

Über den inneren Aufbau der Weissen Zwerge

von Toschima Araki und Michinori Kurihara

(Eingegangen am 15. März 1935)

Auszug.

Einer der Verfasser (T. A.) dieser Abhandlung hat neulich eine Theorie des inneren Aufbaues der Weissen Zwerge entwickelt, indem er das *Milnesche* „Standard“-Modell eines aus nicht-relativistisch entartetem Gas bestehenden Weissen Zwerges dadurch verallgemeinert hat, dass man eine Beziehung zwischen der Energieerzeugung und der Dichte im Innern solches Sternes annimmt; eine der Fundamentalgleichungen ist die *Zwändersche* polytrope Gleichung mit einem verkleinerten Index n gewesen, obwohl das Gleichgewicht selbst kein polytropes ist. (Zeits. f. Astrophys. **8**, 1934, SS. 358-369). Im ersten Abschnitte dieser Abhandlung ist der Auszug dieser Theorie skizziert; dabei sind aber die Formeln derart verallgemeinert worden, dass sie auch auf den Fall des relativistisch entarteten Gases anwendbar ist. Im zweiten Abschnitte sind die numerischen Berechnungen in bezug auf die nicht-relativistischen Weissen Zwerge für die Werte von $n=1, 0.5$ und 0 durchgeführt worden und schliesslich im dritten Abschnitte ist die negative Energiequelle näher betrachtet worden.

Einleitung.

§ 1. Auf die Tatsache, dass der Begleiter von Sirius eine uns bei irdischen Experimenten niemals begegnende aussergewöhnlich grosse Dichte besitzt, lenkte W. W. Campbell¹ schon im Jahre 1920 die Aufmerksamkeit. In 1924 deutete A. S. Eddington² darauf hin, dass, wenn solche aussergewöhnlich grosse Dichte wirklich in der Natur möglich ist, so sie insbesondere bei dem Siriusbegleiter, dank seiner Begleiter-schaft, als eine von der allgemeinen Relativitätstheorie zu erfordernde beträchtlich grosse Gravitationsrotverschiebung der Spektrallinien zutage treten muss, welche, durch entsprechende *Dopplergeschwindigkeit* ausgedrückt, $+20$ km. pro Sekunde beträgt. Die Bestätigung dieser theoretischen Schlusserfolge Eddingtons gelang bald W. S. Adams³, der aus den sehr schwierigen jedoch sehr geschickt ausgeführten Messungen von auf dem Mount Wilson Observatorium aufgenommenen Spektrogrammen eine Rotverschiebung von $+21$ km./sec. erhielt. Die Übereinstimmung des beobachteten Wertes mit dem theoretischen ist überraschend! Diese Beobachtung von Adams besitzt zweifache

1. W. W. Campbell, Astron. Soc. Pacific Publ. **32** (1920) 199

2. A. S. Eddington, M. N. R. A. S. **84** (1924) 308.

3. W. S. Adams, Nat. Acad. Sci. U. S. A. Proc. **11** (1925) 382.

Wichtigkeit, soweit sie einerseits rein physikalisch eine neue Prüfung des dritten *Einsteinschen* Effektes der allgemeinen Relativitätstheorie geliefert und andererseits astrophysikalisch die tatsächliche Existenz der Materie mit aussergewöhnlich grosser Dichte im Weltall bestätigt hat.— Prof. Adams hat, wie Sir Arthur Eddington sagt, sozusagen zwei Vögel mit einem Steine erlegt. Die Beobachtungsangaben betreffs des Siriusbegleiters sind folgendermassen:— Masse, $0.85\odot$; Radius, beinahe zwanzigtausend Kilometer; wir begegnen also bei dem Siriusbegleiter einem Stern von etwa Sonnenmasse mit einem Radius, der viel kleiner als der Radius des Planeten Uranus ist; hieraus berechnet, muss die mittlere Dichte ungefähr 50000 gr. pro cc. betragen. Seine absolute Helligkeit ist 11.3 m, was einem Dreihundertsechzigstel der Sonnenleuchtkraft entspricht; er ist also ein typischer Zwergstern in bezug auf die Leuchtkraft. Die Zwerge gehören im allgemeinen den rotfärbigen Sternen zu. Da aber das Spektrum des Siriusbegleiters von Typus A ist, ist solcher Stern „Weisser Zwerg“ genannt worden. Von der linearen Dimension oder dem Volumen aus gesehen, darf ein gewöhnlicher Zwerg im Vergleich mit dem Siriusbegleiter auch noch sogar als „Riesensterne“ gelten. K. F. Bottlinger¹ hat also dem Weissen Zwerge einen Märchen-Namen aus *Gullivers* Abenteuer „Liliput-Stern“ verliehen, um ihn von gewöhnlichen Zwergen zu unterscheiden.

Bis jetzt sind einige Weisse Zwerge bekannt, nämlich gehören die *B* Komponente von α_2 Eridani, *van Maanens* Stern und der Begleiter von Procyon sicher solcher Sternklasse an; wahrscheinlich auch der Begleiter von Mira Ceti. Die Anzahl der Sterne ist noch nicht gross, aber das bedeutet notwendig nicht, dass die Weissen Zwerge der sehr seltenen, sonderbaren Klasse der Himmelskörper gehören. Umgekehrt dürfen wir sie eher für gewöhnliche Objekte im Universum halten, denn, wenn sie sich nicht genug in der Nähe unserer Sonne befänden, so würden sie sich keine Gelegenheit an unserer Beobachtung bieten. Bottlingers Meinung nach mögen sie etwa 10% aller Sterne ausmachen. Wenn man weiter daran denkt, dass die wesentliche Bedingung für einen Weissen Zwerg in einer verhältnismässig niedrigen absoluten Leuchtkraft in Verbindung mit einer hohen Oberflächentemperatur besteht, so dürfen wir wohl mit Recht vermuten, dass die Zentralsterne der planetarischen Nebel sowie die *Ex-Novae* auch solcher Sternklasse angehören².

