Applications de la Méthode d'Approximations successives aux Équations intégrales de Volterra singulières

Par Hirosi Okamura

(Reçu Jan. 25, 1937)

Considérons l'équation intégrale

$$(1) \qquad \varphi(x)=\int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds+f(x)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue tandis que $K(x, s)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, réelles et finies dans le domaine $a\leqq s\leqq x\leqq b$, mesurables soit par rapport aux deux variables soit par rapport à chacune d'elles, l'intégrale étant prise au sens de M. Lebesgue.

Nous établirons dans la suite certaines conditions suffisantes pour que l'on puisse obtenir une solution de (1) au moyen de la série convergente suivante :

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\dots\dots\dots \\ \text{où} \quad &\varphi_0(x)=f(x),\ \ \varphi_{n+1}(x)=\int_a^x K(x, s)\varphi_n(s)ds \qquad (n=0, 1, 2,\dots); \end{aligned}$$

et par rapport à cette solution nous démontrerons ensuite certaines propriétés qui la caractérisent seule parmi toutes les solutions de (1), c'est-à-dire, telles qu'elle est la solution unique possédant les mêmes propriétés.[1]

1. Conditions de M. Evans.—Faisons d'abord quelques remarques très simples.

Le noyau $K(x, s)$ étant donné comme ci-dessus, si l'on trouve deux fonctions $\Omega(x)$, $F(x)$ finies, non négatives, et mesurables dans l'intervalle $a\leqq x\leqq b$, telles que

$$(3) \qquad \Omega(x)\geqq\int_a^x |K(x, s)|\Omega(s)ds+F(x) \qquad [a\leqq x\leqq b],$$

alors il est évident que l'on peut poser

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\Phi_0(x)=F(x),\ \ \Phi_{n+1}(x)=\int_a^x |K(x, s)|\,\Phi_n(s)ds \qquad (n=0, 1, 2,\dots), \\ &\Phi(x)=\Phi_0(x)+\Phi_1(x)+\Phi_2(x)+\dots\leqq\Omega(x) \qquad [a\leqq x\leqq b], \end{aligned}$$

---

1. A propos des mémoires antérieurs concernant cette recherche, le lecteur est prié de voir les indications bibliographiques aux pages suivantes, tandis qu'on en trouve un exposé général dans l'ouvrage de MM. Volterra et Pérès, Théorie générale des fonctionnelles, t. 1 (1936), Chap. VII, n° 30-31.

et que l'on a

$$\Phi(x)=\int_a^x |K(x, s)|\, \Phi(s)ds+F(x) \qquad [a\leqq x\leqq b].$$

Si, de plus, la fonction $f(x)$ est telle que

(5) $\qquad |f(x)|\leqq F(x) \qquad [a\leqq x\leqq b],$

on obtient une solution $\varphi(x)$ de l'équation (1) au moyen de la série (2) et $\varphi(x)$ satisfait à l'inégalité

(6) $\qquad |\varphi(x)|\leqq \Phi(x) \qquad [a\leqq x\leqq b].$

En effet, on a d'après (2), (4) et (5), les inégalités

$$|\varphi_n(x)|\leqq \Phi_n(x) \qquad (n=0, 1, 2,\ldots),$$

et l'inégalité (6).

Dans les mêmes conditions, l'équation

(7) $\qquad \psi(x)=\int_a^x K(x, s)\psi(s)ds$

n'a qu'une seule solution $\psi(x)=0$ $[a\leqq x\leqq b]$ de façon que l'on ait

(8) $\qquad |\psi(x)|\leqq \Phi(x) \qquad [a\leqq x\leqq b].$

On a, en effet, d'après (7) et (4),

$$|\psi(x)|\leqq \int_a^x |K(x, s)\psi(s)|\, ds\leqq \int_a^x |K(x, s)|\, \Phi(s)ds$$
$$=\int_a^x |K(x, s)|\,[\Phi_0(s)+\Phi_1(s)+\ldots]ds=\Phi_1(x)+\Phi_2(x)+\ldots,$$

par conséquent on a de plus

$$|\psi(x)|\leqq \int_a^x |K(x, s)|\,[\Phi_1(s)+\Phi_2(s)+\ldots]ds=\Phi_2(x)+\Phi_3(x)+\ldots$$

et ainsi de suite ; donc, la fonction $\psi(x)$ étant inférieure en module à une suite qui tend vers 0, elle est nécessairement nulle.

