Eine Anwendung der Quaternionen zur Kugelgeometrie

von **Tatuo Nakae**

(Eingegangen am 15, Dezember 1937)

Zusammenfassung.

Die Hauptsache dieser Abhandlung ist, die Kugel-Transformationen von Lie durch lineare Transformationen der Quaternionen zu zeigen, und ebenso wie bei linearen Transformationen komplexer Zahlen, das Doppelverhältnis von vier Kugeln definieren und die Invarianten von Kugeln, Kreisen oder Punkten auf dieses Doppelverhältnis reduzieren zu können. Ich habe die Andeutung zu diesem Satz Herrn Professor T. Nishiuchi zu verdanken.

§ 1. Einige Eigenschaften der Quaternionen.

In dieser Abhandlung werden Quaternionen und zwar Hyperquaternionen benutzt, im Folgenden sind einige ihrer Eigenschaften erwähnt.

Eine Hyperquaternion A kann durch die Formel dargestellt werden:

$$A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3,$$

wo a_0, a_1, a_2 und a_3 komplexe Zahlen, j_1, j_2 und j_3 die Einheiten der Quaternion sind.

Durch $\bar{A}$ zeigen wir die Quaternion

$$\bar{A}=a_0-a_1j_1-a_2j_2-a_3j_3,$$

und

$$|A|^2=A\bar{A}=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

ist nicht immer eine reelle, sondern eine komplexe Zahl. Mit $\frac{1}{A}$ bezeichnen wir die Quaternion X, (wenn vorhanden) welche die Gleichung

$$AX=1$$

erfüllt.

Es ist leicht bewiesen, dass, $\frac{1}{A}\cdot A=1$ und $\frac{1}{A}=\frac{\bar{A}}{(A\bar{A})}$, wenn $A\bar{A}\neq 0$. Wenn $A\bar{A}=0$, d. h. A ein Nullfaktor, so ist die Division unmöglich.

Gegeben A und B

$$A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3, \quad | \quad B=b_0+b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3,$$

dann $\quad A\cdot B=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)$

$$+j_1(a_1b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)$$
$$+j_2(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)$$
$$+j_3(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1).$$

Durch diese Formel können wir die folgenden beweisen:

(1) $\overline{(AB)}=\bar{B}\cdot\bar{A},$

(2) $\overline{\left(\frac{1}{A}\right)}=\frac{1}{\bar{A}},$

(3) $(A\cdot B)+\overline{(A\cdot B)}=(B\cdot A)+\overline{(B\cdot A)},$

(4) $(ABC)+\overline{(ABC)}=(BCA)+\overline{(BCA)}=(CAB)+\overline{(CAB)}.$

Nun setzen wir $\frac{A}{B}$ gleich der Quaternion $A\cdot\frac{1}{B}$, damit ergibt sich

(5) $\frac{(AC)}{(BC)}=\frac{A}{B},$

(6) $\frac{1}{(CB)}(CA)=\frac{1}{B}\cdot A.$

Wenn $X'=AX\frac{1}{B}$, dann

$$x_0{}^1=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+x_1(a_0b_1-a_1b_0-a_2b_3+a_3b_2)$$
$$+x_2(a_0b_2-a_2b_0-a_3b_1+a_1b_3)+x_3(a_0b_3-a_3b_0+a_2b_1-a_1b_2)],$$

$$x_1'=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(a_1b_0-a_0b_1-a_2b_3+a_3b_2)+x_1(a_0b_0+a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)$$
$$+x_2(-a_0b_3-a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2)+x_3(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1+a_1b_3)],$$

$$x_2'=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(-a_0b_2+a_2b_0-a_3b_1+a_1b_3)+x_1(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2+a_2b_1)$$
$$+x_2(a_0b_0-a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3)+x_3(-a_0b_1-a_1b_0+a_2b_3+a_3b_2)],$$

$$x_3'=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(-a_0b_3+a_3b_0-a_1b_2+a_2b_1)+x_1(-a_0b_2-a_2b_0+a_1b_3+a_3b_1)$$
$$+x_2(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3+a_3b_2)+x_2(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3)].$$

Wenn $A=B$ ist, ergibt sich

(7) $|X'|=|X|,\ X'+\bar{X}'=X+\bar{X},\ |X-\bar{X}|=|X'-\bar{X}'|.$

Falls $X-\bar{X}=0$, dann

$$X'-\bar{X}'=0.$$

Nun definieren wir e^X folgendermassen

(8) $e^X\equiv 1+X+\frac{X^2}{2\,!}+\ldots\ldots\ldots,$

damit ergibt sich $Xe^X=e^XX$.

Sind X und Y zwei Funktionen einer komplexen Veränderlichen t, so erhält man

$$\frac{d}{dt}(X \cdot Y) = \frac{dX}{dt} \cdot Y + X \cdot \frac{dY}{dt},$$

(9) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}\frac{1}{X},$$

$$\frac{d}{dt}(e^X) = \frac{dX}{dt} \cdot e^X = e^X \frac{dX}{dt}.$$

Besteht für alle X die folgende Formel

$$A\bar{A}X\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C\bar{C} = 0,$$

so ist

(10) $$A\bar{A} = B = C\bar{C} = 0.$$

§ 2. Anordnung der gerichteten Kugeln mit den Quaternionen.

Einer gerichteten Kugel mit Halbmesser r, Mittelpunkt (x, y, z) (bei kartesischen orthogonalen Koordinaten) soll die Hyperquaternion X

$$X = x_0 + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3;$$

$$x_0 = ir, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad (i = \sqrt{-1})$$

entsprechen.

Sind X und Y zwei gerichtete Kugeln, so bedeutet

$$\sqrt{E} = \sqrt{(X-Y)(\overline{X-Y})} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 - (r-s)^2}$$

ihre gemeinsame Tangentenentfernung. $E = 0$ ist die Bedingung für eine gleichsinnige Berührung zweier Kugeln.

§ 3. Die linearen Transformationen von Quaternionen.

Hier wollen wir die linearen Transformationen von Quaternionen, genau wie die von komplexen Zahlen, durch die Formel

$$X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ Hyperquaternionen})$$

mit $\Delta = \alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta} - \alpha\bar{\gamma}\delta\bar{\beta} - \beta\bar{\delta}\gamma\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma} =$ eine komplexe Zahl $\neq 0$,

definieren. Sie bilden auch eine Gruppe von Transformationen, weil die Existenz der Einheitstransformation, der reziproken Transformation und des Produktes zweier Transformationen und das assoziative Gesetz folgendermassen bewiesen werden.

$X' = X$ ist die Einheitstransformation. Aus zwei Transformationen

$$T: \quad X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}, \quad \Delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq 0,$$

$$S: \quad X' = \frac{\alpha' X + \beta'}{\gamma' X + \delta'}, \quad \Delta(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \neq 0,$$

folgt

$$ST: \quad X'=\frac{\alpha'\dfrac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}+\beta'}{\gamma'\dfrac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}+\delta'}.$$

Nach § 1 (5)

$$X'=\frac{(\alpha'\alpha+\beta'\gamma)X+(\alpha'\beta+\beta'\delta)}{(\gamma'\alpha+\delta\gamma)X+(\gamma'\beta+\delta'\delta)}$$
$$=\frac{\alpha''X+\beta''}{\gamma''X+\delta''},$$

wo $\qquad \Delta(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')=\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\Delta(\alpha', \beta', \gamma', \delta')\neq 0.$

Also ist das Produkt auch eine Transformation vom Typus T, deshalb ist das Produkt von zwei linearen Transformationen wieder eine solche. Das assoziative Gesetz wird leicht bewiesen. Nun wenden wir uns zur Existenz der reziproken Transformation.

Für die Transformation T: $X'=\frac{1}{X}$, $\Delta=1$, gilt die Reziproke T^{-1}: $X'=\frac{1}{X}$.

Für $\quad T$: $X'=X+\beta$, $\Delta=1$, $\quad T^{-1}$: $X'=X-\beta$.

Für $\quad T$: $X'=\alpha X$, $\Delta=\alpha\bar{\alpha}\neq 0$, $\quad T^{-1}$: $X'=\frac{1}{\alpha}X$.