1. K. F. Bottlinger, Festschrift für Hugo v. Seeliger, Berlin, 1924, S. 346.

2. Vgl. E. A. Milne, Nature **130** (1932) 599.

§ 2. Trotzdem eine so ungeheuer hohe Dichte wie von der Ordnung 10^5 gr. pro cc. im irdischen Laboratorium ganz undenkbar ist, stellen sich der Sache keine unmittelbaren Schwierigkeiten entgegen, vom heutigen atomtheoretischen Standpunkte aus gesehen. Denn die Atome müssen unter den in einem Sterne herrschenden Bedingungen in hohem Grade ionisiert werden und wenn dieser Vorgang die äusserste mögliche Grenze erreicht, indem die Atome alle in die nackten Kerne und die freien Elektronen völlig zertrümmert werden, so würden sich die einzelnen unabhängigen Teilchen bis zu einer der linearen Dimension des Kernes sowie des Elektrons entsprechenden Entfernung, 10^{-13} cm, einander nähern können, was einer Dichte von der Ordnung 10^{15} gr. pro cc. entspricht. Aber diesen Sachverhältnissen stellt sich, wie A. S. Eddington¹ zuerst gezeigt hat, anderweitig eine ernste Schwierigkeit entgegen, welche darin besteht, dass, da eine so enge Packung der Materie, wie bei den Weissen Zwergen, nur solange möglich ist, als die Temperatur hoch genug bleibt, um die Materie im nötigen Masse zu ionisieren, so der Stern sich ausdehnen, also gegen die Gravitationskräfte Arbeit leisten muss, wenn er sich abkühlt und die normale Dichte, die sich festen Körpern gewöhnlich zuschreiben lässt, wiedererlangt, d. h. dass der Stern Energie brauchen wird, um sich abkühlen zu können, was dem Prinzip der Thermodynamik entgegengesetzt ist. Diese Paradoxie ist durch eine sehr bemerkenswerte Untersuchung von R. H. Fowler² auseinandergesetzt worden, welcher die von E. Fermi und von P. A. M. Dirac unabhängig voneinander vorgeschlagene neue Statistik, nämlich die Theorie des entarteten Gases, zugrunde liegt.

Die Entartung des Elektronengases erweist sich im Innern unserer Sonne sowie vieler gewöhnlichen Sterne als unwesentlich gering, während sie bei Sternen von so aussergewöhnlich grosser Dichte, wie bei den Weissen Zwergen, keineswegs vernachlässigt werden darf³. In der Tat kann man nach dem *Sommerfeldschen* Entartungskriterium⁴ leicht sehen, dass die Elektronen für Dichte von der Grössenordnung 10^5 gr. pro cc. bis zu Temperatur von 10^9 Grad abs. noch ein entartetes System bilden.

1. A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne, ins Deutsche übertragen von E. v. d. Pahlen, Berlin, S. 208.

2. R. H. Fowler, M. N. R. A. S. **87** (1926) 87.

3. Vgl. W. Anderson, Zeits. f. Phys. **50** (1928) 874

4. A. Sommerfeld, Zeits. f. Phys. **47** (1928) 1.

Seit der oben zitierten Untersuchung von Fowler wurde die Theorie der Weissen Zwerge von vielen Forschern entwickelt. Der möglichste letzte Zustand des aus entartetem Gase bestehenden Sternes ist nach Fowler derjenige, der zu einem einzigen gigantischen Molekül streng analog ist, welches sich in seinem tiefsten Zustande befindet. In solchem Grenzzustande wird man von der Temperatur gar nicht sprechen dürfen, und man müsste daher eher sagen, dass die absolute Temperatur den Wert „Null“ hat. Die Grenzdichte der sich in solchem Grenzzustande befindenden Sterne untersuchten E. C. Stoner¹, J. Frenkel², W. Anderson³ und D. S. Kothari⁴, unter Annahme der gleichmässigen Dichteverteilung innerhalb eines Sternes. Sie gingen dabei von der Bedingung aus, dass die Variation der Gesamtenergie (Gravitationsenergie plus kinetische Energie) nach Dichte verschwindet, und kamen zu dem Schluss, dass die Grenzdichte im allgemeinen von der Sternmasse abhängt.

Nun ist es von Stoner und anderen gezeigt worden, dass in der Zustandsgleichung des entarteten Gases der Druck der $4/3$ ten oder $5/3$ ten Potenz der Dichte proportional ist, je nachdem die relativistische Veränderlichkeit der Elektronenmasse eine wichtige Rolle spielt oder nicht. Mit Hilfe dieser Zustandsgleichung ist man imstande, den inneren Aufbau der Weissen Zwerge in Einzelheiten kennenzulernen, falls man von dem Gesetze in bezug auf sowohl den Absorptionskoeffizienten k als auch die Energieerzeugung ϵ sichere Kunde erhalten kann. Indem E. A. Milne⁵ in seiner allgemeinen Analyse der Sternstruktur eine „Standard“-Modell betrachtet hat, welches sich durch $k = \text{konst.}$ und $\epsilon = \text{konst.}$ kennzeichnen lässt, hat er die Fundamentalgleichung bei dem nicht-relativistisch entarteten Weissen Zwerge in eine *Emden*-sche Polytrope mit Index $n = 3/2$ gebracht. Das Problem des Weissen Zwergs als eine Polytrope ist auch von anderen Forschern⁶ diskutiert worden.

§ 3. Solange wir uns mit einem „Standard“-Modelle oder mit einem anderen aber ihm äquivalenten Modelle, z. B. einem dem *Edding-*

-
1. E. C. Stoner, Phil. Mag. **7** (1929) 63; **9** (1930) 944.
 2. J. Frenker, Zeits. f. Phys. **50** (1928) 244.
 3. W. Anderson, Zeits. f. Phys. **56** (1929) 851.
 4. D. S. Kothari, Phil. Mag. **11** (1931) 1130.
 5. E. A. Milne, M. N. R. A. S. **91** (1930) 1.
 6. Vgl. E. C. Stoner und F. Tyler, Phil. Mag. **11** (1931) 986; S. Chandrasekhar, Phil. Mag. **11** (1931) 592, M. N. R. A. S. **91** (1931) 456, Astrophys. J. **74** (1931) 81, Zeits. f. Astrophys. **3** (1931) 302; E. C. Stoner, M. N. R. A. S. **92** (1932) 651; D. S. Kothari, Phil. Mag. **12** (1931) 665; S. Suzuki, Imp. Acad. Tokyo, Proc. **7** (1931) 307; u. s. w.

