lipschitz et de M. Osgood. On peut généraliser d'ailleurs le Corollaire du Théorème 2 de sorte qu'il donne ce résultat comme un cas particulier.

1. Jap. J. Math. **3** (1926), p. 107. La condition $f(x, y)<\frac{ky}{x}$ $(0<k<1)$ avait été abordée par M. Rosenblatt, Ark. Mat. Astron. Fys. **5** (1909), n° 2.

2. Il n'est en rien nécessaire que $y(x)\leqq b$, en supposant que $f(x, y)$ soit définie, continue ou non, dans le domaine $[0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y<+\infty]$.

3. C'est ce que j'ai établi substantiellement dans ce Memoirs A **15** (1932), p. 265–266.

$$(9) \qquad f(x, y) \leqq \frac{X'(x)}{Z'(y)} \quad (y>0),$$

qui contient la condition citée de M. Tonelli. En particulier, si l'on pose $Z(y)=\log y$ et $X(x)=\log x+X_1(x)$, où $X_1(x)$ est une fonction absolument continue dans l'intervalle $0<\varepsilon\leqq x\leqq a$ pour tout ε, telle que $\overline{\lim_{x\to+0}} X_1(x)>-\infty$, on a

$$\underline{\lim_{x\to+0}}\{Z[y(x)]-X(x)\}=\underline{\lim_{x\to+0}}\left(\log\frac{y(x)}{x}-X_1(x)\right)=-\infty, \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+0}\frac{y(x)}{x}=0^1\,;$$

par conséquent l'inégalité

$$f(x, y)\leqq\left(\frac{1}{x}+X_1'(x)\right)y$$

seule suffit à conclure l'unicité.[2]

Soit maintenant $\varphi(x, y)$ comme au Théorème 3, et $\psi(x, u)$ une fonction de la même nature en prenant u au lieu de y et $\beta(x)=\varphi[x, \alpha(x)]$ au lieu de $\alpha(x)$. On voit alors que la fonction $\psi[x, \varphi(x, y)]$ remplit la condition pour $\varphi(x, y)$ au Théorème 3 et que les conditions (7) et (8) deviennent respectivement

$$(10) \qquad \underline{\lim_{x\to+0}}\,\psi\{x, \varphi[x, y(x)]\}=0,$$

$$(11) \qquad f(x, y)\leqq-\frac{\psi_x'[x, \varphi(x, y)]}{\psi_u'[x, \varphi(x, y)]\,\varphi_y'(x, y)}-\frac{\varphi_x'(x, y)}{\varphi_y'(x, y)}.^3$$

---

1. Pour cela il est indispensable que $\lim_{x\to+0} y(x)=0$ et que $f(x, y)$ soit continue au point O.

2. Nagumo, *loc. cit.* et Jap. J. Math. **4** (1927), p. 307 ; Perron, Math. Z. **28** (1928), p. 216 ; Shimizu, Proc. Imp. Acad. Jap. **4** (1928), p. 326, Condition I ; Fukuhara, Jap. J. Math. **5** (1928), p. 246 ; Rosenblatt, C. R. Acad. Sci., Paris **186** (1928), p. 1797 ; Okamura, ce Memoirs A **14** (1931), p. 94-96. Une modification : Hoheisel, Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **42** (1933), p. 33.

Si $f(x, y)$ est une fonction convexe par rapport à y, on a évidemment

$$f(x, y)\leqq f(x, x)\frac{y}{x} \quad (0\leqq y\leqq x)$$
$$\leqq\frac{y}{x} \qquad (0<x\leqq\delta)\,;$$

donc d'après la condition la solution est unique. Ce résultat a été indiqué par M. Kitagawa, Jap. J. Math. **9** (1932), p. 153.

La Condition III de M. Shimizu *loc. cit.* est un autre exemple découlant de (9). Cette condition (9) contient aussi le résultat de M. Scorza-Dragoni, Rend. Circ. Mat. Palermo **54** (1930), p. 430.