Dans un de ses travaux, M. Evans[1] démontre que l'équation (1) a toujours une seule solution bornée dans les conditions suivantes :

α. $f(x)$ est borné ;

β. $\qquad \int_a^x |K(x, s)|\, ds< M \qquad [a\leqq x\leqq b],$

M étant un nombre fixe ;

γ. L'intervalle $a\leqq x\leqq b$ peut être divisé en un nombre fini d'intervalles partiels par des points $a_0=a<a_1<a_2<\ldots<a_k=b$ tels que l'on ait les inégalités

$$\int_{a_i}^x |K(x, s)|\, ds\leqq H< 1 \qquad [a_i\leqq x\leqq a_{i+1}] \quad (i=0, 1,\ldots,k-1),$$

1. Trans. Amer. Math. Soc. **11** (1910), p. 393. Le même auteur traite dans un autre mémoire [Trans. Amer. Math. Soc. **12** (1911), p. 429] quelques résultats se rattachant beaucoup à notre sujet mais de nature tout à fait différente de ce que nous obtenons dans le présent mémoire.

H étant un nombre fixe.

C'est une conséquence de ce que nous avons remarqué plus haut. A ce sujet, signalons que, $F(x)$ étant supposé borné, pour vérifier (3) on peut poser $\Omega(x)$ de la manière suivante :

$$\Omega(x)=c_i \qquad [a_i \leqq x < a_{i+1}] \quad (i=0, 1, \ldots, k-1),$$

c_i étant des nombres positifs convenables ; ce que l'on peut démontrer facilement par les conditions β et γ. D'après cela, la série (2) donne, sous les conditions α, β et γ, une solution $\varphi(x)$ bornée, car, en posant $F(x)=|f(x)|$, on constate (3), (4), (5) et (6) et l'on en tire

$$|\varphi(x)| \leqq \Omega(x) \qquad [a \leqq x \leqq b];$$

réciproquement $\varphi(x)$ est la seule solution bornée, car, s'il y a deux solutions, en désignant par $\psi(x)$ leurs différence, et en posant $F(x)=|\psi(x)|$, on constate (3), (4), (5), (6), (7) et (8), d'où découle l'identité

$$\psi(x)=0 \qquad [a \leqq x \leqq b].$$

2. **Conditions nouvelles de convergence.**—Nous nous proposons, d'autre part, des conditions suffisantes pour que nous obtenions une solution de (1) au moyen de (2), que voici :

A. $\quad |K(x, s)| \leqq \bar{K}(x, s) \qquad [a \leqq s \leqq x \leqq b]$

où $\bar{K}(x, s)$ est mesurable comme $K(x, s)$, mais $\bar{K}(x, s)$ n'est pas toujours finie, pouvant être $+\infty$ pour certains points (x, s) ;

B. $\quad \bar{K}(x, s)\bar{K}(s, y) \leqq \bar{K}(x, y) \times N(s) \qquad [a \leqq y \leqq s \leqq x \leqq b]$

où $N(s)$ est une fonction non négative mesurable de s pour $a \leqq s \leqq b$ mais pas toujours finie, cette inégalité étant regardée comme vérifiée lorsque la multiplication indéterminée $0 \times \infty$ (ou $\infty \times 0$) se présente dans l'un ou l'autre des deux membres[1] ;

C. $N(s)$ est sommable dans l'intervalle $a+\varepsilon \leqq x \leqq b$ pour tout nombre positif petit ε, soit $L(s)$ son intégrale indéfinie ; on a :

$$L(s)=\int N(s)ds \qquad [a < s \leqq b];$$

D. $\bar{K}(x, s)f(s)e^{-L(s)}$ est sommable dans l'intervalle $a < s \leqq x$ pour tout x tel que $a < x \leqq b$.[2]

Démontrons, sous ces conditions, la convergence de la série (2). En posant

$$(9) \qquad \bar{\varphi}_0(x)=|f(x)|, \quad \bar{\varphi}_n(x)=\int_a^x \bar{K}(x, s)|f(s)|\frac{[L(x)-L(s)]^{n-1}}{(n-1)!}ds \qquad (n=1, 2, \ldots)^2$$