tonschen Sternmodelle ähnlichen, beschäftigen wollen, lässt sich die Dichteverteilung im Innern der Weissen Zwerge immer durch eine Verteilung von derjenigen polytropen Form darstellen, welche gekennzeichnet wird durch den Index $n=1.5$ oder 3 , je nachdem auf die nicht-relativistische oder die relativistische Entartung bezogen wird. Wenn wir aber die Energieerzeugung oder den Absorptionskoeffizienten nicht für konstant halten sondern als eine im allgemeinen von der Dichte und der Temperatur abhängige Grösse annehmen, so wird die Theorie des inneren Aufbaues wesentlich anders. (Dies ist natürlich nicht nur bei den Weissen Zwergen sondern auch in der allgemeinen Analyse der Sternstruktur der Fall.) In dieser Abhandlung wollen wir, um den Einfluss der Verteilung der Energieerzeugungen auf den inneren Aufbau näher zu sehen, das „Standard“-Modell der Weissen Zwerge verallgemeinern, und zwar derart, dass der Index der Fundamentalgleichung anders als 1.5 wird. Man mag meinen, dass solcher Versuch nichts anders als von lauter rechnerischem Interesse sein wird. Aber er scheint mir doch auch noch eine nicht geringe Bedeutung zu haben, solange wir im gegenwärtigen Stande unserer Wissenschaften gar keine sichere Kunde von der Energieerzeugung im Innern der Sterne besitzen. Was den Absorptionskoeffizienten k betrifft, wollen wir ihn in dieser Abhandlung, wie bei dem „Standard“-Modelle, als konstant überall im Innern *eines* Sternes voraussetzen, was bedeutet, dass man in der ersten Annäherung von seinem durchschnittlichen Werte Gebrauch macht. Bei konstantem Absorptionskoeffizienten erweist sich die konstante Energieerzeugung als konstantes Verhältnis β des Gasdruckes zum Gesamtdrucke. Die Änderung von β bedeutet infolgedessen auch die der Energieerzeugung. In Verbindung mit der Theorie der aus gewöhnlichem Gase bestehenden Sterne hat E. A. Milne¹ zwischen dem Verhältnisse β und der Temperatur T eine Beziehung angenommen, nämlich,
$$\frac{1-\beta}{\beta^{1-s}} = \frac{1-\beta_c}{\beta_c^{1-s}} \left(\frac{T}{T_c} \right)^s,$$
 wobei sich das Suffix „ c “ auf den Wert im Sternzentrum bezieht und s einen willkürlich zu wählenden Parameter bedeutet. Er hat hieraus als die Fundamentalgleichung eine Polytrope von Index $3-s$ anstatt 3 abgeleitet. Dieses Sternmodell steht natürlich im polytropen Gleichgewichte.

Einer der Verfasser dieser Abhandlung hat neulich eine Theorie

1. E. A. Milne, M. N. R. A. S. **87** (1927) 708.

des inneren Aufbaues der Weissen Zwerge unter Annahme einer Beziehung zwischen der Dichte und der Energieerzeugung entwickelt¹; es hat sich dabei nur um das nicht-relativistisch entartete Gas gehandelt. Wir wollen zuerst die vorgeschlagene Theorie in aller Kürze schildern, indem wir jedoch zugleich die Theorie derart verallgemeinern, dass sie auch auf den Fall der relativistischen Entartung angewendet werden kann. In Abschnitt II wollen wir uns näher mit den numerischen Berechnungen beschäftigen, um die Eigenschaften der Lösung des Problems klar zu machen, und im letzten Abschnitte soll die negative Energiequelle, die notwendigerweise in unserem Sternmodelle in Erscheinung tritt, betrachtet werden.

I. Die vorgeschlagene Theorie.

§ 4. Es seien p_R , p_G der Strahlungs- und der Gasdruck, ρ die Dichte und ϵ die in der Zeiteinheit erfolgende Energiebefreiung pro Einheitsmasse in irgendeinem Punkte, dessen Entfernung vom Zentrum des Sternes r ist. Dann, da wir den Absorptionskoeffizienten k als konstant vorausgesetzt haben, erweisen sich die Bedingungen für das Gravitations- sowie Strahlungsgleichgewicht als

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp_G}{dr} \right) + 4\pi G \left(1 - \frac{k\epsilon}{4\pi Gc} \right) \rho = 0, \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp_R}{dr} \right) + \frac{k\epsilon}{c} \rho = 0, \quad \dots\dots\dots(2)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und G die Gravitationskonstante bedeutet. Nun nehmen wir als die Abhängigkeit der Stärke der Energiequelle ϵ von der Dichte das Gesetz:

$$1 - \frac{k\epsilon}{4\pi Gc} = B \left(\frac{\rho_c}{\rho} \right)^\sigma, \dots\dots(3) \quad \text{an, wo } \sigma \text{ einen willkürlichen}$$

Parameter bedeutet, welcher ein Mass der Zentralverdichtung der Energiequellen gibt, und sich das Suffix „ c “ auf den Wert im Zentrum bezieht. Eine sich in dieser Annahme ergebende Schwierigkeit besteht in dem notwendigen Vorhandensein von negativen Energiequellen im äusseren Teile des Sternes. Solche Schwierigkeit scheint bei fast allen Sternmodellen, sogar auch bei dem *Eddington*schen, von dem Standard-Modelle abgesehen, unvermeidbar zu sein, was in Abschnitt III näher betrachtet werden soll. Wir machen weiter Gebrauch von der Zustandsgleichung des entarteten Gases, nämlich

1. T. Araki, Zeits. f. Astrophys. 8 (1934) 358.

$\rho_G = K_m \rho^{1 + \frac{1}{m}}, \dots (4)$ wo K_m die sogenannte Entartungskonstante bedeutet und $m=3$ oder $3/2$ für die relativistische bzw. nichtrelativistische Entartung ist. Setzt man (3) und (4) in (1) ein und setzt man $m(1-\sigma) \equiv n, \dots (5) \quad \rho = \rho_c \psi^m, \dots (6)$

$$r \equiv \xi \left\{ \frac{(1+m)K_m \rho_c^{\frac{1}{m}-1}}{4\pi G B} \right\}^{\frac{1}{2}}, \dots (7) \quad \text{so erhält man nach einigen}$$

algebraischen Berechnungen eine polytrope Gleichung von Index n :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \psi^n = 0. \quad \dots (8)$$

Trotzdem die Gleichung polytrope ist, ist das Gleichgewicht nicht polytrope, weil die Dichte nicht zu ψ^n sondern zu ψ^m proportional ist.

