

Strahlungstheoretische Untersuchungen über die Stellargashülle in Bewegung.

Von Michinori Kurihara

(Eingegangen am 1. Juni 1938)

Einleitung.

In Verbindung mit den Beobachtungen von Stellarspektrallinien ist heute von vielen Forschern die Ansicht geäußert worden, dass die der Sonnenchromosphäre entsprechenden Schichten bei den Sternen von hoher Temperatur, insbesondere ausgezeichnet, falls sie Emissionslinien zeigen, in aussergewöhnlich grossen Dimension entwickelt sind, und dass sich solche Atmosphären im allgemeinen im Bewegungszustande befinden.¹ Wenn man sich also mit solchen Himmelskörpern beschäftigen will, scheint es sehr wichtig zu sein, vor allem die Strahlungstheorie in einer bewegenden Sternatmosphäre so allgemein wie möglich zu entwickeln.

Das Problem lässt sich im allgemeinen in zwei Teile zerlegen; der eine besteht in den Wechselwirkungen der Materie mit dem Strahlungsfeld, nämlich den Vorgängen wie Ionisationen, Emissionen und Absorptionen, und der andere in den Verteilung von Dichte sowie Geschwindigkeit in der Gashülle. Diese beiden Probleme legen sich immer in Verbindung miteinander vor, so dass sie, streng genommen, auf einmal gelöst werden müssen. Aber wir wollen in dieser Abhandlung, wie es gewöhnlich in der Praxis getan wird, sie getrennt und zwar ausschliesslich das erstere betrachten, das wir vorläufig „*Strahlungsproblem*“ nennen möchten.

Die bisherigen Untersuchungen, H. von Zanstra² und B. P. Gerasimovič³ abgesehen, haben meistens das Strahlungsproblem der statischen Gashülle behandelt. Es handelt sich hier darum, die allgemeine Strahlungstheorie der bewegenden Gashülle zu entwickeln, deren Geschwindigkeitsverteilung als bekannt angenommen ist. Die folgenden drei Gedanken liegen unserer Untersuchung zugrunde.

(1) *Die Rekombinationshypothese.* Was den Ursprung der Emis-

1. S. Rosseland, *Theoretical Astrophysics* (1936), 284.

2. M. N. 95 (1934) 84; *ibid.* 97 (1936) 37.

3. M. N. 94 (1934) 737.

sionslinien betrifft, ist ein Mechanismus zuerst von Zanstra¹ vorgeschlagen worden, nämlich der sogenannte Rekombinationsmechanismus; er lautet folgendermassen:— das normale Wasserstoffatom werde nur durch die vom Zentralstern kommenden „Ultraviolettstrahlungen“ ionisiert, die man als ausserhalb der Lymangrenze liegenden verstehen muss. Das dabei befreite Elektron werde, irgendeinem Ion begegnend, in ein gewisses Energieniveau dieses Ions wieder eingefangen und steige dann stufenweise bis zum Grundzustand herab. Auf diese Weise verwandeln sich Ultraviolettstrahlungen in monochromatische Strahlungen mit den Eigenfrequenzen vom Wasserstoffatom. Wenn die Materie, wie bei den planetarischen Nebeln, so dünn ist, dass die Anzahl der Atome in den zweiten und höheren Zuständen sehr wenig sind, so ist die Gashülle gegen die Balmer- und Paschenlinien u. s. w. transparent, und infolgedessen ist die Gesamtquantenzahl der Ultraviolettabsorption gleich zu der der L_{α} -Emissionen und der kontinuierlichen Emissionen an der Lymangrenze und die Gesamtquantenzahl der L_{α} -Emissionen ist gleich der der Balmeremissionen, denn die Opazität der Gashülle ist ziemlich gross für die Lymanlinien.

Diese Verhältnisse hat Zanstra benutzt, um die Temperatur der anregenden Sterne (B_1 , B_0 und O) der Nebel abzuschätzen; seine Ergebnisse stehen mit den anderweitig—z. B. ionisationstheoretisch—bestimmten in guter Übereinstimmung. Seitdem ist es für plausibel gehalten worden, dass die Emissionslinien im Spektrum vom B_e Typus durch die Rekombinationsmechanismen in einer diffusen Gashülle verursacht werden.² Das ist die „*Rekombinationshypothese*.“

(2) *Die Relativintensitäten der Balmeremissionen.* Diese können aus den Beobachtungen verhältnismässig leicht bestimmt werden. Die Werte sind natürlich verschieden für verschiedene Gegenstände. Im früheren Stadium der theoretischen Betrachtung genügte man sich, ihre durchschnittlichen Werte theoretisch zu bestimmen; in der Tat gelang es G. Cillié,³ indem er von der Rekombinationshypothese ausging.

Bei den planetarischen Nebeln sind die Gashülle, wie in (1) erwähnt, für alle Spektrallinien transparent, abgesehen von den Lymanlinien, deren aussergewöhnlich grosse Opazität in der Rekombinationshypothese eine wichtige Rolle spielt. Dann müssen die spontanen Übergänge vom z -Zustand einerseits (der Übergang zum Grundzustand ist ausschliessen)

1. Ap. J. **65** (1927) 50; Z. f. Ap. **2** (1930) 1; Publ. Dom. Ast. Obs. **4** (1931) 209.

2. C. f. Rosseland, Ap. J. **63** (1926) 218.

3. M. N. **92** (1932) 820; **96** (1936) 771.

und die Einfänge der freien Elektronen plus die spontanen Übergänge in denselben Zustand andererseits in Gesamtzahl zueinander gleich sein. Solche Gleichungen werden gewöhnlich die „Zyklusgleichungen“ genannt.