---

1. Dans ce mémoire, nous conviendrons sans aucune notation de supposer égale à 0 le produit de 0 et de ∞, tandis que nous entendrons par la notation $\times$ la multiplication telle que le produit de 0 et de ∞ soit égale à ∞. 2. *Cf.* la note 1.

qui existent par D, on a

$$(10) \qquad |\varphi_n(x)| \leqq \int_a^x \bar{K}(x, s)\bar{\varphi}_{n-1}(s)ds \leqq \bar{\varphi}_n(x) \qquad (n=1, 2, \ldots),^1$$

parce que si l'on vérifie (10) pour certain n, on a par A

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x)| &\leqq \int_a^x \bar{K}(x, s)\bar{\varphi}_n(s)ds \\ &= \int_a^x \bar{K}(x, s)ds \int_a^s \bar{K}(s, t)|f(t)| \frac{[L(s)-L(t)]^{n-1}}{(n-1)!}dt \\ &= \int_a^x |f(t)|dt \int_t^x \bar{K}(x, s)\bar{K}(s, t) \frac{[L(s)-L(t)]^{n-1}}{(n-1)!}ds, \end{aligned}$$

qui est, d'après B et C,

$$\begin{aligned} &\leqq \int_a^x |f(t)|dt \int_t^x [\bar{K}(x, t) \times N(s)] \frac{[L(s)-L(t)]^{n-1}}{(n-1)!}ds \\ &= \int_a^x \bar{K}(x, t)|f(t)| \frac{[L(x)-L(t)]^n}{n!}dt = \bar{\varphi}_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Donc la série (2) est majorée par une autre

$$(11) \qquad \bar{\varphi}_0(x) + \bar{\varphi}_1(x) + \ldots \quad = |f(x)| + \int_a^x \bar{K}(x, s)|f(s)| e^{L(x)-L(s)} ds$$

qui est convergente d'après D ; il en résulte la convergence de la série (2) qui satisfait à l'équation (1).

Comme on le voit par ce qui précède, la solution obtenue $\varphi(x)$ est telle que

$$(12) \qquad |\varphi(x)| \leqq |f(x)| + \int_a^x \bar{K}(x, s)|f(s)| e^{L(x)-L(s)} ds.^1$$

Or elle est la seule solution qui satisfasse à cette inégalité, ce que nous démontrerons comme suit : S'il y a deux solutions telles qu'elles vérifient (12), en désignant par $\psi(x)$ leur différence, on a

$$\psi(x) = \int_a^x K(x, s)\psi(s)ds,$$

$$|\psi(x)| \leqq 2\left[|f(x)| + \int_a^x \bar{K}(x, s)|f(s)| e^{L(x)-L(s)} ds\right],$$

donc, d'après A et (11),

$$|\psi(x)| \leqq \int_a^x \bar{K}(x, s) 2[\bar{\varphi}_0(s) + \bar{\varphi}_1(s) + \ldots]ds$$

qui est, par (10),

$$\leqq 2[\bar{\varphi}_1(x) + \bar{\varphi}_2(x) + \ldots],$$

et, par suite, d'une façon analogue,

$$|\psi(x)| \leqq 2[\bar{\varphi}_2(x) + \bar{\varphi}_3(x) + \ldots]$$

et ainsi de suite successivement ; il en résulte l'identité $\psi(x) = 0$.

---

1. *Cf.* la note 1 de la page 41.

Nous caractériserons pourtant dans le numéro suivant la solution $\varphi(x)$ d'une autre manière où n'intervient plus la fonction $f(x)$.