§ 5. Um die Werte der Mittelpunktsdichte ρ_c und der Konstante B zu bestimmen, müssen wir für die Sternmasse M und die Gesamtausstrahlung L Ausdrücke finden. Die Masse $M(r)$, die innerhalb der Kugel von Radius r enthalten wird, erweist sich, wegen (6) und (7), als

$$M(r) = \frac{\rho_c^{\frac{3}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{3})}}{\sqrt{4\pi}} \cdot \left\{ \frac{(1+m)K_m}{GB} \right\}^{\frac{3}{2}} \cdot \Phi(\xi), \quad \dots (9)$$

wobei $\Phi(\xi)$ eine Funktion von ξ bedeutet, welche von den Parametern

$$m \text{ und } n \text{ abhängt, nämlich } \Phi(\xi) \equiv \int_0^\xi \xi'^2 \psi(\xi')^m d\xi'. \quad \dots (10)$$

Um den Ausdruck für die Gesamtausstrahlung zu finden, erhält man aus (3) and (5)

$$\frac{k\varepsilon}{4\pi Gc} = 1 - B\psi^{n-m} \quad \dots (11) \quad \text{und demgemäss}$$

$$\frac{kL(r)}{4\pi Gc} = M(r) - \frac{\rho_c^{\frac{3}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{3})}}{\sqrt{4\pi B}} \cdot \left\{ \frac{(1+m)K_m}{G} \right\}^{\frac{3}{2}} \Psi(\xi), \dots (12)$$

wo $\Psi(\xi) \equiv \int_0^\xi \xi'^2 \psi(\xi')^n d\xi' = -\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \dots (13)$ ist. Wenn wir nun mit

ξ_1 den Begrenzungswert von ξ bezeichnen, so erhalten wir aus (9) und (12) sofort für ρ_c und B die folgenden Ausdrücke:

$$\rho_c^{\frac{3}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{3})} = \frac{4\pi G^3 \Phi(\xi_1) M^2 \left(1 - \frac{kL}{4\pi GcM} \right)^3}{(1+m)^3 K_m^3 \{ \Psi(\xi_1) \}^3}, \quad \dots (14)$$

$$B = \frac{\Phi(\xi_1)}{\Psi(\xi_1)} \left\{ 1 - \frac{kL}{4\pi GcM} \right\} \quad \dots (15)$$

Es ist hier zu bemerken, dass bei der relativistischen Entartung die Mittelpunktsdichte, wegen $m=3$, unbestimmt bleibt, was bedeutet, dass

zwischen der Masse und der Gesamtausstrahlung L eine Beziehung besteht, nämlich eine Massen-Helligkeitsbeziehung :

$$M^2 \left(1 - \frac{kL}{4\pi GcM} \right)^3 = \frac{(1+m)^3 K_m^3 \{ \Psi(\xi_1) \}^3}{4\pi G^3 \Phi(\xi_1)} = \text{eine Konstante,}$$

welche für das „Standard“-Modell ($n=3$) mit der von S. Chandrasekhar¹ gegebenen Relation übereinstimmt. Mit Hilfe von (14) und (15) ist man imstande, die mittlere Dichte ρ_m , den Radius r_1 und die effektive Temperatur T_e zu berechnen ; z. B. für ρ_m ergibt sich

$$\frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{3\Phi(\xi_1)}{\xi_1^3} \dots\dots\dots(16)$$

§ 6. Um die Temperatur und das Verhältnis des Strahlungsdruckes zum Gesamtdrucke zu berechnen, müssen wir von der Gleichung (2) ausgehen. Setzt man $T = T_e \theta$, berücksichtigt man $p_R = \frac{1}{3} a T^4$, wo a die *Stefansche* Konstante bedeutet, und definiert man ferner eine neue Funktion $\varphi(\xi)$ durch

$$1 - \varphi(\xi)^{m+1} = (m+1) \int_0^\xi \varphi(\xi)^m \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \psi(\xi)^m \xi^2 d\xi, \dots\dots\dots(17)$$

so erhält man nach Integrationen

$$\theta^4 + \frac{K_m \rho_c^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{a}{3} B T_e^4} \left\{ 1 - \varphi(\xi)^{1+m} \right\} + \frac{K_m \rho_c^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{a}{3} T_e^4} \left\{ \psi(\xi)^m - 1 \right\} = 1. \dots(18)$$

Hieraus folgt, wegen der Randbedingungen : $\theta=0$ und $\psi=0$ für $\xi=\xi_1$, als die Mittelpunktstemperatur

$$T_e^4 = \frac{3K_m \rho_c^{\frac{1}{m}+1}}{a} \left\{ \frac{1 - \varphi(\xi_1)^{1+m}}{B} - 1 \right\} \dots\dots\dots(19)$$

wo ρ_c und B durch (14) und (15) gegeben sind. Wenn man nächstens mit β das Verhältnis des Gasdrucks zum Gesamtdrucke bezeichnet, so erhält man aus (18) nach einer Reihe von algebraischen Rechnungen

$$\frac{B}{\beta} = \left\{ \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} \right\}^{1+m} - \left\{ \frac{\varphi(\xi_1)}{\psi(\xi_1)} \right\}^{1+m} \quad \text{oder mittels (15)}$$

$$\beta = \frac{\varphi(\xi)^{1+m}}{\varphi(\xi_1)^{1+m} - \varphi(\xi_1)^{1+m}} \cdot \frac{\Phi(\xi_1)}{\Psi(\xi_1)} \cdot \left\{ 1 - \frac{kL}{4\pi GcM} \right\}. \dots\dots\dots(20)$$

Es ist leicht zu beweisen², dass das Verhältnis β im Zentrum minimal ist und nach aussen zunimmt und dass sein Begrenzungswert beträgt

1. S. Chandrasekhar, M. N. R. A. S. **91** (1931) 461.
 2. Vgl. T. Araki, loc. cit. S. 266.

$$\beta_1 = 1 - \frac{kL}{4\pi GcM}, \dots (21) \quad \text{welcher demjenigen konstanten}$$

Werte gleich ist, den β bei dem „Standard“-Modelle hat.