Die Transformation

$$T: \qquad X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta},$$

mit $\gamma\gamma\neq 0$ und $\Delta=\alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta}-\alpha\bar{\beta}\delta\bar{\gamma}-\gamma\bar{\delta}\beta\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}=\gamma\bar{\gamma}\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)\left(\overline{\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta}\right)\neq 0$,

ist gleichwertig zu der Transformation

$$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\delta X+\gamma}=\frac{\dfrac{\alpha}{\gamma}(\gamma X+\delta)+\left(\beta-\alpha\dfrac{1}{\gamma}\delta\right)}{\gamma X+\delta}.$$

Nach § 1 (5): $\quad X'=\frac{\alpha}{\gamma}+\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)\frac{1}{\gamma X+\delta}.$

Und weil $\gamma\bar{\gamma}\neq 0$, $\Delta\neq 0$, ist T Produkt der Transformationen der Typen

$$X'=\alpha X, \quad \alpha\bar{\alpha}\neq 0$$
$$X'=\frac{1}{X},$$
$$X':\ X+\beta.$$

Und zwar

$$T=T_5T_4T_3T_2T_1,$$

wobei
$$T_1:\quad X'=\gamma X,\quad \gamma\bar{\gamma}\neq 0,$$
$$T_2:\quad X'=X+\delta,$$
$$T_3:\quad X'=\frac{1}{X},$$
$$T_4:\quad X'=\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)X,\quad \left(\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)\overline{\left(\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)}\neq 0,$$
$$T_5:\quad X'=X+\frac{\alpha}{\gamma},\quad \gamma\bar{\gamma}\neq 0.$$

Also
$$T^{-1}=T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}T_4^{-1}T_5^{-1},$$

wobei
$$T_5^{-1}:\quad X'=X-\frac{\alpha}{\gamma},$$
$$T_4^{-1}:\quad X'=\frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)}X,$$
$$T_3^{-1}:\quad X'=\frac{1}{X},$$
$$T_2^{-1}:\quad X'=X-\delta,$$
$$T_1^{-1}:\quad X'=\frac{1}{\gamma}X.$$

Oder
$$X'=\frac{\alpha'X+\beta'}{\gamma'X+\delta'}=\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{1}{\frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)}\left(X-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}-\delta\right\}$$
$$=\frac{\left(-\frac{\frac{1}{\gamma}\delta}{\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta}\right)X+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\frac{1}{\gamma}\delta}{\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta}\right)X+\left(-\frac{1}{\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)}.$$

Wenn $\gamma\bar{\gamma}=0$ aber $\delta\bar{\delta}\neq 0$, so wird die Transformation
$$T:\quad X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\gamma},\quad \delta\bar{\delta}\neq 0,\quad \Delta\neq 0,$$
durch die Transformation $X=\frac{1}{X_1}$ in den obigen Fall gebracht.

Nämlich
$$X_1'=\frac{\alpha\frac{1}{X_1}+\beta}{\gamma\frac{1}{X_1}+\delta}$$

$$=\frac{\beta X_1+\alpha}{\delta X_1+\gamma},\quad \delta\bar{\delta}\neq 0,\quad \Delta\neq 0.$$

Wenn $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=\gamma\bar{\gamma}=\delta\bar{\delta}=0$,

dann $\Delta=-(\alpha\bar{\gamma}\delta\bar{\beta}+\beta\bar{\delta}\gamma\bar{\alpha})\neq 0$.

Die Transformation

$$T:\qquad X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$$

kann, durch $X=X_1+\varepsilon$ immer in die obigen Beispiele gebracht werden. Falls es nicht ausführbar ist, d. h. der Koeffizient δ' der Transformation

$$X'=\frac{\alpha' X_1+\beta'}{\gamma' X_1+\delta'}=\frac{\alpha X_1+(\alpha\varepsilon+\beta)}{\gamma X_1+(\gamma\varepsilon+\delta)}$$

immer Nullfaktor, so gilt

$$(\gamma\varepsilon+\delta)(\overline{\gamma\varepsilon+\delta})=0$$

oder $\gamma\bar{\gamma}\varepsilon\bar{\varepsilon}+\bar{\delta}\gamma\varepsilon+\bar{\varepsilon}\bar{\gamma}\delta+\delta\bar{\delta}=\bar{\delta}\gamma\varepsilon+\bar{\varepsilon}\bar{\gamma}\delta=0$

für alle ε.

Aus § 1 (9) also $\bar{\delta}\gamma=0$ und wir haben $\Delta=0$. Es steht jedoch im Widerspruch mit der Voraussetzung $\Delta\neq 0$.

Nun ist die Existenz der reziproken Transformation unter der Bedingung $\Delta\neq 0$ völlig bewiesen worden.

Zum Schluss bilden die linearen Transformationen von Quaternionen (immer $\Delta\neq 0$) eine Gruppe von Transformationen, und sie sind Produkte der Transformationen

$$X'=\frac{1}{X},$$
$$X'=\alpha X,\quad \alpha\bar{\alpha}\neq 0,$$
$$X'=X+\beta.$$

Die linearen Transformationen und die Transformation $X'=\bar{X}$ lassen die Bedingung $E\equiv(X-Y)(\overline{X-Y})=0$ invariant. Denn, für die Transformation $X'=\alpha X$, $\alpha\bar{\alpha}\neq 0$.

$$E'=\alpha\bar{\alpha}E;$$

für $X'=\bar{X}$,

$$E'=E;$$

für $X'=X+\beta$,

$$E'\equiv E;$$

für $X'=\frac{1}{X}$,

$$E'=(X'-Y')(\overline{X'-Y'})=\frac{1}{(X\bar{X})^2(Y\bar{Y})^2}(\bar{X}Y\bar{Y}-X\bar{X}\bar{Y})(XY\bar{Y}-YX\bar{X})$$
$$=\frac{1}{(X\bar{X}Y\bar{Y})^2}\bar{Y}(Y-X)\bar{Y}Y(\overline{Y-X})X$$

$$=\frac{1}{X\bar{X}Y\bar{Y}}E.$$

Also ist die Bedingung $E=0$ invariant unter den linearen Transformation und der Transformation $X'=\bar{X}$.

Anderseits ordnen die Lieschen Transformationen sich berührender Kugeln immer wieder ebensolchen zu, d. h. sie lassen die Bedingung

$$E\equiv(X-Y)\overline{(X-Y)}=0$$

invariant. Daraus ergibt sich, dass die linearen Transformationen ($\Delta\neq 0$) und $X'=\bar{X}$ eine Untergruppe der von Lie bilden. Später wollen wir sehen, dass sie wirklich die Transformationen von Lie sind.

§ 4. Transformationen von Möbius.

Hier suchen wir die Bedingungen, dass die linearen Transformationen und $X'=\bar{X}$ die von Möbius sind. Ihre charakteristischen Eigenschaften sind, dass sie eine Untergruppe der Lie-Gruppe bilden und einen Punkt ein-eindeutig wieder einem Punkte zuordnen. Die notwendigen Bedingungen sind also, dass $r=0$ oder $X+\bar{X}=0$, dann $X'+\bar{X}'=0$ und umgekehrt.

Oder rechnerisch

$$X'+\bar{X}'=\left(\frac{aX+\beta}{\gamma X+\delta}\right)+\overline{\left(\frac{aX+\beta}{\gamma X+\delta}\right)}$$

nach § 1 (1), (2), (5),

$$=\frac{(aX+\beta)\overline{(\gamma X+\delta)}}{(\gamma X+\delta)\overline{(\gamma X+\delta)}}+\frac{1}{(\gamma X+\delta)\overline{(\gamma X+\delta)}}(\gamma X+\delta)\overline{(aX+\beta)}$$

$$=\frac{1}{(\gamma X+\delta)\overline{(\gamma X+\delta)}}[a\bar{\gamma}+\gamma\bar{a})X\bar{X}+(aX\bar{\delta}+\delta\bar{X}\bar{a})+(\beta\bar{X}\bar{\gamma}+\gamma X\bar{\beta})$$
$$+(\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta})]=0.$$

Und diese Gleichung ist gültig für jedes X, das $X+X=0$ erfüllt. Setzt man $X=0$, so erhält man

$$\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta}=0,$$

bei $X\bar{X}\to\infty$, wird $a\bar{\gamma}+\gamma\bar{a}=0.$.

Und der Zähler wird

$$(aX\bar{\delta}+\delta\bar{X}\bar{a})+(\beta\bar{X}\bar{\gamma}+\gamma X\bar{\beta})=0$$

oder, nach § 1 (2),

$$(\bar{\delta}a+\bar{\beta}\gamma)X+\bar{X}(\bar{a}\delta+\bar{\gamma}\beta)=0.$$

Diese Formel gilt für alle X, die die Gleichung $X+\bar{X}=0$ erfüllen, deshalb muss $\bar{\delta}a+\bar{\beta}\gamma$ eine komplexe Zahl sein.