Aus den Zyklusgleichungen hat Cillié die Relativintensitäten der Balmerlinien numerisch berechnet; sein Ergebnisse stimmen mit den Beobachtungen in Grössenordnung überein, nicht nur bei den planetarische Nebeln sondern auch bei den *Be*-Sternen, was die Rekombinationshypothese desto plausibeler macht.

(3) *Transport der Strahlungsenergie und Optische Umgebung.* Die obigen Untersuchungen von Zanstra und von Cillié beziehen sich hauptsächlich auf den Emissionsmechanismus. Dem Strahlungsproblem gehört aber auch eine andere wichtige Erscheinung, nämlich der Transport der Strahlungsenergie in der Gashülle an. Der Verdünnungsfaktor ist bei den *Be*-Sternen im allgemeinen nicht immer so gross, dass die Durchsichtigkeit der Gashülle für die Linien der Balmer- sowie der höheren Serien als vollständig gilt. Man muss daher in den Zyklusgleichungen nicht nur die spontanen Übergänge sondern auch die Absorptionsübergänge in Betracht ziehen, und dazu hat man das Problem des Energietransportes dieser Strahlungen zu lösen; solche verallgemeinerte Zyklusgleichungen darf man für die Formulierung der Rekombinationstheorie im weiteren Sinne halten.

Über den Transport der Strahlungsenergie bei den parallelen ebenen Gasschichten sind viele Untersuchungen gemacht worden, z. B. von E. A. Milne,¹ V. A. Ambarzumian,² S. Chandrasekhar,³ B. P. Gerasimovič⁴ u. a. Sie beziehen sich jedoch hauptsächlich nur auf die Ultraviolett- und die *L_α*-Strahlung; sie dürfen insbesondere auf die *Be*-Sterne nicht angewendet werden, weil sie den Einfluss des Doppler-Effektes auf die Strahlungsfelder ausser acht gelassen haben. In der Tat spielt der Doppler-Effekt wegen der verschiedenen relativen Bewegungszustände innerhalb der Gashülle eine grosse Rolle, indem er die Atome in einem Punkte gegen die von den entfernten Punkten herkommenden Eigenstrahlungen unwirksam macht. Um diese Verhältnisse zum Ausdruck zu bringen, denken wir an „optisch effektive Umgebung“ um einen Punkte in der Gashülle.

1. Z. f. Ap. 1 (1930) 98.

2. M. N. 93 (1932) 50.

3. Z. f. Ap. 9 (1935) 267.

4. *loc. cit.*

Dieser Begriff ist nichts neues, z. B. haben J. Woltjer,¹ W. H. McCrea und K. K. Mitra,² Zanstra³ u. s. w. gelegentlich ihrer Untersuchungen der Sonnenchromosphäre oder der Nebel davon Gebrauch gemacht; wir werden ihn später genauer definieren. Insgesamt bei unserem Strahlungsproblem reicht es aus, den Energietransport und den Emissionsmechanismus nur in solcher optischer Umgebung zu betrachten.

Neuerdings haben Prof. T. Araki und der Verfasser bei der Konturberechnung der Emissionslinien der expandierenden Gashülle eines Sternes⁴ solchen Transport der Strahlungsenergie in allgemeintheoretischer Weise manipuliert. Es ist nicht schwer diese Theorie für eine Gashülle in allgemeinerem Bewegungszustande zu erweitern und damit die verallgemeinerten Zyklusgleichungen abzuleiten. Es sollen im ersten Teil dieser Abhandlung die Verallgemeinerung der früheren Arbeit und einige Überlegungen betreffs optischer Umgebung gemacht worden. Es handelt sich im zweiten Teil um die Zyklusgleichungen, und schliesslich besteht der dritte Teil in einigen numerischen Betrachtungen über die Verteilung der Atome in Energieniveaus, und die Relativintensitäten der Balmeremissionen von B_e -Sternen u. s. w.

I. Transport der Strahlungsenergie.

§ 1. *Optische Umgebung.* Es handelt sich in diesem Teil hauptsächlich um die Verallgemeinerung der in der früheren Abhandlung A entwickelten Theorie;— wir können also nicht umhin, auch einige im vollkommenen Kontexte unentbehrliche Begriffe oder Formulierungen wieder ab initio zu erklären, freilich aber in etwas verbesserter Form.

Wir fassen ein Atomaggregat in irgendeinem Punkte (sei P) in der sich bewegenden Gaswolke ins Auge, und nehmen dabei die darauf wirkende Strahlung als monochromatisch und zwar von lauter einer bestimmten Frequenz an. Die Strahlung, die von irgendeinem anderen Punkte P' aus emittiert wird und zu P gelangt, kann nur dann Einfluss auf die Atome in P ausüben, wenn P' so nahe an P liegt, dass die nach der relativen Geschwindigkeit zwischen P, P' verschobene Wellenlänge in die effektive Breite der betreffenden Spektrallinie fällt. Daher kommt man auf den Gedanken von einer sozusagen „optisch