II. Numerische Betrachtungen.

§ 7. In diesem Abschnitte wollen wir die numerischen Berechnungen durchführen; dabei wollen wir aber nur den Fall der nicht-relativistischen Entartung (nämlich $m=3/2$) ins Auge fassen. Eine der Fundamentalgleichungen unserer Theorie ist die Polytrope mit Index n ; aber das Gleichgewicht selbst ist, wie schon oben erwähnt, kein polytropes, weil die Dichte ρ hier der $3/2$ -ten Potenz der polytropen Funktion $\psi(\xi)$ proportional ist, während sie bei dem polytropen Gleichgewichte der n -ten Potenz von $\psi(\xi)$ proportional sein soll. Um die Mittelpunktsdichte ρ_c und die Konstante B zu bestimmen, ist es also nötig, ausser $\Psi(\xi_1) = \xi_1^2 \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_1$ noch die durch (10) zu definierende Grösse $\Phi(\xi_1)$ zu kennen, und, um die Werte der Temperatur sowie des Strahlungsdruckes berechnen zu können, hat man die durch (17) definierte Funktion $\varphi(\xi)$ zu konstruieren. Bei dem „Standard“-Modelle, d. h. für $n=3/2$ ($\sigma=0$), stimmt natürlich $\Phi(\xi)$ mit $\Psi(\xi)$ und $\varphi(\xi)$ mit $\psi(\xi)$ überein.

Ausführliche Tabellen der Lösungen der Fundamentalgleichung (8), welche den Bedingungen $\psi(0)=1$ und $\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0$ genügen, für eine Reihe von Werten von n sind in dem berühmten Buche „Gaskugeln“ von R. Emden¹ gegeben. Es handelt sich nun für uns um die Werte von $\varphi(\xi)$ und $\Phi(\xi)$ auf Grunde der *Emdenschen* Lösungen zu berechnen. Für den besonderen Fall $n=0$ lassen sich $\Phi(\xi)$ und $\varphi(\xi)$ lediglich durch Kombinationen von trigonometrischen Funktionen ausdrücken, nämlich, mittels $\theta = \arcsin(\xi/\sqrt{6})$,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{\sqrt{6}}{32} \{ 12\theta + 3\sin 2\theta - 3\sin 4\theta - \sin 6\theta \}, \\ \varphi(\xi)^{\frac{5}{2}} &= \frac{45}{64} \theta^2 + \frac{15}{64} \theta (\sin 2\theta + 4\cot\theta) + \frac{385}{512} \cos 2\theta \\ &\quad + \frac{5}{32} \cos 4\theta + \frac{15}{512} \cos 6\theta + \frac{5}{2048} \cos 8\theta - \frac{1797}{2048}. \end{aligned}$$

Für die anderen Fälle hat man das Integral mechanisch auszuführen. In Tabellen 1, 2 und 3 sind die Ergebnisse der Berechnungen für die Fälle $n=1$, 0.5 bzw. 0 zusammengestellt.

1. R. Emden, Gaskugeln, Leipzig, 1907, SS. 77-83.

Tabelle 1

$$\left(n=1, \sigma=\frac{1}{3}\right)$$

ξ	ψ	Ψ	Φ	$\psi^{\frac{5}{2}}$	$\varphi^{\frac{5}{2}}$	β/β_1	$\theta(\beta_1=1)$
0	1	0	0	1	1	0.751	1
0.2	0.99335	0.0027	0.0027	0.9835	0.9835	.752	0.994
0.4	.97355	.0210	.0208	.9352	.9354	.756	.976
0.6	.94107	.0694	.0682	.8591	.8604	.762	.948
0.8	.89670	.1600	.1550	.7614	.7650	.771	.908
1.0	.84147	.3012	.2865	.6495	.6576	.783	.859
1.2	.77670	.4972	.4627	.5317	.5467	.797	.799
1.4	.70389	.7475	.6780	.4157	.4401	.814	.732
1.6	.62473	1.0463	.9214	.3085	.3442	.833	.657
1.8	.54103	1.3828	1.1782	.2153	.2634	.855	.576
2.0	.45465	1.7416	1.4312	.1394	.1998	.879	.490
2.2	.36750	2.1031	1.6630	.0819	.1534	.905	.401
2.4	.28144	2.4452	1.8578	.0420	.1225	.931	.311
2.6	.19827	2.7434	2.0040	.0175	.1042	.958	.220
2.8	.11964	2.9732	2.0958	.00495	.0952	.98	.125
3.0	.04704	3.1111	2.1362	.00048	.0921	—	—
π	.00000	π	2.1415	.00000	.0917	1	0

Tabelle 2

$$\left(n=0.5, \sigma=\frac{2}{3}\right)$$

ξ	ψ	Ψ	Φ	$\psi^{\frac{5}{2}}$	$\varphi^{\frac{5}{2}}$	β/β_1	$\theta(\beta_1=1)$
0	1	0	0	1	1	0.553	1
0.2	0.994	—	0.0026	0.984	0.9841	.556	0.993
0.4	.9734	0.0212	.0206	.9349	.9370	.561	.975
0.6	.9405	.0707	.0680	.8579	.8625	.570	.947
0.8	.8951	.1652	.1546	.7579	.7676	.584	.904
1.0	.8375	.3165	.2857	.6420	.6610	.602	.851
1.2	.7687	.5338	.4598	.5181	.5517	.625	.787
1.4	.6896	.8227	.6702	.3949	.4484	.655	.712
1.6	.6013	1.1843	.9034	.2803	.3580	.690	.628
1.8	.5050	1.6140	1.141	.1813	.2851	.732	.535
2.0	.4026	2.0999	1.361	.1028	.2318	.782	.434
2.2	.2957	2.6198	1.543	.0476	.1975	.838	.326
2.4	.1869	3.1371	1.668	.0151	.1792	.895	.216
2.6	.0791	3.5870	1.729	.0018	.1722	—	—
2.7528	0.0000	3.7561	1.739	0.0000	0.1714	1	0

Tabelle 3

($n=0, \sigma=1$)

ξ	ψ	Ψ	Φ	$\psi^{\frac{5}{2}}$	$\varphi^{\frac{5}{2}}$	β/β_1	$\theta(\beta_1=1)$
0	1	0	0	1	1	0,385	1
0.31972	0.98297	0.01089	0.01073	0.95795	0.95827	.390	0.984
0.63398	.93301	.08494	.07988	.84085	.84553	.406	.937
0.93738	.85355	.27455	.23933	.67309	.69344	.432	.862
1.2248	.75000	.61237	.48096	.48714	.53915	.472	.765
1.4912	.62941	1.1052	.76232	.31429	.41138	.525	.650
1.7321	.50000	1.7321	1.0276	.17678	.32286	.592	.526
1.9433	.37059	2.4463	1.2324	.083606	.27150	.673	.400
2.1213	.25000	3.1820	1.3597	.031250	.24696	.763	.279
2.2630	.14645	3.8632	1.4201	.0082073	.23773	.853	.172
2.3660	.066987	4.4151	1.4395	.0011614	.23525	.930	.086
2.4285	.017037	4.7743	1.4428	3.789×10^{-5}	.23489	.982	.026
2.4495	0	4.8990	1.4429	0	.23489	1	0