3. Unicité.—Nous avons besoin d'un lemme que voici :

$K(x, s)$ satisfaisant aux conditions A, B et C du numéro **2**, la solution $\psi(x)$ de l'équation

$$\psi(x)=\int_a^x K(x, s)\psi(s)ds$$

doit être identiquement nulle, pour que $\bar{K}(x, s)\psi(s)$ soit sommable dans l'intervalle $a\leqq s\leqq x$ pour tout x tel que $a<x\leqq b$, et que de plus, pourvu que $\lim_{x\to a+0} L(x)=-\infty$, on ait

$$(13)\qquad \lim_{s_0\to a+0}\int_{s_0}^{s_1}\bar{K}(x, s)\,|\,\psi(s)\,|\,\frac{e^{-L(s)}}{\sqrt{-L(s)}}ds=0,$$ [1]

pour tout x tel que $a<x\leqq b$, où s_1 est le nombre le plus petit tel que

$$-L(s_1)=-L(s_0)+k\sqrt{-L(s_0)},$$

k étant un nombre positif, arbitraire d'ailleurs.

Car on a

$$|\,\psi(x)\,|\leqq\int_a^x \bar{K}(x, s)\,|\,\psi(s)\,|\,ds,$$

et par suite, comme dans la démonstration de (10),

$$|\,\psi(x)\,|\leqq\int_a^x \bar{K}(x, s)\,|\,\psi(s)\,|\,\frac{[L(x)-L(s)]^n}{n\,!}ds \quad (n=0, 1, 2,\dots);$$

or, si $\lim_{x\to a+0} L(x)>-\infty$, ce second membre tend vers 0 pour $n\to\infty$, tandis que, si $\lim_{x\to a+0} L(x)=-\infty$, la condition (13) est nécessaire et suffisante pour que ce second membre tende vers 0 pour $n\to\infty$,[2] ce qui prouve notre lemme.

On connait d'ailleurs une condition plus forte, suffisante pour que $\psi(x)=0$, telle que la suivante :[3]

$$(14)\qquad \int_a^x \bar{K}(x, s)\,|\,\psi(s)\,|\,ds<\infty \text{ et } \lim_{s_0\to a+0} e^{-L(s_0)}\int_a^{s_0}\bar{K}(x, s)\,|\,\psi(s)\,|\,ds=0$$

$$[a<x\leqq b].$$ [4]

Cela posé, nous démontrerons que *la solution $\varphi(x)$ obtenue par la série* (2) *sous les conditions* A, B, C *et* D *au numéro précédent, est la seule solution de* (1) *telle que*

$$(15)\qquad \int_a^x \bar{K}(x, s)\,|\,\varphi(s)\,|\,ds<\infty \textit{ et } \lim_{s_0\to a+0} e^{-L(s_0)}\int_a^{s_0}\bar{K}(x, s)\,|\,\varphi(s)\,|\,ds=0$$ [4]

pour tout x tel que $a<x\leqq b$.

---

1. *Cf.* la note 1 de la page 41. 2. *Voir* Okamura, ces Memoirs A **15** (1932), p. 255-261. 3. *Voir* Okamura, *loc. cit.* p. 261-262. 4. *Cf.* la note 1 de la page 41.

En effet, on a, d'après (12), B, C et D,

$$\int_a^{s_0}\bar{K}(x,s)|\varphi(s)|ds \leqq \int_a^{s_0}\bar{K}(x,s)ds\Big[|f(s)|+\int_a^s \bar{K}(s,t)|f(t)|e^{L(s)-L(t)}dt\Big]$$
$$\leqq \int_a^{s_0}\bar{K}(x,s)|f(s)|ds+\int_a^{s_0}|f(t)|dt$$
$$\times\int_t^{s}\Big[\bar{K}(x,t)\times N(s)\Big]e^{L(s)-L(t)}ds$$
$$\leqq \int_a^{s_0}\bar{K}(x,s)|f(s)|ds+\int_a^{s_0}\bar{K}(x,t)|f(t)|(e^{L(s_0)-L(t)}-1)dt$$
$$=\int_a^{s_0}\bar{K}(x,t)|f(t)|e^{L(s_0)-L(t)}dt<\infty\,;$$

par suite,

$$e^{-L(s_0)}\int_a^{s_0}\bar{K}(x,s)|\varphi(s)|ds \leqq \int_a^{s_0}\bar{K}(x,t)|f(t)|e^{-L(t)}dt$$

qui tend vers o pour $s_0 \to a+0$ en vertu de la condition D. Ainsi les conditions (15) sont vérifiées.