1. Bull. Ast. Inst. Netherlands, **7** (1934) 217.

2. Z. f. Ap. **11** (1936) 359.

3. *loc. cit.*

4. Z. f. Ap. **13** (1937) 89.

effektiven "Umgebung des Atomaggregats um den Punkt P, dessen Ausdehnung nicht nur von der Geschwindigkeitsverteilung in der Gashülle und der effektiven Breite der Linie, sondern auch von der Fortpflanzungsrichtung der Strahlung abhängt. Unter solcher Umgebung wollen wir „Optische Umgebung“ um den betrachteten Punkt verstehen.¹

Es soll in den folgenden Abschnitten die Vorstellung der optische Umgebung nach der Nomenklatur und Angriffsmethode in A formuliert werden; dabei lassen wir die Wechselwirkungen der benachbarten Linien als vernachlässigbar ausser acht; wir nehmen nämlich an, dass man eine Strahlung von der Frequenz, die für einen Übergang von einem Zustande (*j*) in einen anderen (*i*) eines Atoms entspricht, unabhängig von allen übrigen Linien behandeln kann. Man bezeichne diese Frequenz mit ν_{ij} , oder mit ν_0 , wenn es klar ist.

Unter *P-System* verstehen wir das sich mit dem Atomaggregate in P bewegende Koordinatensystem und man bezeichne mit ν die Frequenz einer Strahlung in bezug auf P-System. Es sei $n_i(\zeta) d\zeta$ die Zahl pro Volumeneinheit derjenigen im *i*-Zustande befindlichen Atome, von denen aus gesehen die ν -Strahlung als die der Frequenz ν_0 erscheint, wobei ζ eine durch

$$\nu - \nu_0 = \nu_0 \zeta \quad \text{oder} \quad \nu = \nu_0(1 + \zeta) \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

zu definierende dimensionslose Grösse ist.

Die Gesamtzahl pro Volumeneinheit der Atome im *i*-Zustande ist

$$n_i = \int n_i(\zeta) d\zeta. \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

Der Bruchteil $n_i(\zeta)/n_i$ hängt nicht von der Eigenfrequenz des Atoms sondern vielmehr von dem Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung der regellosen atomaren oder turbulenzartigen Bewegungen im Innern des P-systems ab, denn die Spektrallinie wird hauptsächlich durch solche Bewegungen flügel förmig verbreitet. Man kann demnach setzen

$$n_i(\zeta) = n_i A(\zeta), \quad \int A(\zeta) d\zeta = 1 \quad \dots\dots\dots(1.3)$$

unabhängig von ν_{ij} .

§ 2. Die in A definierten Absorptions- und Emissionskoeffizienten ($\alpha(\nu)$, $\beta(\nu)$) können durch die in der Physik üblichen atomaren Konstanten ausgedrückt werden.

n sei die Gesamtzahl der Wasserstoffatome in Volumeneinheit, unter

1. Diese Definition muss man, streng genommen, für die hereinkommende und die herausgehende Strahlung verschieden betrachten. Vgl. § 4.

denen n_0 Atome ionisiert seien. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die Wahrscheinlichkeit des spontanen Übergangs $j \rightarrow i$ mit $A_{ji}(j > i)$ und die des Übergangs $i \rightarrow j$ mit $B_{ij}I(\nu_{ij})$, wobei $I(\nu_{ij})$ die spezifische Intensität bedeutet, so hat man

$$A_{ji} = \frac{q_i}{q_j} \sigma_{ij} B_{ij} \quad \text{wo} \quad \sigma_{ij} \equiv \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \dots\dots\dots(2.1)$$

ist und q_i, q_j die Gewichte der entsprechenden Zustände sind.

Der atomare Absorptionskoeffizient $a_{ij}(\nu)$ wird bekannterweise gegeben durch

$$a_{ij}(\nu) = \frac{n_i(\xi) d\xi B_{ij} I(\nu_{ij}) h\nu_{ij}}{n_0 4\pi I(\nu_{ij}) \nu_{ij} d\xi},$$

daher folgt nach (1.3)

$$a_{ij}(\nu) = \bar{a}_{ij} A(\xi) \dots\dots\dots(2.2)$$

wo man setzt :

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= \frac{B_{ij} h}{4\pi} \cdot \frac{n_i}{n}, \\ \text{oder} \quad \bar{a}_{ij} &= \frac{A_{ji}}{c \bar{\omega}_{ji}} \cdot \frac{n_i}{n}, \quad \bar{\omega}_{ji} \equiv \frac{q_i}{q_j} \frac{4\pi}{c h} \sigma_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

Von dem letzteren Ausdruck von \bar{a}_{ij} werden wir später Gebrauch machen.

Wir betrachten zunächst den atomaren Emissionskoeffizienten $\beta_{ji}(\nu)$, der als die mittleren Emissionen pro Atom pro Einheitsfrequenz definiert wird. Bezeichnet man mit B_{ji} den Koeffizienten des erzwungenen Emissionsübergangs, so gibt es dann zwischen B_{ij} und B_{ji} eine bekannte Relation :

$$q_j B_{ji} = q_i B_{ij} \dots\dots\dots(2.4)$$

Bezeichnet man weiter mit $B(\nu_{ij})$ die Gesamtemission pro Einheitsvolumen, so kann man leicht finden

$$B(\nu_{ij}) = \int n \beta_{ji}(\nu) d\nu = \int A_{ji} n_i(\xi) h\nu_{ij} d\xi + \iint \frac{I(\nu) B_{ji}}{4\pi} \cdot n_j(\xi) h\nu_{ij} d\xi d\omega$$

daraus erhält man nach (1.3), (2.3), (2.4)

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ji}(\nu) &= \bar{\beta}_{ji} A(\xi) \\ \bar{\beta}_{ji} &= A_{ji} h \frac{n_j}{n} + \frac{n_j}{n_i} \frac{q_i}{q_j} \iint I(\nu) \bar{a}_{ij} A(\xi) d\xi d\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

$$B(\nu_{ij}) = \bar{\beta}_{ji} n \nu_{ij} \dots\dots\dots(2.6)$$

Die erzwungenen Emissionsübergänge, die gegenüber den spontanen Übergängen vernachlässigt zu werden pflegen, finden bei so hoher Temperatur wie bei den Atmosphären der B_e -Sterne ziemlich häufig statt, so dass wir der Allgemeinheit halber das ihnen entsprechende Glied in (2.5) hier noch beibehalten.