Die notwendigen Bedingungen sind

$$\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta}=0,$$

(1) $$\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}=0,$$
$$(\bar{\delta}\alpha+\bar{\beta}\gamma)-(\bar{\alpha}\delta+\bar{\gamma}\beta)=0.$$

Sie sind ausreichend.

1) Wenn $\alpha\bar{\alpha}=\gamma\bar{\gamma}=0$, so kann man die gegebene Transformation $X'=\dfrac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$ mit Bedingungen (1) durch die Transformation

$$X'=X_1'+\varepsilon,\quad \varepsilon+\bar{\varepsilon}=0$$

in die Transformation $X_1'=\dfrac{\alpha' X+\beta'}{\gamma' X+\delta'}$

dessen Koeffizient α' kein Nullfaktor ist, bringen.

Denn, wenn es unmöglich ist d. h. $(\alpha-\varepsilon\gamma)\overline{(\alpha-\varepsilon\gamma)}=0$

oder
$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}-\varepsilon\gamma\bar{\alpha}+\varepsilon\bar{\varepsilon}\gamma\bar{\gamma}\\ =-(\alpha\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}+\varepsilon\gamma\bar{\alpha})\\ =0\end{aligned}$$

für alle ε, welche $\varepsilon+\bar{\varepsilon}=0$ erfüllen, so ist es notwendig, dass $\alpha\bar{\gamma}$ eine komplexe Zahl ist.

Aber aus (1) folgt $\alpha\gamma=0$ und dann $\Delta=0$.

Allerdings ist es ein Widerspruch, α' also kein Nullfaktor. Daraufhin kann man durch die Transformation $X'=\dfrac{1}{X}$ die gegebenen Transformation in eine Transformation, deren Koeffizient γ kein Nullfaktor ist, bringen.

Die gegebene Transformation kann durch die obigen Transformationen

$$X'=\frac{1}{X};\quad X'=X+\beta,\quad \beta+\bar{\beta}=0,$$

zu
$$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta},\quad \gamma\bar{\gamma}\neq 0,$$

transformiert werden.

Nun wollen wir beweisen, dass (1), $\gamma\bar{\gamma}\neq 0$ gesetzt, auch die hinreichenden Bedingungen sind.

Wenn $\gamma\bar{\gamma}\neq 0$, $\delta\bar{\delta}=0$,

so werden die Bedingungen
$$\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}=0,$$
$$\bar{\beta}\gamma-\bar{\gamma}\beta=0,$$

oder
$$\frac{\alpha}{\gamma}+\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}\right)=0$$
$$\beta=r\gamma\qquad (r;\ \text{eine komplexe Zahl}),$$

und
$$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{r\gamma}{\gamma X}$$
$$=p+r\gamma\frac{1}{X}\,\frac{1}{\gamma}\qquad(p+\bar{p}=0).$$

Diese linearen Transformationen mit den Bedingungen (1) sind die Produkte folgender Transformationen:

i) $X'=\bar{X}$

ii) $X'=\frac{1}{\bar{X}}$

iii) $X'=\gamma X\frac{1}{\gamma}$

iv) $X'=rX \quad (r-\bar{r}=0)$

v) $X'=X+p \quad (p+\bar{p}=0)$.

X als einen Punkt angesehen, ergibt ii) die Inversion in Bezug auf die Einheitskugel.

Denn $$X'=\frac{1}{\bar{X}}=\frac{X}{X\bar{X}}=\frac{x_2+j_1x_1+j_2x_2+j_3x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

oder, wenn $x_0=0$, dann

$$x_0=0$$
$$x_1^1=\frac{x_1}{x_1^2+y_2^2+x_3^2}$$
$$x_2'=\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$
$$x_3^1=\frac{x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Daraus folgt, dass die Transformation $X'=\frac{1}{X}$ die Inversion in Bezug auf die Einheitskugel ist.

i) die Spiegelungen in Bezug auf die Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ untereinander.

iii) die Drehung um den Anfangspunkt.

iv) die Vergrösserung, weil $r-\bar{r}=0$.

v) die Schiebung, weil $p+\bar{p}=0$.

2) Wenn $\gamma\bar{\gamma}\neq 0$, $\delta\bar{\delta}\neq 0$,

dann $$\Delta=\gamma\bar{\gamma}\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)\overline{\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)}\neq 0$$

und $$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$$
$$=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma X+\delta)+\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)}{\gamma X+\delta}$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma\frac{1}{\gamma}\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)}{\gamma\left(X+\frac{1}{\gamma}\delta\right)}$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma}+\gamma\left\{\frac{1}{\gamma}\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)\right\}\frac{1}{X+\frac{1}{\gamma}\delta}\frac{1}{\gamma}.$$

Später wollen wir beweisen

$$\frac{1}{\gamma}\delta+\bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}=0,\quad \frac{1}{\gamma}\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)-\overline{\left(\beta-\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)}\frac{1}{\bar{\gamma}}=0.$$

Also ist die Transformation das Produkt folgender Transformationen

i) $X'=X+\beta'$

ii) $X'=\frac{1}{\bar{X}}$

iii) $X'=\bar{X}$

iv) $X'=\gamma X\frac{1}{\gamma}$

v) $X'=\alpha' X$

vi) $X'=X+\beta''$,

wo $\beta'=\frac{1}{\gamma}\delta,\quad \beta''=\frac{\alpha}{\gamma},\quad \alpha'=\frac{1}{\gamma}\left(\beta-\frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)$

und $\beta'+\bar{\beta}'=0,\quad \beta''+\bar{\beta}''=0$ (aus (1)), $\alpha'-\bar{\alpha}'=0$.

i), ii), iii), iv), v), vi) sind die Transformationen. die wir schon erwähnt haben. Und die Transformationen $X'=X_1+\varepsilon$, $X'=\frac{1}{X}$, die wir um die Transformation $X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$ mit $\gamma\bar{\gamma}\neq 0$ zu erhalten, benutzt haben, gehören diesen Transformationen an.

Nun ergibt sich, dass die linearen Transformationen mit den Bedingungen (1) und die Transformation $X=\bar{X}$ die Produkte von Schiebung, Drehung, Vergrösserung und Inversion, nämlich die Transformationen von Möbius sind.

Die Formeln

$$\beta'+\bar{\beta}'=0,\quad \alpha'-\bar{\alpha}'=0$$

die wir angenommen haben, werden folgendermassen bewiesen. Die reziproke Transformation von $X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$ ist, wie wir schon gesehen haben

$$X' = \frac{-\frac{1}{\gamma}\delta r' X + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\delta r' \frac{\alpha}{\gamma}\right)}{r' X - r' \frac{\alpha}{\gamma}},$$

wobei $r' = \dfrac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)}$.

Wendet man die Bedingungen (1), und zwar $\alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 0$, auf diese Transformation an, so ergibt sich

$$\left(-\frac{1}{\gamma}\delta r' \bar{r}'\right) + \left(-r'\bar{r}'\bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right) = 0.$$

$$-(r'\bar{r}')\left(\frac{1}{\gamma}\delta + \bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right) = 0.$$

Also $\quad \bar{\beta}' + \beta' = 0.$

Zweitens aus

$$(\bar{\delta}\alpha + \bar{\beta}\gamma) - (\bar{\alpha}\delta + \bar{\gamma}\beta)$$

$$= (\gamma\bar{\gamma})\left[\left(\frac{1}{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\,\frac{1}{\gamma}\delta\right) - \left(\bar{\beta}\frac{1}{\bar{\gamma}} + \bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\,\frac{1}{\gamma}\alpha\right)\right] = 0.$$

Andrerseits,

aus $\quad \alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 0,$

$$\gamma\bar{\gamma}\left\{\frac{\alpha}{\gamma} + \overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\right\}$$

$$= (\gamma\bar{\gamma})\left(\frac{1}{\gamma}\alpha + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right) \quad \text{(nach § 1 (3))}$$

$$= 0.$$

Deshalb $\quad \left(\frac{1}{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\gamma\delta\right) - \left(\bar{\beta}\frac{1}{\bar{\gamma}} + \bar{\delta}\frac{1}{\delta}\,\frac{1}{\gamma}\alpha\right)$

$$= \left(\frac{1}{\gamma}\beta - \frac{1}{\gamma}\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right) - \left(\bar{\beta}\frac{1}{\bar{\gamma}} - \bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right)$$

$$= 0$$

Also $\quad \alpha' - \bar{\alpha}' = 0.$

Damit ist der Satz völlig bewiesen worden. *Kurz sind die linearen Transformationen* $X' = \dfrac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$ (immer $\Delta \neq 0$) *und die Transformation* $X' = \bar{X}$ *mit den Bedingungen*

$$\begin{aligned} &\beta\bar{\delta} + \delta\bar{\beta} = 0 \\ (1) \qquad &\alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 0 \\ &(\bar{\delta}\alpha + \bar{\beta}\gamma) - (\bar{\alpha}\delta + \bar{\gamma}\beta) = 0. \end{aligned}$$

identisch mit den Transformationen von Möbius. (*enthaltend die imaginären Transformationen*)

Um nur die reellen Transformationen zu behandeln, wenn x_0 immer eine rein komplexe und x_1, x_2, x_3 drei reelle Zahlen behandeln, dann sind für die Transformationen

$$X'=aX, \quad (a-\bar{a}=0)$$
$$X'=X+\delta, \quad (\delta+\bar{\delta}=0)$$
$$X'=\frac{1}{\bar{X}}$$
$$X'=\bar{X}$$
$$X'=\gamma X\frac{1}{\gamma}$$

α, γ, δ als ordinäre Quaternionen (nicht Hyperquaternionen) Bedingung.