§ 8. Mit Hilfe der in den obigen Tabellen gegebenen Begrenzungswerte von ξ , $\Psi(\xi)$ und $\Phi(\xi)$ ist man imstande, die Dichte, den Radius und die effektive Temperatur zu berechnen; nämlich, aus (14) und (16) die Mittelpunkts- und die mittlere Dichte, nach der Formel

Tabelle 4

n	1	0.5	0
ρ_c/ρ_c'	0.5101	0.2367	0.09063
ρ_m/ρ_m'	0.6341	0.3551	0.1601
r_1/r_1'	1.164	1.412	1.841
T_e/T_e'	0.9269	0.8415	0.7369

$M = \frac{4}{3} \pi r_1^3 \rho_m$ den Radius r_1 und

nach $\pi a c r_1^2 T_e^4 = L$ die effektive Temperatur. Die Resultate der Berechnungen sind in Tabelle 4 zusammengestellt; dabei ist jede Grösse, zum Vergleiche, durch

die entsprechende Grösse bei dem „Standard“-Modelle dividiert, auf das sich der Strich bezieht.

Die Mittelpunkts-temperatur T_e wird durch (19) gegeben; sie ist natürlich von der Grösse $1 - \beta_1 = \frac{kL}{4\pi GcM}$ abhängig. Wenn man als erste Approximation diese Grösse Null setzt, so kann man leicht

beweisen, dass sie zu $\theta \equiv \frac{\{\Phi(\xi_1)\}^{\frac{1}{5}} \{\Psi(\xi_1)[1 - \varphi(\xi_1)^{\frac{5}{2}}] - \Phi(\xi_1)\}^{\frac{1}{4}}}{\{\Psi(\xi_1)\}^{\frac{5}{4}}}$ propor-

tional ist. Der Mittelpunktswert von β wird aus (20) ermittelt, indem man dort $\varphi(0) = \psi(0) = 1$ setzt. In Tabelle 5 sind die Werte von ρ_c/ρ_m , θ und β_c/β_1 gegeben.

Insgesamt können wir den Einfluss der zentralen Verdichtung der Energieerzeugung auf den inneren Aufbau der nicht-relativistisch entarteten Weissen Zwerge folgendermassen zusammenfassen:

Tabelle 5

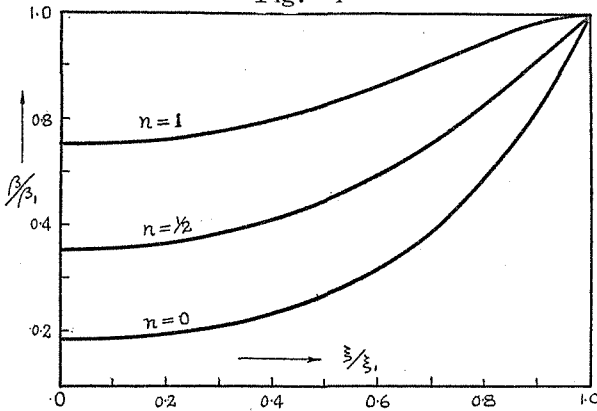
n	ρ_c/ρ_m	Θ	β_c/β_1
1.5 (Standard)	6.000	—	1
1	4.826	0.2493	0.7506
0.5	3.999	0.2258	0.553
0	3.395	0.1797	0.3849

Je kleiner der Index n der Fundamentalgleichung ist, um so stärker, wie es aus (3) und (5) klar ist, verdichten sich die Energiequellen gegen das Zentrum. Je stärker also die Zentralverdichtung der Energiequellen ist, desto kleiner sind die zentrale sowie die mittlere Dichte, desto homogener wird die Dichteverteilung, desto grösser der Radius und der Mittelpunktswert des Verhältnisses des Strahlungsdruckes zum Gesamtdrucke und desto tiefer die effektive Temperatur. Was die zentrale Temperatur betrifft, können wir nichts von den Einzelheiten sprechen, weil wir nur die Annäherung $1 - \beta_1 = 0$ betrachtet haben, aber sie scheint mit n abzunehmen. Der Einfluss ist am stärksten bei der zentralen Dichte, jedoch nicht zu gross. Da man aber andererseits wohl vermuten darf, dass die Zentralverdichtung der Energiequellen bei den Weissen Zwergen nicht allzu gross sei, so mag man, grob genommen, auch sagen können, dass sie den inneren Aufbau dieser Sterne nicht zu beträchtlich beeinflusst.

§ 9. Die Verteilungen des Verhältnisses β und der Temperatur θ im Innern eines Weissen Zwergs sind in der vorletzten und der letzten Spalte von Tabellen 1, 2 und 3 gegeben. Die Werte von ϵ lassen sich aus (11) ermitteln; aber hier sind die Energiebefreiungen

$$\text{pro Einheitsvolumen } E \equiv \frac{k\epsilon\psi^{\frac{3}{2}}}{4\pi Gc} = \psi^{\frac{3}{2}} - \psi^n \frac{\Phi(\xi_1)}{\Psi(\xi_1)} \cdot \left\{ 1 - \frac{kL}{4\pi GcM} \right\},$$

Fig. 1



anstatt pro Einheitsmasse berechnet worden. (Tabelle 6.) Die Verteilung von β ist in Fig. 1 und die von E in Fig. 2 veranschaulicht.