§ 3. μ -Strahlung und P-Strahlung. Indem wir in A die von uns direkt zu beobachtende Frequenz mit μ bezeichnet haben, um sie von der im P-System gemessenen ν deutlich zu unterscheiden, haben wir eine nach Beobachter fortpflanzende Strahlung von Frequenz μ kurz „ μ -Strahlung“ genannt und denjenigen Punkt in der Gashülle, in dessen P-System die Frequenz der μ -Strahlung eben ν_0 beträgt, als „Effektives Zentrum für eine μ -Strahlung“ oder einfach „ μ -Zentrum“ definiert.

Nun fassen wir, den Gesichtspunkt umtauschend, ein P-System in irgendeinem Punkt P ins Auge und wenn die Frequenz einer Strahlung von ihm aus gesehen gerade als ν_0 erscheint, so nennen wir sie „P-Strahlung für ein P-System“ oder einfacher „P-Strahlung.“ Es lässt sich eine P-Strahlung dann und nur dann immer für eine μ -Strahlung halten, wenn ihre Fortpflanzungsrichtung eben eine Visionslinie ist, der P-Punkt ist dabei natürlich das μ -Zentrum für die betreffende μ -Strahlung.

§ 4. Optische Länge. Es seien $\tau_{\nu(P)}^{\leftarrow}(PX)$ und $\tau_{\nu(P)}^{\rightarrow}(PX)$ die optische Länge zwischen zwei Punkten P, X für die $\nu(P)$ -Strahlung in Richtung \overrightarrow{XP} bzw. \overrightarrow{PX} . Wir haben dann definitionsgemäss:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\nu(P)}^{\leftarrow}(PX) &= \int_P^X a(\nu(\overleftarrow{X}))n(X)d\overleftarrow{PX} \\ \tau_{\nu(P)}^{\rightarrow}(PX) &= \int_P^X a(\nu(\overrightarrow{X}))n(X)d\overrightarrow{PX} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

Wenn insbesondere $\nu(\overleftarrow{P})$ oder $\nu(\overrightarrow{P})$ der Eigenfrequenz ν_0 gleich ist, nämlich, wenn man eine P-Strahlung ins Auge fasst, soll für sie einfach $\tau(\overleftarrow{PX})$ und $\tau(\overrightarrow{PX})$ geschrieben werden. Wenn man den Punkt X allmählich von P entfernt, so wird das Atom im X dementsprechend immer unwirksamer für die P-Strahlung. Indem man also $\lim_{XP \rightarrow \infty} \tau(\overleftarrow{PX}) = \tau^-(P)$, $\lim_{XP \rightarrow \infty} \tau(\overrightarrow{PX}) = \tau^+(P)$ setzt, so könnten $\tau^-(P)$ und $\tau^+(P)$ gewissermassen die Ausdehnung in Richtung \overrightarrow{XP} bzw. \overrightarrow{PX} der Umgebung in bezug auf die P-Strahlung charakterisieren. Sie können deshalb als die Grösse der Umgebung für die hereinkommenden bzw. herausgehenden P-Strahlungen gelten. Um eine symmetrische Umgebung eindeutig definieren zu können, wählen wir die optisch Gesamtlänge einer Linie entlang, d. h. $\tau(P) = \tau^-(P) + \tau^+(P)$, die, wie in § 6 gesehen wird, für die Strahlungen in entgegengesetzten Richtungen denselben Wert besitzt, als das Mass für die Umgebungsausdehnung in der Richtung der betrachteten Linie; wir möchten solche Umgebung „Optische Gesamt-

umgebung“ oder kurz „Umgebung“ nennen. Diese Umgebung spielt ja eine wichtige Rolle in unserer Theorie.

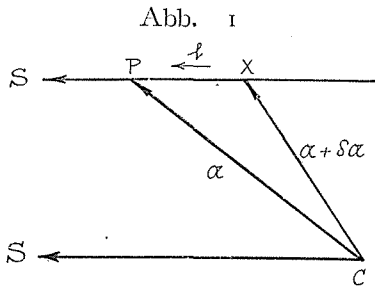
§ 5. ζ -Expansion der Ortfunktionen. Wir haben bei der Betrachtung der radial expandierenden Gashülle eines Sternes in A drei Voraussetzungen gemacht. Bei allgemeinem Bewegungszustande muss man jedoch die dort angenommene Kugelsymmetrie weglassen. Man nehme also hier de novo folgendermassen an :

a) Die Geschwindigkeit der regellosen (atomare oder turbulenzartigen) Bewegungen im Inneren des P-Systems ist klein im Vergleich mit der des P-Systems selbst, so dass man das Quadrat und höhere Potenzen des Verhältnisses dieser beiden Geschwindigkeiten mit hinreichender Näherung vernachlässigen darf.

b) Die Geschwindigkeit des P-Systems ist ganz klein in der Grössenordnung gegen die Lichtgeschwindigkeit.

c) Es gibt immer nur ein effektives Zentrum auf einer Visionslinie für eine μ -Strahlung.