§ 5. Transformationen von Laguerre.

Nun wollen wir die Transformationen von Laguerre untersuchen. Denken wir die linearen Transformationen

$$X'=\frac{aX+\beta}{\delta}, \quad (a\bar{a}=\delta\bar{\delta})$$
$$X'=\bar{X},$$

wobei $\Delta=a\bar{a}\delta\bar{\delta}\neq 0$,

so sind sie die Produkte der folgenden Transformationen

$$X'=\frac{aX}{\delta}, \quad (a\bar{a}=\delta\bar{\delta}\neq 0)$$
$$X'=X+\beta,$$
$$X'=\bar{X}.$$

Wie man leicht beweisen kann, ist die Tangentenentfernung zweier gerichteter Kugeln, $E=(X_1-X_2)\overline{(X_1-X_2)}$ eine Invariante; deshalb bilden die Transformationen eine Untergruppe der Laguerreschen. Nach der Lieschen Methode von der Minimalprojektion sind die Transformationen von Laguerre den Bewegungen im vierdimensionalen, euklidischen Raum mit den Veränderlichen, $x_0=ir$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ gleichwertig.

Anderseits ist die Transformation

$$X'=\frac{aX}{\delta} \quad (a\bar{a}=\delta\bar{\delta})$$

die Drehung um den Anfangspunkt, und

$$X'=X+\beta$$

die Schiebung im vierdimensionalen Raum. Somit sind die Transformationen:

$$X'=\frac{aX}{\delta}, \quad (a\bar{a}=\delta\bar{\delta}\neq 0)$$

$$X' = X + \beta,$$
$$X' = \bar{X}$$

die Transformationen von Laguerre (enthaltend die imaginären).

Um nur die reellen Transformationen zu behandeln, d. h. ix_0, x_1, x_2, x_3 immer reelle Zahlen, sind folgende Bedingungen erforderlich:

$$i\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 = \text{reelle Zahlen},\quad \alpha = \pm\hat{\bar{\delta}}.$$

(Das Zeichen $\wedge$ bedeutet, dass $\hat{\alpha}$ dem α konjugiert in Bezug auf die imaginären Einheit i, nicht j_1, j_2, j_3 ist.)

Die Bedingungen für β kann man leicht beweisen, die für $\alpha = \pm\hat{\bar{\delta}}$ erhalten wir folgendermassen.

Erstens

$$X' = \alpha X \frac{}{\delta} \quad (\alpha\bar{\alpha} = \delta\bar{\delta})$$

$$= \frac{\alpha}{(\delta\bar{\delta})} X \frac{1}{\dfrac{\delta}{(\delta\bar{\delta})}}$$

$$= \alpha' X \frac{1}{\delta'},$$

wo $$\alpha' = \frac{\alpha}{\delta\bar{\delta}} = \frac{\alpha}{\alpha\bar{\alpha}}$$

$$\delta' = \frac{\delta}{\delta\bar{\delta}}$$

und $$\delta'\bar{\delta}' = \alpha'\bar{\alpha}' = 1.$$

Wir können also für die Transformation $X' = \alpha X \frac{1}{\delta}$, $(\alpha\bar{\alpha} = \delta\bar{\delta})$ $\alpha\bar{\alpha} = \delta\bar{\delta} = 1$ annehmen.

Rechnet man die Formel $X' = \alpha X \frac{1}{\delta}$

so ergibt sich, nach § 1 (5):

$$\text{i)}\quad \begin{aligned} &\alpha_0\hat{\delta}_0 + \alpha_1\hat{\delta}_1 + \alpha_2\hat{\delta}_2 + \alpha_3\hat{\delta}_3, && \alpha_0\hat{\delta}_0 + \alpha_1\hat{\delta}_1 - \alpha_2\hat{\delta}_2 - \alpha_3\hat{\delta}_3,\\ &\alpha_0\hat{\delta}_0 + \alpha_2\hat{\delta}_2 - \alpha_3\hat{\delta}_3 - \alpha_1\hat{\delta}_1, && \alpha_0\hat{\delta}_0 + \alpha_3\hat{\delta}_3 - \alpha_1\hat{\delta}_1 - \alpha_2\hat{\delta}_2 \end{aligned}$$

reell;

$$\text{ii)}\quad \begin{aligned} &\alpha_0\hat{\delta}_1 - \alpha_1\hat{\delta}_0 - \alpha_2\hat{\delta}_3 + \alpha_3\hat{\delta}_2, && \alpha_0\hat{\delta}_2 - \alpha_2\hat{\delta}_0 - \alpha_3\hat{\delta}_1 + \alpha_1\hat{\delta}_3,\\ &\alpha_0\hat{\delta}_3 - \alpha_3\hat{\delta}_0 + \alpha_2\hat{\delta}_1 - \alpha_1\hat{\delta}_2, && \alpha_1\hat{\delta}_0 - \alpha_0\hat{\delta}_1 - \alpha_2\hat{\delta}_3 + \alpha_3\hat{\delta}_2 \end{aligned}$$

rein imaginär;

$$\text{iii)}\quad \begin{aligned} &-\alpha_0\hat{\delta}_3 - \alpha_3\hat{\delta}_0 + \alpha_2\hat{\delta}_1 + \alpha_1\hat{\delta}_2, && \alpha_0\hat{\delta}_2 + \alpha_2\hat{\delta}_0 + \alpha_3\hat{\delta}_1 + \alpha_1\hat{\delta}_3,\\ &\alpha_1\hat{\delta}_2 + \alpha_2\hat{\delta}_1 + \alpha_3\hat{\delta}_0 + \alpha_0\hat{\delta}_3, && \alpha_3\hat{\delta}_2 - \alpha_1\hat{\delta}_0 - \alpha_0\hat{\delta}_1 + \alpha_2\hat{\delta}_3,\\ &\alpha_1\hat{\delta}_3 - \alpha_2\hat{\delta}_0 - \alpha_0\hat{\delta}_2 + \alpha_3\hat{\delta}_1, && \alpha_2\hat{\delta}_3 + \alpha_1\hat{\delta}_0 + \alpha_3\hat{\delta}_2 + \alpha_0\hat{\delta}_1 \end{aligned}$$

reell.

Aus i) folgt, dass $\alpha_0\hat{\delta}_0$, $\alpha_1\hat{\delta}_1$, $\alpha_2\hat{\delta}_2$, $\alpha_3\hat{\delta}_3$ reell sind, oder

$$a_i = r_i \hat{\delta}_i \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

wobei r_i reelle Zahlen sind.

Aus ii) folgt, dass

$$a_0\hat{\delta}_1 - a_1\hat{\delta}_0, \quad a_0\hat{\delta}_2 - a_2\hat{\delta}_0, \quad a_0\hat{\delta}_3 - a_3\hat{\delta}_0,$$
$$a_2\hat{\delta}_3 - a_3\hat{\delta}_2, \quad a_3\hat{\delta}_1 - a_1\hat{\delta}_3, \quad a_1\hat{\delta}_2 - a_2\hat{\delta}_1$$

rein imaginär sind.

Aus iii) ergibt sich, dass

$$a_0\hat{\delta}_1 + a_1\hat{\delta}_0, \quad a_0\hat{\delta}_2 + a_2\hat{\delta}_0, \quad a_0\hat{\delta}_3 + a_3\hat{\delta}_0,$$
$$a_2\hat{\delta}_3 + a_3\hat{\delta}_2, \quad a_3\hat{\delta}_1 + a_1\hat{\delta}_3, \quad a_1\hat{\delta}_2 + a_2\hat{\delta}_1$$

reell sind.