Tabelle 6, Verteilung von E

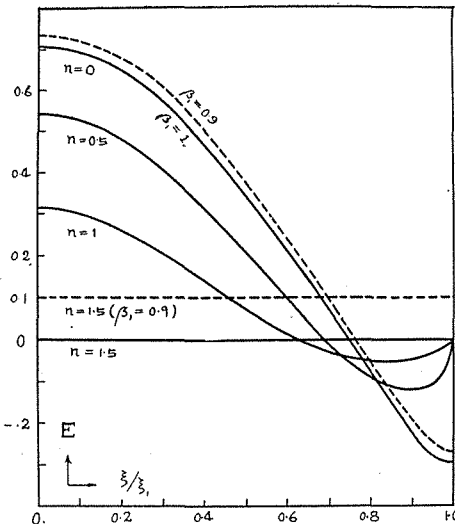
$n=1$		$n=0.5$		$n=0$		
ξ	$E(\beta_1=1)$	ξ	$E(\beta_1=1)$	ξ	$E(\beta_1=1)$	$E(\beta_1=0.9)$
0	0.3138	0	0.5407	0	0.70548	0.73493
0.2	.313	0.2	.534	0.3197	.681	.710
0.4	.295	0.4	.508	0.6340	.607	.633
0.6	.261	0.6	.469	0.9374	.494	.523
0.8	.237	0.8	.414	1.2248	.356	.384
1.0	.198	1.0	.346	1.4912	.205	.234
1.2	.155	1.2	.272	1.7321	.059	.089
1.4	.111	1.4	.193	1.9433	-.069	-.040
1.6	.068	1.6	.119	2.1213	-.169	-.140
1.8	.029	1.8	.032	2.2630	-.238	-.209
2.0	-.003	2.0	-.036	2.3660	-.278	-.246
2.2	-.028	2.2	-.089	2.4285	-.292	-.263
2.4	-.038	2.4	-.118	ξ_1	-.29452	-.26507
2.6	-.047	2.6	-.107			
2.8	-.040	ξ_1	0			
3.0	-.022					
ξ_1	0					

III. Über die negative Energiequelle

§ 10. Im Ausgangspunkte unserer Theorie haben wir zwischen der Energieerzeugung und der Dichte die Beziehung (3) angenommen. Da ϵ für $\sigma=0$ ($n=1.5$) konstant ist, gilt die Annahme (3) als eine Art Verallgemeinerung des „Standard“-Modelles. Aber solcher Annahme stellt sich, von $\sigma \leq 0$ abgesehen, eine Schwierigkeit entgegen, welche darin besteht, dass die negativen Energiequellen unvermeidbar auf dem

äusseren Gebiete des Sternes stattfinden, wo die Dichte kleiner als ein gewisser Wert ist. In der Tat verschwindet ϵ , nach den im vorhergehenden Abschnitte gegebenen Berechnungen, für folgende ξ_0 und ausserhalb dieses Punktes ist ϵ überall negativ bis zur Oberfläche; nämlich, in der Annäherung $1-\beta_1=0$, für $n=1$, $n=0.5$, $n=0$, beziehungsweise $\xi_0 = 1.9769$, 1.893 , 1.82865 , oder $\xi_0/\xi_1 = .63$, $.69$, $.73$. Der Wert von ξ_0 wird durch den von $1-\beta_1$ nicht viel beeinflusst; z.

Fig. 2



B. bei $n=0$ beträgt ξ_0 1.87727 für $1-\beta_1=0.1$.

Die Energiebefreiung pro Einheitsmasse ϵ strebt nach einer negativen Unendlichkeit an der Begrenzung. Das ist aber bei der Energiebefreiung pro Einheitsvolumen nicht der Fall, weil auch die Dichte an der Oberfläche derart verschwindet, dass $\epsilon\psi^{\frac{3}{2}}$ dort endlich bleibt, wie in Tabelle 6 gezeigt. Beim gegenwärtigen Stande unseres Wissens ist uns so gut wie gar nichts bekannt von dem Mechanismus, durch welchen die Strahlungsenergie im Innern der Sterne erzeugt wird. Es liegt heute sehr nahe zu glauben, dass sich die kolossale Quantität der Energiestrahlung der Sterne sowie die Lebensdauer unserer Sonne durch die üblichen in der Physik bekannten Vorgänge, z. B. Gravitationsenergie, Radioaktivität usw. keineswegs erklären lassen. Wenn man nun an solche Beobachtungsangabe, wie die allmähliche Abnahme der Sternmasse entlang der „Hauptsequenz“ denkt, so scheint die Ansicht sehr plausibel zu sein, dass die Strahlungsenergie im Innern der Sterne durch die „Annihilation“ der Materie entsteht, —nach poetischer Ausdrucksweise ist die Strahlungsenergie etwa ein sehr geheimnisvoller aus derjenigen Asche wiedergeborener Phönix, die das „Brennen“ der Materie ins „Nichts“ zur Folge hat. Was für Gesetze die Annihilation der Materie befolgt, wird ein sehr interessantes Problem sein, das sich wohl erst durch den zukünftigen Fortschritt der gerade in der Gegenwart sich entwickelnden Kernphysik erklären lassen wird. Wenn man aber daran denkt, dass man nach der Relativitätstheorie so wohl die Energie als auch die Masse sozusagen für eine „Phase“ oder einen „Zustand“ eines allgemeineren Begriffes halten darf, so mag es nicht unzulässig sein, zu vermuten, dass unter Umständen nicht nur sich die „Masse“ durch einen Annihilationsvorgang in „Strahlung“ *verdampft*, sondern in umgekehrter Richtung auch sich die „Strahlung“ durch einen Materialisierungsvorgang in „Masse“ *verstarbt*. Dieser letztere Vorgang entspricht ja der negativen Energiequelle. Nach solcher Denkweise könnte man auch die negative Energiequelle für möglich halten.

§ 11. Der negativen Energiequelle begegnen wir bei manchen Sternmodellen. Das ist, wie E. A. Milne¹ gezeigt hat, auch bei dem *Eddingtonschen* Modelle der Fall. Die Annahme, die das *Eddingtonsche* Modell charakterisiert, besteht in der Relation $\eta k = \text{konst.}$ ², wo k den Absorptionskoeffizienten in einem vom Zentrum um r entfernten Punkte bedeutet und η durch $\frac{4\pi}{M(r)} \int_0^r \epsilon \rho r^2 dr$ definiert wird. Nach

1. E. A. Milne, M. N. R. A. S. **87** (1927) 708.

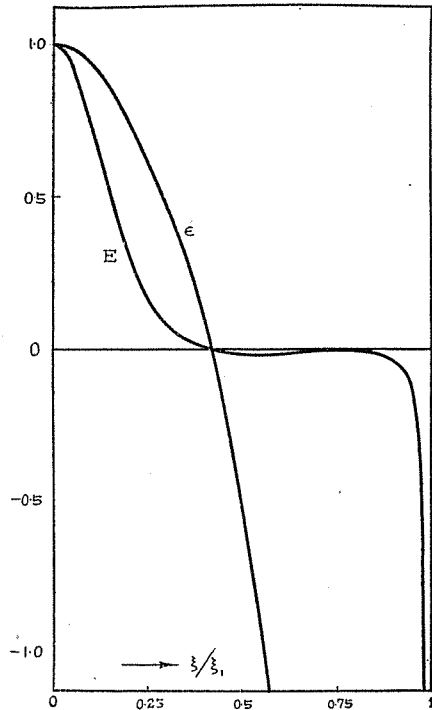
2. A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne, Kap. VI.