Die ersten beiden zusammen bedeuten wesentlich, dass die relativen Bewegungen von P-Systemen, trotz der Trivialität ihrer unmittelbaren Einwirkungen auf die Frequenz, Richtung, Energie u. s. w. der Strahlung, doch den Absorptions- sowie den Emissionskoeffizienten mittelbar durch die Funktion $A(\zeta)$ ziemlich beträchtlich zu beeinflussen vermögen. Die Annahme c) ist dagegen nur darum gemacht, dass man die Formulierung des Problems vereinfachen kann.



Eine Ortfunktion lässt sich im allgemeinen in eine Potenzreihe des Abstandes s von einem bestimmten Punkte entwickeln, aber sie soll hier durch eine Potenzreihe von ζ statt s entwickelt werden.

In Abb. 1 wähle man als den Ursprung des Koordinatensystems etwa das Sternzentrum C, und α sei der Radiusvektor des betrachteten Punktes P. Es sei \overrightarrow{PS} eine Richtung (I) und $X(\alpha + \delta\alpha)$ sei irgendein Punkt auf \overrightarrow{PS} , dessen X-System sich mit einer Geschwindigkeit v bewege. Bezeichnet man nun mit ν die im X-System gemessene Frequenz der in \overrightarrow{PS} fortpflanzenden P-Strahlung, so lautet das Dopplersche Prinzip wegen (1.1)

$$\zeta = \frac{I \cdot v(P) - I \cdot v(X)}{c} \dots \dots \dots (5.1)$$

Bezeichnet man weiter mit ∇ den *Hamiltonschen* Operator bei der festgehaltenen Strahlrichtung, so wird eine Ortfunction F nach der *Taylor*schen Entwicklung gegeben durch

$$F(X) = F(P) + \delta\alpha \mathbf{l} \cdot \nabla F + \frac{\delta\alpha^2}{2!} \mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \nabla F) + \frac{\delta\alpha^3}{3!} \mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \nabla F)) + \dots \quad (5.2)$$

Die Grösse $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{b})$ in der rechten Seite von (5.1) wird als eine Ortfunction angesehen, weil man hier eine bestimmte Richtung d. h. \mathbf{l} ins Auge fasst. Wenn man also in (5.2) $F = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}$ einführt und

$$\overleftarrow{P}X = s\mathbf{l} \quad \text{oder} \quad \delta\alpha = -s \quad (5.3)$$

setzt, so ergibt (5.1)

$$\left. \begin{aligned} \zeta = s \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} \right)_P + \frac{s^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} \right)_P + \frac{s^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial s^3} \right)_P + \dots \\ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} \right)_P = \frac{\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \mathbf{b})}{c}, \quad \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} \right)_P = - \frac{\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \mathbf{b}))}{c}, \\ \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial s^3} \right)_P = \frac{\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \mathbf{b})))}{c} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Oder umgekehrt, wegen $s=0$ für $\zeta=0$,

$$s = \frac{c}{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})} \zeta + \frac{c^2}{2} \frac{\mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})}{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})^3} \zeta^2 + (\text{gerade Funktion von } \mathbf{l}) \times \left(\frac{c\zeta}{v} \right)^3 + \dots \quad (5.5)$$

daraus folgt durch Differentiation

$$ds = \frac{c}{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})} \left\{ 1 + \frac{c \mathbf{l} \cdot \nabla (\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})}{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})^2} \zeta + (\text{gerade Funktion von } \mathbf{l}) \times \left(\frac{c\zeta}{v} \right)^2 + \dots \right\} d\zeta, \quad (5.6)$$

wobei zu setzen ist:

$$\mathbf{f} = \nabla (\mathbf{l} \cdot \mathbf{b}). \quad (5.7)$$

(5.2) wird dann nach (5.3) und (5.5)

$$F(X) = F(P) - \frac{c \mathbf{l} \cdot \nabla F}{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})} \zeta + \frac{c^2}{2!} \frac{\mathbf{l} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{l} \cdot \nabla F}{\mathbf{l} \cdot \mathbf{f}} \right)}{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{f})} \zeta^2 + \dots \quad (5.8)$$

In der rechten Seite von (5.6) und (5.8) sind die Verhältnisse der Glieder von ζ^2 zu den konstanten gleich $(c\zeta/v)^2$ in der Grössenordnung. Da aber solche Funktion immer mit dem Faktor $\Delta(\zeta)$ auftritt, der nur

innerhalb eines ganz kleinen—entsprechend der regellosen Bewegungen der Atome—Bereiches von Null verschieden ist, kann man von zweiten und höheren Grössenordnungen wegen der Annahme a) absehen. Es ist aber auch zu bemerken, dass das ζ^2 -Glieder immer gerade Male durch I multipliziert ist. Auf diese Weise erhält man schliesslich

$$ds = \frac{c}{(I \cdot f)} \left\{ I + \frac{cI \cdot \mathcal{P}(I \cdot f)}{(I \cdot f)^2} \zeta \right\} d\zeta, \dots\dots\dots(5.9)$$

$$F(X) = F(P) - \frac{cI \cdot \mathcal{P} F}{(I \cdot f)} \zeta. \dots\dots\dots(5.10)$$