Also sind $r_i\hat{\delta}_j\hat{\delta}_i - r_j\hat{\delta}_i\hat{\delta}_j$ u. s. w. rein imaginär, $r_i\hat{\delta}_i\hat{\delta}_j + r_j\hat{r}_j\cdot\hat{\delta}_i$ u. s. w. reell. Daraus folgt, dass $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$ oder $a_i = r\hat{\delta}_i$.

Andrerseits

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$
$$\delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 1$$

und $\quad 1 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = r^2(\delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) = r^2$

oder $\quad r = \pm 1.$

Daraus folgt $\quad a = \pm\hat{\delta}.$

§ 6. Transformationen von Lie.

Wir haben schon im § 3 bemerkt, dass die linearen Transformation

$$X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}, \quad (\Delta \neq 0)$$

aus den Transformationen

$$X' = aX \ (a\bar{a} \neq 0), \quad X' = X + \beta, \quad X' = \frac{1}{X}$$

bestehen.

Die Transformation $X' = aX$ ist das Produkt folgender Transformationen

i) $\quad X' = \sqrt{a\bar{a}}\, X$

ii) $\quad X' = aX\dfrac{1}{\sqrt{a\bar{a}}}.$

i) ist eine Transformation von Möbius und ii) eine von Laguerre. Deshalb bestehen die Transformationen aus den Transformationen

i) $\quad X' = \sqrt{a\bar{a}}\, X \quad (a\bar{a} \neq 0),$

ii) $\quad X' = aX\dfrac{1}{\sqrt{a\bar{a}}} \quad (a\bar{a} \neq 0),$

iii) $\quad X' = X + \beta,$

iv) $\quad X' = \bar{X},$

v) $\quad X' = \dfrac{1}{\bar{X}}.$

Andrerseits besteht das Produkt der Gruppen von Möbius und von Laguerre aus den Transformationen

$$\text{i})' \quad X' = \sqrt{a\bar{a}}\, X \qquad (a\bar{a} \neq 0),$$

$$\text{ii})' \quad X' = aX\frac{1}{\delta} \qquad (a\bar{a} = \delta\bar{\delta} \neq 0),$$

$$\text{iii})' \quad X' = X + \beta$$

$$\text{iv})' \quad X' = \bar{X}$$

$$\text{v})' \quad X' = \frac{1}{\bar{X}}$$

Aber ii)' wird folgendermassen geschrieben

$$\begin{aligned} X' &= aX\frac{1}{\delta}, \quad (a\bar{a} = \delta\bar{\delta} \neq 0) \\ &= aX\frac{1}{a\bar{a}}\delta\bar{\delta}\frac{1}{\delta} \\ &= \delta\bar{\delta}aX\frac{1}{aa}\,\frac{1}{\delta} \\ &= \left\{\delta\left(aX\frac{1}{a\bar{a}}\right)^{-1}\frac{1}{\delta\bar{\delta}}\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Es ist das Produkt von den Transformationen der Typen $X' = aX\frac{1}{a\bar{a}}$, $X' = \frac{1}{X}$. Daraus folgt, dass die Gruppe von i), ii), iii), iv), v) mit der von i)', ii)', iii)', iv)', v)', identisch ist, d. h. dass die linearen Transformationen und die Transformation $X' = \bar{X}$ das Produkt von Möbius'schen und von Laguerre'schen Transformationen sind.

Also bilden die linearen Transformationen

$$X' = \frac{aX+\beta}{\gamma X+\delta} \qquad (\varDelta \equiv a\bar{a}\delta\bar{\delta} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma} - \bar{a}\beta\bar{\delta}\gamma - \bar{\gamma}\delta\bar{\beta}a \neq 0)$$

und $\qquad X' = \bar{X}$

die Transformationen von Lie (imaginäre Transformationen einschliesslich).

Um nur reelle Transformationen zu behandeln, müssen sie folgendermassen sein:

$$X' = aX \qquad (a = \text{reelle Zahl}, \ a = 0),$$

$$X' = X + \beta \qquad (i\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \text{reelle Zahlen}),$$

$$X' = aX\frac{1}{\delta} \qquad (a = \bar{\delta}),$$

$$X' = \frac{1}{\bar{X}},$$

$$X' = \bar{X}.$$

Später behandeln wir allgemein nicht nur die reellen sondern auch die imaginären Transformationen.

So entsteht der Satz, dass wir einander nicht berührende Kugeln in allgemeiner Lage durch die Transformationen von Lie in vier Punkte auf einer Ebene transformieren können.

Die lineare Transformation

$$X' = j_1 \frac{(X_3 - X_1)(X - X_2)}{(X_3 - X_2)(X - X_1)}$$

bringt die drei Kugeln $X = X_1$, X_2, X_3 in die Punkte auf der x Achse $X' = \infty$, (der uneigentliche Punkt), o, j_1. Die Transformation jedoch ist das Produkt folgender Transformationen

$$X' = X - X_1,$$

$$X' = \frac{1}{X},$$

$$X' = (X_1 - X_2)X,$$

$$X' = 1 + X,$$

$$X' = \frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2} X.$$

Andrerseits nach der vorigen Annahme, dass die drei Kugeln einander nicht berühren, sind die Koeffizienten obiger Transformationen $(X_1 - X_2)$, $(X_3 - X_1)$, $(X_3 - X_2)$ kein Nullfaktor, d. h. $(X_1 - X_2)(\overline{X_1 - X_2}) \neq 0$, $(X_3 - X_1)(\overline{X_3 - X_1}) = 0$, $(X_3 - X_2)(\overline{X_3 - X_2}) \neq 0$. Die obige Transformation ist wirklich die von Lie. Weiter bringt die Transformation

$$X' = j_1 a j_1 X \frac{1}{a}$$

die Punkte $X = \infty$, o, j_1 in sich selbst. Es ist leicht bewiesen, dass die vierte Kugel, bei geeigneter Wahl von a, einem Punkte auf der xy Ebene entspricht. *Also kann man vier einander nicht berührende Kugeln durch die Transformation von Lie in vier Punkte auf einer Ebene verwandeln.* Weil drei beliebige, einander nicht berührende Kugeln, wie wir oben gesehen haben, durch eine Transformation von Lie in die Punkte $x = \infty$, o, j, verwandelt werden, erhält man den Satz: *Ein System von einander nicht berührenden Kugeln wird immer durch eine Transformation von Lie in ein anderes beliebiges System von denselben Eigenschaften verwandelt.*

Nun wenden wir uns zur ein-parametrigen kontinuierenden Gruppe von Lie. In der Ebene hat die projektive Transformation, welche einen Kegelschnitt invariant lässt, im allgemeinen drei verschiedene invariante Punkte, von denen zwei auf dem Kegelschnitt liegen. Dieser Satz wird leicht im mehrdimensionalen Raum erweitert, und es folgt, dass die projektive Transformation, die eine Hyperfläche zweiter Ordnung invariant lässt, im allgemeinen zwei verschiedene invariante Punkte auf der Hyperfläche hat. Im speziellen Fall fallen die zwei invarianten Punkte zusammen. So erhält man, dass die Transformation von Lie im allgemeinen zwei verschiedene Kugeln invariant lässt, weil die Kugeln nach den hexasphärischen Koordinaten den Punkten auf einer Hyperfläche zweiter Ordnung im fünf-dimensionalen Raum entsprechen und die Transformationen von Lie mit den Projektiven Transformationen, welche die Hyperfläche invariant lassen, identisch sind.

Wählt man die zwei invarianten Kugeln als den Anfangs- und den uneigentlichen Punkt, weil, wie schon erwähnt, vier Kugeln in vier Punkte einer Ebene transformiert werden können, so gilt für die Transformation von Lie, welch diese zwei Punkte invariant lässt, die folgende Formel-Definition : $X'=\frac{aX}{\delta}$.

Um die ein-parametrige kontinuierende Gruppe von dur Form $X'=\frac{aX}{\delta}$ zu erhalten, betrachten wir a, δ als die Funktionen einer komplexen Veränderlichen t.