Réciproquement s'il y a deux solutions de (1) telles qu'elles satisfassent à (15), leurs différence $\psi(x)$ vérifiera (14) et par conséquent $\psi(x)$ doit être identiquement nulle, ce qui prouve notre proposition.

4. Exemples.—I. Dans le cas où

$$|K(x,s)| \leqq X(x)Y(s) \qquad [a \leqq s \leqq x \leqq b],$$

$X(x)$ et $Y(x)$ étant deux fonctions non négatives mesurables, de plus $X(x)$ supposés non identiquement nulle,[1] posons

$$\bar{K}(x,s)=X(x)Y(s),\ \ N(s)=X(s)Y(s),$$

pour vérifier les conditions A et B. Puis la condition C exprime que la fonction $X(s)Y(s)$ est sommable dans l'intervalle $a+\varepsilon \leqq s \leqq b$ pour tout nombre positif petit ε et la condition D devient

$$X(x)\int_a^x Y(s)|f(s)|e^{\int_s^b X(t)Y(t)dt}ds<\infty \qquad [a<x\leqq b].$$

Si ces conditions sont toutes réalisées, il en résulte comme au n° **3** une solution unique $\varphi(x)$ telle qu'elle satisfasse à (15), c'est-à-dire, que

$$X(x)\int_a^x Y(s)|\varphi(s)|ds<\infty\ [a<x\leqq b] \text{ et } \lim_{s_0\to a+0} e^{\int_{s_0}^b X(t)Y(t)dt}\int_a^{s_0}Y(s)|\varphi(s)|ds=0.$$

Il est à remarquer que si $X(b)=0$, la fonction $f(x)$ peut être infinie d'ordre assez élevé pour $x \to b-0$. MM. E. Hille et J. D. Tamarkin[2] ont étudié déjà le cas particulier tel que

$$X(x)=1 \text{ et } \int_a^b Y(x)dx<\infty.$$

II. Soit

---

1. *Cf.* la note 1 de la page 41.

2. Ann. of Math. 2nd ser. **31** (1930), p. 520-522.

$$K(x,s)=\lambda\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{x}\right),\ a=0,\ b>0^{1}.$$

Posons

$$\bar{K}(x,s)=|\lambda|\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{x}\right),\ N(s)=\frac{|\lambda|}{s};$$

ainsi les conditions A, B et C sont vérifiées. On a

$$L(s)=|\lambda|\log s.$$

La condition D revient à

$$\int_0^b\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)|f(s)|\left(\frac{1}{s}\right)^{|\lambda|}ds<\infty.$$

Ces conditions étant supposées vérifiées, on arrivera comme au numéro précédent à la solution unique $\varphi(x)$ telle que

$$\int_0^b\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)|\varphi(s)|\,ds<\infty \text{ et } \lim_{s_0\to+0}\left(\frac{1}{s_0}\right)^{|\lambda|}\int_0^{s_0}\frac{|\varphi(s)|}{s}ds=0.$$

III. Soit

$$K(x,s)=s^x,\ a=0,\ b>0.$$

Posons maintenant, pour vérifier les conditions A, B et C,

$$\bar{K}(x,s)=s^x,\ N(s)=s^s,\ L(s)=\int s^s ds.$$

Alors, $L(s)$ étant borné pour $0\leqq s\leqq b$, la condition D devient

$$\int_0^x s^x|f(s)|\,ds<\infty \qquad [0<x\leqq b].$$

Dans ce cas, la solution $\varphi(x)$ du numéro précédent seule satisfait aux conditions (15) qui revient à

$$\int_0^x s^x|\varphi(s)|\,ds<\infty \qquad [0<x\leqq b].$$

A souligner le fait que $f(x)$ peut être infinie d'ordre $\frac{1}{x}$ pour $x\to+0$.

En terminant ce mémoire, l'auteur tient à remercier M. le professeur T. Matsumoto, qui a bien voulu marquer son intérêt au présent travail en l'admettant dans ces Memoirs.

---

1. *Cf.* Goursat, Cours d'analyse mathématique, t. 3, 4e éd., p. 434.