§ 6. Wir können nun nach der ζ -Expansion die optische Länge zwischen P und X für eine P-Strahlung in der Richtung I durch die auf den Punkt P bezogene Quantitäten ausdrücken, wendet man nämlich (5.10) auf $F = n\bar{a}$ an, so erhält man nach (2.2), (3.1), (5.9)

$$\tau(\overleftarrow{PX}) = \tau(P)\Phi^0(\zeta) - \sigma(P)\Phi^1(\zeta), \dots\dots\dots(6.1)$$

wobei gesetzt sind

$$\tau(P) \equiv \left(\frac{c\bar{a}n}{I \cdot f} \right)_P, \quad \sigma(P) \equiv \left(\frac{c^2}{I \cdot f} I \cdot \mathcal{P} \left(\frac{\bar{a}n}{I \cdot f} \right) \right)_P, \dots\dots\dots(6.2)$$

$$\Phi^0(\zeta) \equiv \int_0^\zeta \mathcal{A}(\zeta) d\zeta, \quad \Phi^1(\zeta) \equiv \int_0^\zeta \zeta \mathcal{A}(\zeta) d\zeta; \dots\dots\dots(6.3)$$

insbesondere für $\zeta = \pm\infty$, wegen (1.3),

$$\left. \begin{aligned} \Phi^0(+\infty) &= -\Phi^0(-\infty) = \frac{1}{2} \\ \Phi^1(+\infty) &= \Phi^1(-\infty) \quad \left(\text{sei} = \frac{\mathcal{A}}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.4)$$

Dabei bedeutet $c\mathcal{A}$ die mittlere halbe Breite der betrachteten Linie, ausgedrückt in der Geschwindigkeit.¹

Wir wollen uns im folgenden nur auf den Fall beschränken, wo $(I \cdot f) > 0$ ist.² Indem man also in (6.1) einmal ζ nach $+\infty$, das andere Mal nach $-\infty$ streben lässt und das Vorzeichen ändert, so erhält man wegen (6.4) für $\tau^-(P)$ bzw. $\tau^+(P)$

1. Wenn man annimmt, dass die Spektrallinie hauptsächlich durch die regellosen Bewegungen der Atomen verbreitert wird, deren Geschwindigkeitsverteilung in einer beliebigen Richtung ein Gesetz $dn = n f(u) du$ befolgt, so ist $\Delta(\zeta) = c f(u)$, wegen (1.3). Dann ergibt sich nach (6.3), (6.4) $\Delta = 2c \int_0^\infty \zeta f(u) d\zeta$, was definitionsgemäss nichts anders als die mittlere halbe Breite ist.

2. Falls $(I \cdot f) < 0$, ist $|\tau(P)|$ anstatt $\tau(P)$ in (6.5) und (6.6) einzusetzen.

$$\left. \begin{aligned} \tau^-(P) &= \frac{1}{2}\tau(P) - \frac{d}{2}\sigma(P) \\ \tau^+(P) &= \frac{1}{2}\tau(P) + \frac{d}{2}\sigma(P) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.5)$$

woraus nach (6.2)

$$\tau(P) = \tau^-(P) + \tau^+(P) = \frac{c\bar{u}n}{(l \cdot \mathfrak{f})} \dots\dots\dots(6.6)$$

folgt, was zeigt, dass die Grösse $\tau(P)$ die längs einer P-Strahlung gemessene optische Gesamtlänge ist, die zur Absorption dieser Strahlung effektiv beizutragen vermag, und zwar, dass sie für die entgegengesetzten Richtungen denselben Wert hat.

§ 7. *Quadratische Gleichung für die Grenzfläche der optischen Umgebung.* Wir wollen nun etwas eingehend die Gestalt der in § 3 definierten optischen Umgebung betrachten, deren Ausdehnung durch (6.6) gegeben ist.

Man konstruiere zu diesem Zweck eine durch denjenigen Radiusvektor, jeweils parallel zu dem der betrachteten Umgebung, zu erzeugende Fläche, dessen Betrag r jedoch zu der Quadratwurzel der optischen Gesamtlänge in der betreffenden Richtung, l , proportional ist, nämlich, wegen (6.6):

$$r l = l(l \cdot \mathfrak{f})^{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(7.1)$$

Bezeichnet man mit (l, m, n) die Direktionskosinus von Richtung l , so lautet Gleichung (5.7)

$$\mathfrak{f} = l\mathfrak{f}_x + m\mathfrak{f}_y + n\mathfrak{f}_z, \dots\dots\dots(7.2)$$

wobei

$$\mathfrak{f}_x = \text{grad}v_x, \quad \mathfrak{f}_y = \text{grad}v_y, \quad \mathfrak{f}_z = \text{grad}v_z. \dots\dots\dots(7.3)$$