Danach wird laut § 1 (8)

$$\begin{aligned}\frac{dX'}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(aX\frac{1}{\delta}\right)\\&=\frac{da}{dt}X\frac{1}{\delta}-aX\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\\&=\frac{da}{dt}\frac{1}{a}X'\delta\frac{1}{\delta}-a\frac{1}{a}X'\delta\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\\&=\frac{da}{dt}\frac{1}{a}X'-X'\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$

Andrerseits folgt, nach dem Satz von der kontinuierenden Gruppe, bei geeigneter Wahl für Parameter t, dass die rechte Seite nur die Funktion von X' wird.

Deshalb

$$\frac{d^2X'}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{da}{dt}\frac{1}{a}\right)X'-X'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\right)=0.$$

Diese Formel ist eine Identität für X'; also ergibt sich, dass $\frac{d}{dt}\left(\frac{da}{dt}\frac{1}{a}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\right)$ eine komplexe Zahl$=\frac{dK}{dt}$, wo K eine komplexe Funktion von t ist.

Daraus folgt, dass

$$\frac{da}{dt}\frac{1}{a}=K+A,$$

wobei A eine konstante Quaternion ist.

Oder nach § 1 (8)

$$a=e^{\int K(t)dt+At}\cdot B,$$

wo B eine konstante Quaternion ist.

Also $\quad a=K'e^{At}\cdot B,\quad K'=e^{\int K dt}$

Ähnlich haben wir $\quad \delta=K'e^{Ct}\cdot D$

Also
$$X'=K'e^{At}BX\frac{1}{K'e^{Ct}\cdot D}$$
$$=e^{At}BX\frac{1}{D}\frac{1}{e^{Ct}}.$$

Ist t jedoch so bestimmt, dass $X'=X$ für $t=0$, so gilt $X=BX\frac{1}{D}$ für alle X.

Deshalb $B=D=$eine komplexe Zahl.

Also wird die Transformation

$$X'=e^{At}Xe^{Bt},$$

in der A, B zwei konstante Quaternionen darstellen.

Nun setzen wir

$$A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3,\qquad B=b_0+b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3,$$
$$A'=a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3,\qquad B'=b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3,$$

und erhalten:

$$X'=e^{At}Xe^{Bt}=e^{(a_0+b_0)t}e^{A't}Xe^{B't}.$$

Dann nehmen wir eine Koordinatentransformation vor, welch ebenfalls den Anfangs- und den uneigentlichen Punkt invariant lässt.

Und zwar:

$$X=CYD,\quad X'=CY'D$$

und man hat

$$Y'=e^{(a_0+b_0)t}C^{-1}e^{A't}CYDe^{B't}D^{-1}.$$

Andrerseits

$$A_1=a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3$$
$$=\frac{a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$
$$=j|A'|,$$

wo
$$j=\frac{a_2j_1+a_2j_2+a_3j_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Nach § 1 (7) und $j^2=-1$,

$$e^{A'}=e^{j|A'|}=\cos|A'|+j\sin|A'|$$

und $\qquad C^{-1}e^{A't}C=\cos\{|A'|t\}+\sin\{|A'|t\}C^{-1}jC.$

$C^{-1}jC$ ist eine Drehung um den Anfangspunkt im Raum, und $j\bar{j}=1$. Daher können wir, bei geeigneter Wahl von C, j mit j_1 gleichsetzen, woraus folgt, dass

$$C^{-1}e^{A't}C=e^{|A'|tj_1},$$

ähnlich $\qquad D^{-1}e^{B't}D=e^{|B'|tj_1}.$

Also $\qquad Y'=e^{(a_0+b_0)t}e^{|A|tj_1}Ye^{|B'|tj_1}.$

Oder kurz $\qquad X'=e^{ct}e^{atj_1}\times e^{btj_1},$

wo a, b, c = drei konstante komplexe Zahlen.

Wenn man X als eine konstante annimmt und t verändert, so erhält man eine W-Kugelschar, d. h. eine Schar, welche durch eine ein-parametrige lineare Transformation in sich übergeführt wird. Es wird leicht bewiesen, dass die Schar durch eine geeignete lineare Transformation in die Form $X'=e^{At}$ gebracht wird, wo $A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3$. *Nun setzt man $a_0t=S$ und erhält so ihre kanonische Form*

$$X'=e^{BS},\qquad \text{wo}\quad B=1+b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3.$$

§ 7. Doppelverhältnis.

Nun definieren wir das Doppelverhältnis von vier Kugeln folgendermassen

$$D\equiv(X_1,X_2;X_3,X_4)\equiv(X_1-X_3)\frac{1}{(X_1-X_4)}(X_2-X_4)\frac{1}{(X_2-X_3)}.$$

Wenn X_1 und X_4 oder X_2 und X_3 aneinander berühren, so

$$(X_1-X_4)\overline{(X_1-X_4)}=0\quad\text{und}\quad(X_2-X_3)\overline{(X_2-X_3)}=0,$$

und die Division ist unmöglich. Später wollen wir diesen Fall ständig ausschliessen.

Satz: *$D+\bar{D}$, $D\bar{D}$ sind die Invarianten unter den Transformationen von Lie, deshalb ist $(D-\bar{D})(\bar{D}-D)$ auch eine Invariante.*

Beweis:

Für die Transformationen

$$X'=X+A,$$
$$X'=XB\ (\text{nicht } BX)\quad(B\bar{B}\neq 0),$$
$$X'=\bar{X}$$

ist dieser Satz leicht zu beweisen.

Für die Transformation

$$X'=\frac{1}{X}$$

$$D'=(X_1^1,X_2^1;X_3^1,X_4^1)$$
$$=\left(\frac{1}{X_1}-\frac{1}{X_3}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{X_1}-\frac{1}{X_4}\right)}\left(\frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_4}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_3}\right)}$$

$$=\bar{X}_3(X_3-X_1)\bar{X}_1\frac{1}{\bar{X}_4(X_4-X_1)\bar{X}_1}\bar{X}_4(X_4-X_2)\bar{X}_2\frac{1}{\bar{X}_3(X_3-X_2)\bar{X}_2},$$

nach § 1 (5)

$$D'=\bar{X}_3(X_1-X_3)\frac{1}{(X_1-X_4)}(X_2-X_4)\frac{1}{(X_2-X_3)}\frac{1}{\bar{X}_3}=\bar{X}_3D\frac{1}{\bar{X}_3}.$$

Daraus erhält man, dass $D'\bar{D}'=D\bar{D}$ und nach § 1 (6) $D'+\bar{D}'=D+D$. Daraus folgt die Invarianz der Formel $(D-\bar{D})(\bar{D}-D)$ ohne weiteres. Weil die obige Transformation $X'=XB$ das Produkt der Transformationen $X'=\frac{1}{X}$, $X'=\frac{1}{B}X$, $X'=\frac{1}{X}$ ist, kann man die Invarianz obiger drei Formeln für die Transformation $X'=\frac{1}{B}X$ beweisen. Und die Transformationen von Lie sind die Produkte der Transformationen

$$X'=X,\quad X'=BX,\quad X'=X+A,\quad X'=\frac{1}{X}.$$

Damit ist der Satz völlig bewiesen worden.

In § 6 haben wir schon gesehen, dass man vier einander nicht berührende Kugeln in vier Punkte auf einer Ebene transformieren kann. Liegen die vier Punkte auf der xy Ebene, so erhält man die Punkte mit den Koordinaten

$$X^i=x_1^iy_1+x_2^iy_2,\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

und

$$D=\{(x_1^1y_1+x_2^1y_2)-(x_1^3y_1+x_2^3y_2)\}\frac{1}{\{(x_1^1y_1+x_2^1y_2)-(x_1^3y_1+x_2^3y_2)\}}\cdots\cdots.$$

Multipliziert man y_1 Zähler und Nenner, so

$$(1)\qquad D=\{(x_1^1+x_2^1y_3)-(x_1^3+x_2^3y_3)\}\frac{1}{\{(x_1^1+x_2^1y_3)-(x_1^3+x_2^3y_3)\}}\cdots.$$

Weil es in dieser Formel nur $1, y_3$ als die Einheiten von Quaternion gibt, und $1\cdot y_3=y_3\cdot 1=y_3$, $y_3^2=-1$, so ist das Doppelverhältnis von Quaternion ähnlich wie dem ordinären einer komplexen Zahl. Die Bedinguug $D'\bar{D}'=D\bar{D}$, $D'+\bar{D}'=D+\bar{D}$ für zwei Doppelverhältnisse D,D' bedeutet, dass sie gleich oder konjugiert sind. Nach dem Satz komplexer Zahlen dass vier Punkte in gewissem Doppelverhältnisse auf einer Ebene durch die Transformationen von Möbius in vier Punkte in gleichem oder konjugiertem Doppelverhältnisse transformiert werden und umgekehrt, folgt, *dass zwei Systeme von vier Kugeln mit gleichem Doppelverhältnisse von Quaternion durch die Transformationen von Lie in einander transformiert werden, wobei das Wort „gleiches Doppelverhältnis von Quaternion" bedeutet dass*

$$D'+\bar{D}'=D+\bar{D},\quad D'\bar{D}'=D\bar{D}.$$

Später benutzen wir den Ausdruck immer in diesem Sinn. *In ähnlicher Weise folgt, dass die Invariante $D-\bar{D}=0$ bedeutet, dass vier Kugeln durch geeignete Transformation von Lie in vier Punkte auf einem Kreise gebracht werden können.*