3. Ceci n'a de sens qu'en un point (x, y) où $\varphi_x'(x, y)$ et $\psi_x'[x, \varphi(x, y)]$ existent.

Posons par exemple $\varphi(x, y)=\frac{y}{x}$, $\psi(x, u)=e^{Z(u)-X(x)}$ où $X(x)$, $Z(u)$ sont comme dans (9), u étant à la place de y; soit de plus $X(x)$, telle que $\overline{\lim_{x\to+0}} X(x)>-\infty$. Dans ce cas la condition (10) revient à $\lim_{x\to+0}\frac{y(x)}{x}=0$ triviale et nous obtenons au moyen de (11) une condition suffisante d'unicité

$$f(x, y)\leqq\frac{y}{x}+\frac{xX'(x)}{Z'\left(\frac{y}{x}\right)}.^{1}$$

Remarquons enfin que si l'on écrit $y=\eta(x, u)$, en résolvant $u=\varphi(x, y)$ par rapport à y, les conditions (8) et (11) deviennent respectivement

$$f[x, \eta(x, u)]-\eta'_x(x, u)\leqq 0\ ^{2}$$

et

$$\frac{f[x, \eta(x, u)]-\eta'_x(x, u)}{\eta'_u(x, u)}\leqq-\frac{\psi'_x(x, u)}{\psi'_u(x, u)}. \tag{12}$$

Supposons dès maintenant qu'à (12) $\eta(x, u)$ est une fonction continue dans le domaine $[0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq u<+\infty]$ telle que $\eta(x, 0)=0$, ayant les dérivées partielles continues $\eta'_x(x, u)$, $\eta'_u(x, u)$ dans $[0<x\leqq a,\ 0<u<+\infty]$ telles que $\eta'_u(x, u)>0$; et que $\psi(x, u)$ est tout à fait de même que précédemment, en prenant $\beta(x)>c$ où c est un nombre positif. Alors si $\underline{\lim}_{x\to+0}\psi(x, c)=0$ et si l'inégalité (12) est vérifiée pour $0<x\leqq a$,

---

1. Nagumo, Jap. J. Math. **7** (1930), p. 159. Si l'on pose $Z'(y)=\frac{1}{y\log\frac{1}{y}}$, on a la condition

$$f(x,y)\leqq\frac{y}{x}+X'(x)y\log\frac{x}{y};$$

ou, en posant $X'(x)=X_1'(x)+X_2'(x)$, $X_1'(x)$ et $X_2'(x)$ étant non négatives et sommables dans l'intervalle $0\leqq x\leqq a$, ainsi que $|X_2'(x)\log x|$, on a, pour $y\leqq\frac{x}{e}$, la condition plus forte

$$f(x, y)\leqq\left(\frac{1}{x}+X_1'(x)\right)y+X_2'(x)y\log x+X_2'(x)y\log\frac{1}{y}$$
$$=\left(\frac{1}{x}+X_3'(x)\right)y+X_2'(x)y\log\frac{1}{y}.$$

C'est la condition de M. M. Inaba, Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. III. **11** (1929), p. 69; la Condition II de M. Shimizu *loc. cit.* y appartient comme exemple.

2. M. Fukuhara donne une pareille expression à une condition suffisante pour l'unicité [en japonais, Nippon-Sûgaku-Buturi-Gakkwaisi **6-2** (1932), p. 144], tandis qu'il n'en exprime ni la nécessité ni les conséquences qui en découlent.

$0<u\leqq c$, la solution $y(x)$ de (1), telle que $0\leqq y(x)\leqq \eta(x, c)$, est uniquement déterminée de façon que $y(x)=0$ $(0\leqq x\leqq a)$; ce qui est un résultat du Théorème 3. Si l'on pose, par exemple, $\psi(x, u)=e^{Z(u)-X(x)}$, $X(x)$ étant absolument continue pour tout $0<\varepsilon\leqq x\leqq a$ et telle que $\overline{\lim_{x\to+0}} X(x) =+\infty$, et $Z(u)$ étant de même que dans les lignes précédentes, on obtient la condition

$$\frac{f[x, \eta(x, u)]-\eta'_x(x, u)}{\eta'_u(x, u)}\leqq\frac{X'(x)}{Z'(u)}$$

due à M. Nagumo[1].

En terminant ce mémoire, l'auteur tient, en exprimant tous ses remercîments, à préciser qu'il a été poussé à ces recherches par une inspiration provoquée par une conférence sur ces sujets que M. le professeur T. Matsumoto a donnée dans un séminaire de notre institut en février 1934.

---

1. Jap. J. Math. **7** (1930), p. 156. M. Nagumo suppose que $X'(x)\leqq 0$; par cœséquent, on peut rejeter l'hypothèse $\lim_{u\to+0} Z(u)=-\infty$.