Setzt man der Einfachheit halber

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \text{u.s.w.}, & 2S_{xy} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \text{u.s.w.}, \\ 2W_{xy} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \text{u.s.w.} \end{aligned} \dots\dots\dots(7.4)$$

und weiter

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= i_0 S_{xx} + j_0 S_{yx} + \mathfrak{k}_0 S_{zx} \\ \mathfrak{S}_y &= i_0 S_{xy} + j_0 S_{yy} + \mathfrak{k}_0 S_{zy} \\ \mathfrak{S}_z &= i_0 S_{xz} + j_0 S_{yz} + \mathfrak{k}_0 S_{zz} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \mathfrak{W}_x &= j_0 W_{yx} + \mathfrak{k}_0 W_{zx} \\ \mathfrak{W}_y &= i_0 W_{xy} + \mathfrak{k}_0 W_{zy} \\ \mathfrak{W}_z &= i_0 W_{xz} + j_0 W_{yz} \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots(7.5)$$

$$\mathfrak{S} = l\mathfrak{S}_x + m\mathfrak{S}_y + n\mathfrak{S}_z, \quad \mathfrak{W} = l\mathfrak{W}_x + m\mathfrak{W}_y + n\mathfrak{W}_z, \dots\dots\dots(7.6)$$

wo i_0, j_0, f_0 die Einheitsvektoren sind, so wird (7.2) wegen (7.3)

$$f = \mathfrak{S} + \mathfrak{W}, \dots\dots\dots(7.7)$$

wobei \mathfrak{S} ein symmetrischer und \mathfrak{W} ein schiefsymmetrischer Tensor ist.

Wenn man (7.7) mit I multipliziert, so ergibt sich nach eine Relation $I \cdot \mathfrak{W} = 0$

$$I \cdot f = I \cdot \mathfrak{S} = (i_0 \cdot I)(I \cdot \mathfrak{S}_x) + (j_0 \cdot I)(I \cdot \mathfrak{S}_y) + (f_0 \cdot I)(I \cdot \mathfrak{S}_z). \dots\dots(7.8)$$

Indem man die beiden Seite von (7.1) auf das Quadrat erhöht, erhält man schliesslich nach (7.5), (7.8)

$$\sum x^2 S_{xx} + 2 \sum xy S_{xy} = 1, \dots\dots\dots(7.9)^1$$

was nichts anders als die gesuchte Quadratische Gleichung für die Grenzfläche der optischen Umgebung ist.²

Die Hauptachsentransformation von (7.9) gibt nun einfach:

$$S_{xx}x^2 + S_{yy}y^2 + S_{zz}z^2 = 1, \dots\dots\dots(7.9a)$$

dann ist man imstande, den mittleren Wert von $(I \cdot f)$ für die P-Strahlungen in allen Richtungen zu berechnen. Man erhält in der Tat aus (7.1) und (7.9a)

$$(I \cdot f) = l^2 S_{xx} + m^2 S_{yy} + n^2 S_{zz}, \dots\dots\dots(7.10)$$

unabhängig von der Beschränkung $(I \cdot f) > 0$. Indem man es über den Raumwinkel ω integriert, so erhält man unter Benutzung von Polarkoordinaten

$$\int (I \cdot f) d\omega = \frac{4\pi}{3} (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz});$$

1. Bei der Ableitung dieser Gleichung haben wir $(I \cdot f) > 0$ angenommen; falls ein Teil der Fläche imaginär wird, muss man anstatt dessen den reellen Ausdruck einsetzen, der durch die Vertauschung des Vorzeichens der rechten Seite von (7.9) erhalten wird.

2. Bei der reinen gleichmässigen Rotation verschwindet der symmetrische Tensor \mathfrak{S} , so dass die optische Umgebung unendlich gross wird. Dies wird auch davon leicht gesehen, dass einem Beobachter in dem rotierenden System die Gashülle als Ganzes ruhig erscheinen müsse. Aber bei der radial expandierenden Gashülle lautet (7.9)

$$\frac{dv}{dr} x^2 + \frac{v}{r} y^2 + \frac{v}{r} z^2 = 1,$$

wobei die x - Achse radial gerichtet ist. Wenn man sowohl die Expansion als auch die Rotation, deren Winkelgeschwindigkeit nur von r abhängt, betrachtet, so erhält man

$$\frac{dv}{dr} x^2 + \frac{v}{r} y^2 + \frac{v}{r} z^2 + r \frac{d\omega}{dr} \sin\theta \cdot xz = 1,$$

wobei die x - und die y -Achse Richtungen von r bzw. θ entsprechen.

Die obigen Beispiele zeigen, dass die Grenzfläche der Umgebung im allgemeinen keine Sphäre ist. Die Intensität der herausgehenden P-Strahlung hängt also von ihrer Richtung ab und zwar um so beträchtlicher, je grösser die optische Gesamtlänge der Umgebung ist. Es folgt auch hieraus z. B., dass die relativen Intensitäten der Balmeremissionen ihre Änderungen nach Richtung mehr der Form der Umgebung verdankt als der der Gashülle. Dies wird vielleicht die Spektraländerung bei einigen Sternen, insbesondere bei β -Lyrae, erläutern können.

die rechte Seite ist hier wegen (7.4) zu $\frac{4\pi}{3}\text{div}b$ gleich, also in dem allgemeineren Koordinatensystem

$$\frac{1}{4\pi} \int (l \cdot f) d\omega = \frac{1}{3} \text{div}b. \quad \dots\dots\dots(7.11)$$

§ 8. *Intensität der μ -Emission.* Die Kontur der Spektrallinien wird durch die Integration der μ -Strahlung über die Locusfläche der μ -Zentrum ermittelt. Solche Berechnung und ihre Resultate sind in A erschöpfend erörtert worden. Hier wollen wir uns also nur die Intensität der μ -Strahlung bei der allgemeinen Bewegungen berechnen.