Die Hüllfläche einer Kugelschar die aus den Kugeln, welche drei gegebene einander nicht berührende Kugeln berühren, besteht, wird Zyklide von Dupin genannt. Dieser Fläche gehört noch eine zweite Kugelschar an, die aus den Kugeln, welche alle Kugeln der ersten Kugelschar berühren, besteht. Transformiert man die drei gegebenen Kugeln in drei Punkte, so wird die erste Kugelschar solche, die aus den durch die drei Punkte gehenden Kugeln besteht, und die Kugeln der zweiten Kugelschar werden die Punkte auf dem Kreise, der durch die drei Punkte geht. Also kann man eine Zyklide von Dupin durch die Transformationen von Lie in einen Kreis transformieren, und umgekehrt. Daraus ergibt sich, dass *das Doppelverhältnis von beliebigen vier Kugeln einer Zyklide von Dupin immer eine komplexe Zahl ist, und umgekehrt.*

§ 8. Einige andere Erklärungen des Doppelverhältnisses.

1). Die hexasphärischen Koordinaten (u) einer gerichteten Kugel sind

$$(1)\qquad u_0=\rho\frac{1-(x^2+y^2+z^2-r^2)}{2},\quad u_1=\rho\frac{1-(x^2+y^2+z^2-r^2)}{2},$$

$$u_2=\rho x,\quad u_3=\rho y,\quad u_4=\rho z,\quad u_5=\rho r\quad(\rho\neq 0)$$

und $$-u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2-u_5^2=0.$$

Also wird eine Kugel als ein Punkt auf der Hyperfläche zweiten Grades im fünf-dimensionalen Raum R_5 gezeigt.

Wenn wir beliebig gegebene vier Kugeln als vier Punkte in der Ebene $z=0$ annehmen, weil es möglich ist (vgl. § 6), so haben wir

$$(2)\qquad u_0=\rho\frac{1+(x^2+y^2)}{2},\quad u_1=\rho\frac{1-(x^2+y^2)}{2},$$

$$u_2=\rho x,\quad u_3=\rho y,\quad u_4=0,\quad u_5=0.$$

Der lineare Unterraum von drei Dimensionen, welcher durch die den vier Kugeln entsprechenden vier Punkte bestimmt wird, ist

$$u_4=u_5=0.$$

Die Fläche (2-dimensional) zweiten Grades, welche der Schnitt der Hyperfläche durch den linearen Unterraum ist, ist

$$-u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2=0,\quad u_4=u_5=0.$$

oder $$\frac{u_2+j_3u_3}{u_0\mp u_1}=\frac{u_0\pm u_1}{u_2-j_3u_3}=K\qquad(j_3^2=-1).$$

Aus diesen Formeln folgt, dass die Linien

$$u_2+j_3u_3=0=u_0\mp u_1, \quad u_0\pm u_1=u_2-j_2u_3=0$$

die Erzeugenden der Fläche zweiten Grades sind, und aus (2) erhält man $K=x+j_3y$ oder $K=\dfrac{1}{x-j_3y}$.

Das ordinäre Doppelverhältnis von den vier Erzeugenden, die den Kugeln entsprechen, ist das von K, und dieses Doppelverhältnis ist

$$D=\{(x_1-x_3)+(y_1-y_3)j_3\}\frac{1}{\{(x_1-x_4)+(y_1-y_4)j_3\}}\cdots\cdots.$$

Nach § 7 (1) ergibt sich, dass das Doppelverhältnis von den vier Erzeugenden mit dem der vier Kugeln identisch ist.

2) Nach der Geraden-Kugeltransformation von Lie können wir eine Kugel einer Geraden entsprechen lassen. Die Beziehungen sind

$$\begin{aligned}
p_{12}&=u_1+u_0=\rho\\
p_{13}&=u_2+j_3u_4=\rho(x+j_3z)\\
p_{14}&=u_3+u_5=\rho(y+r)\\
p_{34}&=u_1-u_0=\rho(x^2+y^2+z^2-r^2)\\
p_{42}&=u_2-j_3u_4=\rho(x-j_3z)\\
p_{23}&=u_3-u_5=\rho(y-r)
\end{aligned}$$

wo (p) die Linienkoordinaten, (u) die sphärischen Koordinaten sind. (vgl. Blaschke; Differentialgeometrie III, § 54) Ebenso wie in 1), nehmen wir $y=r=0$, so haben wir

$$p_{12}:p_{13}:p_{14}:p_{34}:p_{42}:p_{23}=1:x+j_3z:0:x^2+y^2:x-j_3z:0.$$

Diese Geraden schneiden die zwei Geraden

$$x_1=x_4=0, \quad x_2=x_3=0 \quad ((x) \text{ projektive Punktkoordinaten in der Linienraum})$$

und die Schnittpunkte sind

$$1:0:0:(x-j_3z) \quad \text{und} \quad 0:1:(x+j_3z):0$$

Durch den gleichen Rechenvorgang wie in 1), ergibt sich, dass das Doppelverhältnis von diesen vier Schnittpunkten mit dem Doppelverhältnis von vier Kugeln identisch ist.

§ 9. Doppelverhältnis von zwei Kugeln unter der Geometrie von Möbius.

Bei der Transformation von Möbius werden zwei entgegengerichtete orientierte Kugeln wieder in solche von denselben Eigenschaften gebracht, die Beziehung, $X=-\bar{Y}$, zwischen zwei Kugeln X, Y, ist also bei dieser Transformation invariant. Daraus folgt, dass, gegeben zwei Kugeln X, Y, das Doppelverhältnis $(X, Y; -\bar{X}, -\bar{Y})$ unter dieser Transformation Bedeutung hat.

Nimmt man

$$X = ir + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3,$$
$$Y = is + y_1 j_1 + y_2 j_2 + y_3 j_3$$

an, so ist $(X,\ Y;\ -\bar{X},\ -\bar{Y})$

$$= (X+\bar{X})\frac{1}{X+\bar{Y}}(Y+\bar{Y})\frac{1}{Y+\bar{X}}$$
$$= \frac{-4rs}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2-(r+s)^2}.$$

Sind die Winkel zwischen den nach aussen gerichteten Halbmessern, welche sich an den Schnittpunkten der zwei Kugeln begegnen, gleich θ, so folgt

$$(X,\ Y;\ -\bar{X},\ -\bar{Y}) = \frac{-4rs}{r^2+s^2-2rs\cos\theta-(r+s)^2} = \sec^2\frac{\theta}{2}.$$

Damit ergibt sich, dass *das Doppelverhältnis zweier Kugeln unter der Geometrie von Möbius die Winkel zwischen den Kugeln bedeutet.*

§ 10. Doppelverhältnis von zwei Kreisen unter der Geometrie von Möbius.

Wir definieren das Doppelverhältnis von zwei Kreisen als das ihrer vier Foci, d. h. der Nullkugeln, welche durch jeden der gegebenen Kreise gehen, weil die Foci eines Kreises eine kovariante Figur zum Kreise unter der Geometrie von Möbius sind.

Dieses Doppelverhältnis hat eine einfache Beziehung mit dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte, wo die Kugel, welche den beiden Kreisen senkrecht ist, die Kreise schneidet.