der Ansicht von Eddington scheint der innere Aufbau der Sterne im allgemeinen ganz unempfindlich gegen sehr starke Änderungen der willkürlich anzunehmenden Verteilung der Energiequellen zu sein. Wenn dies in Wirklichkeit der Fall ist, so liegt es wohl nahe, dass die Annahme $\eta k = \text{konst.}$, wie Eddington behauptet, als eine erste Annäherung gilt. Trotzdem enthält sie eine sehr unnatürliche Eigentümlichkeit, vom rein mathematischen Standpunkte aus gesehen. Nun gilt die Gleichung $k\eta = \text{konst.}$ als die Bedingung dafür, dass ein Stern im polytropen Gleichgewichte steht. Die Verteilung der Energiequellen muss infolgedessen durch diese Gleichung eindeutig bestimmt werden, damit der Stern eine polytrophe Gaskugel ist. Wenn man nun von dem *Kramers-Eddingtonschen* Gesetz¹ des Absorptionskoeffizienten, nämlich $k \propto \rho / T^{\frac{3}{2}}$ Gebrauch macht, so kann man nach der *Eddingtonschen* Theorie leicht herleiten

$$\epsilon \propto \psi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \psi^{-\frac{7}{2}} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2.$$

Hieraus berechnet, kommen wir zu dem Schluss, dass ϵ sowie E für den Punkt $\xi/\xi_1 = 0.43$ verschwinden und ausserhalb dessen überall negativ sind, um auf der Oberfläche eine negative Unendlichkeit zu erreichen. Die Verläufe von ϵ und E sind in Fig. 3 veranschaulicht. Nach den oben erwähnten, ist es selbstverständlich, dass das *Eddingtonsche* Modell, rein mathematisch genommen, derart konstruiert ist, dass sich die positive Energieerzeugung nur auf ein so kleines Gebiet um das Zentrum, wie 8% vom ganzen Volumen des Sternes beschränken lässt, während in dem grösseren Teile überall die negative Energiequellen herrschen. Solche Schwierigkeiten stellen sich manchmal

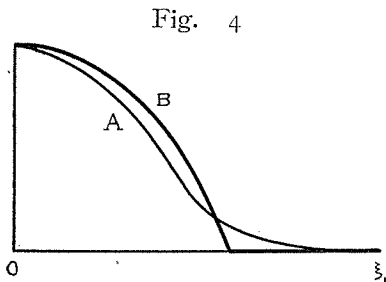
Fig. 3



1. Vgl. A. S. Eddington, loc. cit. Kap. IX.

der hydrodynamischen Untersuchung des höchst idealisierten Problems entgegen. Ein anderes Beispiel hiervon wird auch vom *v. Zeipelschen* Theorem¹ dargeboten, das lautet, dass, wenn sich ein wie ein fester Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Stern im sowohl Gravitations- als auch Strahlungs-Gleichgewichte befindet, so die Stärke der Energiebefreiung in allen Punkten seines Innern zu $1 - \frac{\omega^2/2\pi G}{\rho}$ proportional ist. Es mag nicht uninteressant sein, hier nebenbei zu bemerken, dass der *v. Zeipelsche* Satz zu dem Fall $\sigma=1$ unserer Annahme (3) formal analog ist, obwohl beide Theorien mit ganz anderen Sachen zu tun haben.

§ 12. Wie oben erwähnt, mag es unter Umständen nicht allzu unnatürlich sein, das Vorhandensein der negativen Energiequellen zu vermuten. Aber es ist auch leicht, sie dadurch aus dem Wege zu räumen, dass man ausserhalb eines Kernes, in dem die Energieerzeugung das Gesetz (3) bis zu dem ihrem Verschwinden entsprechenden Punkte befolgt, einen keine Energie befreienden Teil annimmt². Solches Modell der Weissen Zwerge wird wohl für eine Annäherung der Wirklichkeit gehalten; denn es liegt sehr nahe, dass in den äusseren Schichten der Sterne sich keine Energiequelle befindet und dass man, je näher man dem Zentrum kommt, um so stärkere Energiebefreiung findet, wie es in Fig. 4 durch die Kurve A schematisch



veranschaulicht wird, während unsere Annahme der Kurve B entspricht. Es handelt sich dann um ein „Fit“-Problem, dessen Lösungen sich durch eine Reihe von *Fowler-Milneschen* Lösungen von zusammengeklapptem Typus der polytropen Gleichung mit Index $n=3/2$ geben lassen.

Wir haben uns in dieser Abhandlung nur mit dem aus nicht-relativistisch entartetem Gase bestehenden Weissen Zwerge beschäftigt. Für die relativistische Entartung ist m gleich 3. In diesem Falle erweist sich die Mittelpunktsdichte, wie in § 5 gezeigt, als unbestimmt und man erhält ein „Massen-Luminosität“-Relation, welche im Falle des verschwindenden Wertes von $1 - \beta_1$ eine Grenzmasse des entart-

1. H. v. Zeipel, M. N. R. A. S. 84 (1924) 665.

2. Vgl. T. Araki, Zweite Mitteilung, Zeits. f. Astrophys. 9 (1934) 163.

eten Gassternes gibt. Es wird vielleicht in der Natur keinen Stern geben, welcher vom Zentrum bis zur Oberfläche aus lauter relativistisch entartetem Gase besteht. Es mag also auch interessant sein, vom theoretischen Standpunkte aus gesehen, ein Modell des Weissen Zwerges, dessen Materie in der Umgebung des Zentrums relativistisch entartet ist und nach dem Gesetze (3) die Strahlungsenergie befreit, und dessen äusserer Teil aus nicht-relativistisch entartetem keine Energie befreienden Gas aufgebaut wird, zu konstruieren.

Zum Schlusse möchten die Verfasser der Stiftung „Hattori-Hôkô-Kwai“ für ihre wirtschaftliche Hilfe herzlichen Dank auszusprechen.

Kyoto, Institut für Astrophysik, Februar 1935.