Transformiert man diese Kugel durch eine geeignete Transformation von Möbius in eine Ebene und die vier Schnittpunkte in zwei Punktpaare, welch die Ecke eines Parallelogramms mit Mittelpunkt als Anfangspunkt sind, so erhalten wir die folgenden Kreise

$$K: \quad x^2+y^2+z^2=r^2, \quad lx+my=0;$$
$$K': \quad x^2+y^2+z^2=r'^2, \quad l'x+my'=0.$$

Die Koordinaten der Foci sind

$$F_1: \quad x=ilr, \quad y=imr, \quad z=0;$$
$$F_2; \quad x=-ilr, \quad y=-imr, \quad z=0;$$
$$F_1': \quad x=il'r', \quad y=im'r', \quad z=0;$$
$$F_2': \quad x=-il'r', \quad y=-im'r', \quad z=0;$$

und die der Schnittpunkte

$$P_1: \quad x=-lr, \quad y=mr, \quad z=0;$$
$$P_2: \quad x=lr, \quad y=-mr, \quad z=0;$$
$$P_1' \quad x=-l'r', \quad y=m'r', \quad z=0;$$
$$P_2' \quad x=l'r', \quad y=-m'r', \quad z=0.$$

Dann erhalten wir

$$D_F = D(F_1', F_2; F_1', F_2') = \left\{ i(lr - l'r')j_1 + i(mr - m'r')j_2 \right\} \frac{1}{\{\ldots\ldots\}} \cdots\cdots,$$

$$D_P \equiv D(P_1, P_2; P_1', P_2') = \left\{ -(lr - l'r')j_1 + (mr - m'r')j_2 \right\} \frac{1}{\{\ldots\ldots\}} \cdots\cdots.$$

Also $$D_F = \frac{1}{\bar{D}_P},$$

oder $$D_F \bar{D}_F = \frac{1}{D_P \bar{D}_P},$$

$$D_F + \bar{D}_F = \frac{1}{\bar{D}_P} + \frac{1}{D_P} = \frac{D_P + \bar{D}_P}{D_P \bar{D}_P},$$

$$D_F - \bar{D}_F = \frac{D_P - \bar{D}_P}{D_P \bar{D}_P}.$$

Diese Beziehung ist nicht nur in obiger besonderer Lage der Kreise, sondern, weil $D + \bar{D}$ und $D\bar{D}$ Invarianten sind, allgemein gültig. Daraus folgt, dass das *Doppelverhältnis von den Foci der Inverse dem der Schnittpunkte gleich ist.* (in dem, in § 7 erwähnten Sinne)

Die Bedingung, dass die vier Foci auf einem Kreise liegen, also $D_F - \bar{D}_F = 0$ *oder* $D_P - \bar{D}_P = 0$, *d. h. die vier Schnittpunkte ebenfalls auf einem Kreise, ist die Bedingung dafür, dass die zwei Kreise auf einer Kugel liegen.* (vgl. Coolidge; „A Treatise on the circle and the sphere" p. 449)

§ 11. Linearer Komplex von Kugeln.

Die Formel

$$AX\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C = 0$$

(A, B, C sind Hyperquaternionen, mit $A = \bar{A}$, $C = \bar{C}$) bedeutet einen linearen Komplex von Kugeln. Denn aus § 8 (1)

$$X\bar{X} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$
$$= \frac{1}{\rho}(u_0 - u_1)$$
$$1 = \frac{1}{\rho}(u_0 + u_1)$$
$$BX + \bar{X}\bar{B} = 2(b_0 x_0 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)$$
$$= 2(ib_0 r - b_1 x - b_2 y - b_3 z)$$
$$= \frac{2}{\rho}(ib_0 u_5 - b_1 u_2 - b_2 u_3 - b_3 u_4).$$

So erhält man

$$AX\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C$$
$$= \frac{1}{\rho}\left\{ (a_0 + c_0)u_0 + (c_0 - a_0)u_1 - 2b_1 u_2 - 2b_2 u_3 - 2b_3 u_4 + 2ib_0 u_5 \right\}.$$

Demnach definiert diese Formel einen linearen Komplex von Kugeln, und umgekehrt. Diese Formel ist ähnlich der des Kreises in der Gauss'schen Ebene,

d. h. $\quad Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0.$

(A, B, C, z sind komplexe Zahlen, mit $A=\bar{A}$, $C=\bar{C}$)

Transformiert man die Formel mit $X'=\dfrac{aX+\beta}{\gamma X+\delta}$ und $X'=\bar{X}$ so erhält man

$$A'X'\bar{X}'+B'X'+\bar{X}'\bar{B}'+C'=0 \qquad (A'=\bar{A}',\ C'=\bar{C}').$$

Und zwar

i) für $X=\bar{X}'$,
$A'=A,\quad B'=B,\quad C'=C;$

ii) für $X=\dfrac{1}{X'}$,
$A'=C,\quad B'=\bar{B},\quad C'=A;$

iii) für $X=aX'\quad (a\bar{a}=0)$,
$A'=Aa\bar{a},\quad B'=Ba,\quad C'=C,$

iv) für $X=X'+\beta$
$A'=A$
$B'=A\bar{\beta}+B$
$C'=A\beta\bar{\beta}+B\beta+\bar{\beta}B+C.$

Daraus folgt, dass die Formel $I\equiv B\bar{B}-AC$ (eine komplexe Zahl) eine relative Invariante unter den Transformationen $X'=\dfrac{aX+\beta}{\gamma X+\delta}$ und $X'=\bar{X}$ ist.

Und für die Transformationen i), ii), iv)

$$I'=I$$

für iii)

$$I'=a\bar{a}I.$$

Wenn es zwei lineare Komplexe

$$AX\bar{X}\pm BX+\bar{X}\bar{B}+C=0 \qquad (A=\bar{A},\ C=\bar{C}),$$
$$A^*X\bar{X}+B^*X+\bar{X}\bar{B}^*+C^*=0 \quad (A^*=\bar{A}^*,\ C^*=\bar{C}^*)$$

gibt, so kann man leicht nachweisen, dass

$$I_{11}\equiv B\bar{B}-AC,\quad I_{22}\equiv\bar{B}^*B^*-A^*C^*,$$
$$I_{12}=\frac{1}{2}\left\{(B\bar{B}^*+B^*\bar{B})-(AC^*+A^*C)\right\}$$

relative Invariante sind.

Und für die Transformationen i), ii), iv)

$$I_{12}'=I_{12}$$

für iii)

$$I_{12}' = a\bar{a} I_{12}.$$

Also ist $K = \dfrac{I_{12}^2}{I_{11} I_{22}}$ eine absolute Invariante.

Wenn man

$$\begin{aligned} & AX\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C \\ & \quad = -l_0 u_0 + l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 + l_4 u_4 - l_5 u_5 \end{aligned}$$

setzt, so erhält man aus (1)

$$\begin{aligned} l_0 &= -\frac{1}{\rho}(a_0 + c_0), & l_1 &= -\frac{1}{\rho}(a_0 - c_0), \\ l_2 &= -\frac{2}{\rho} b_1, & l_3 &= -\frac{2}{\rho} b_2, \\ l_4 &= -\frac{2}{\rho} b_3, & l_5 &= -\frac{2}{\rho} i b_0 \end{aligned}$$

und ähnlich mit dem zweiten Komplexe.

Also

$$\begin{aligned} <ll^*> &= -l_0 l_0^* + l_1 l_1^* + l_2 l_2^* + l_3 l_3^* + l_4 l_4^* - l_5 l_5^* \\ &= \frac{1}{\rho\rho^*}\Big\{-(a_0 + c_0)(a_0^* + c_0^*) + (a_0 - c_0)(a_0^* - c_0^*) \\ &\qquad + 4b_1 b_1^* + 4b_2 b_2^* + 4b_3 b_3^* + 4b_0 b_0^*\Big\} \\ &= \frac{4}{\rho\rho^*}\Big\{(B\bar{B}^* + B^*\bar{B}) - (AC^* + A^*C)\Big\} = \frac{8}{\rho\rho^*} I_{12} \end{aligned}$$

$$<ll> = \frac{8}{\rho^2}\Big\{B\bar{B} - AC\Big\} = \frac{8}{\rho^2} I_{11}$$

$$<l^*l^*> = \frac{8}{\rho^{*2}} I_{22}$$

Daher

$$K = \frac{I_{12}^2}{I_{11} I_{22}} = \frac{<ll^*>^2}{<ll><l^*l^*>}.$$

Und K ist mit der Invariante K, welche Blaschke in seinem Werk, „Vorlesungen über Differenzialgeometrie" III, S. 198, definiert, identisch.

Wenn $I = B\bar{B} - AC = 0$

so, erhält man für $A = 1$

$$\begin{aligned} & X\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C \\ & \quad = X\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + B\bar{B} \\ & \quad = (\bar{X} + B)(X + \bar{B}). \end{aligned}$$

Also besteht der lineare Komplex aus den Kugeln, welche die Kugel $-\bar{B}$ berühren, d. h. er ist parabolisch.

Zum Schluss möchte ich Herrn Professor T. Nishiuchi meinen herzlichen Dank für seine wertvollen Ratschläge aussprechen.