Es sei M ein μ -Zentrum und P_0 sei ein beliebiger Punkt, der sich auf der M passierenden Visionslinie befindet. Die Intensität der μ -Strahlung $I_\mu(P_0)$ wird dann durch

$$I_\mu(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{P_0}^{\infty} n(P) \bar{\beta}(P) \Delta(\zeta) e^{-\tau_\mu(P_0 P)} d\bar{P}_0 P \quad \dots\dots(8.1)$$

gegeben. Da aber aus (5.10) und (6.1)

$$n(P) \bar{\beta}(P) = n(M) \bar{\beta}(M) - \left\{ \frac{c \Gamma n \bar{\beta}}{l \cdot f} \right\}_M \cdot \zeta$$

$$\tau_\mu(P_0 P) = \tau(M) \left\{ \Phi^0(\zeta) - \Phi^0(\zeta_0) \right\} - \sigma(M) \left\{ \Phi^1(\zeta) - \Phi^1(\zeta_0) \right\}$$

folgen, geben diese Gleichungen und (5.9), in (8.1) eingesetzt, wegen der Annahme a) und zwar dank dem Exponentialfaktor

$$I_\mu(P_0) = \frac{n \bar{\beta}}{4\pi} \frac{c}{(l \cdot f)} \int_{\zeta_0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{c \Gamma n \bar{\beta}}{n \bar{\beta} (l \cdot f)} \cdot \zeta + \sigma (\Phi^1(\zeta) - \Phi^1(\zeta_0)) \right.$$

$$\left. + \frac{c \Gamma (l \cdot f)}{(l \cdot f)^2} \zeta \right\} e^{-\tau(\Phi^0(\zeta) - \Phi^0(\zeta_0))} \times \Delta(\zeta) d\zeta \quad \dots(8.2)$$

bis auf kleine Quantitäten von zweiten Ordnung.

Andererseits gelten auch die folgenden Gleichungen nach (6.3) und (6.4)

$$\tau \int_{\zeta}^{\infty} \Delta(\zeta) e^{-\tau \Phi^0} d\zeta = e^{-\tau \Phi^0(\zeta)} - e^{-\tau/2}, \quad \dots\dots\dots(8.3)$$

$$\tau \int_{\zeta}^{\infty} \Delta(\zeta) \Phi^1(\zeta) e^{-\tau \Phi^0} d\zeta = -\frac{\Delta}{2} e^{-\tau/2} + \Phi^1(\zeta) e^{-\tau \Phi^0(\zeta)}$$

$$+ \frac{1}{\tau} \chi(\tau, \zeta), \quad \dots\dots\dots(8.3a)$$

wo gesetzt ist

$$\chi(\tau, \zeta) = \tau \int_{\zeta}^{\infty} \zeta \Delta(\zeta) e^{-\tau \Phi^0} d\zeta. \quad \dots\dots\dots(8.4)$$

Indem man (8.3), (8.3a) benutzt und in (8.2) $\zeta_0 = -\infty$ setzt, erhält

man, nach einigen algebraischen Rechnungen, für die dem Beobachter zugängliche Energiemenge pro Einheitsfrequenzintervall derjenigen μ -Strahlung $J_\mu(M)$, die aus dem längs einer Visionlinie liegenden Zylinder von Einheitsquerschnitt her stammt,

$$J_\mu/C = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \left\{ 1 - e^{-\tau} \right\} + \frac{2c\tau \mathfrak{E}(\tau, \infty) e^{-\tau/2}}{(I \cdot f)} \left[I \cdot \mathcal{P} \left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right) \right] \dots\dots\dots(8.5)$$

wobei C eine Konstante und $\mathfrak{E}(\tau, \infty)$ eine durch (4.8) in A definierte Funktion bedeutet, die mit $\chi(\tau, \zeta)$ in Zusammenhang gebracht wird durch

$$\mathfrak{E}(\tau, \infty) = - \frac{\chi(\tau, -\infty)}{2\tau} \dots\dots\dots(8.6)$$

Die Gleichung (8.5) lässt sich auch, wie es von dem Vergleichen (5.10) mit (2.4) in A leicht gesehen wird, dadurch ermitteln, dass man

$$\left\{ \frac{I}{I \cdot f} \left[I \cdot \mathcal{P} \left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right) \right] \right\}_M \text{ anstatt } \frac{\cos \theta}{\Omega} \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right) \right\}_P \text{ in (4.7) in A einsetzt.}$$

§ 9. *Emissionsüberschuss und Strahlungsdruck.* Wir haben in A den Ausdruck für den Emissionsüberschuss in einem Punkt P bei der expandierenden Gashülle abgeleitet. Wir wollen uns hier mit dem allgemeinen Fall beschäftigen und dabei auch den Strahlungsdruck, der insbesondere im dynamischen Problem eine wichtige Rolle spielt, berücksichtigen.

Es handelt sich zunächst um die Intensität der zu dem Punkt P gelangenden Strahlung $I(P)$ mittels der auf P bezogenen Quantitäten auszudrücken. Man betrachte im P-System eine in Richtung I fort-pflanzende ν -Strahlung und setze $\nu = \nu_0(1 + \eta)$. Es sei, wie in § 5, \vec{PS} die Richtung I und X sei irgendein anderer Punkt auf \vec{PS} . Bezeichnet man mit $\nu(X) = \nu_0(1 + \xi)$ die Frequenz der ν -Strahlung vom X-System aus gesehen, so erhält man nach den Doppler-Transformationen die Gleichung (vgl. Abb. 1):

$$\nu(X) = \nu(P) \left\{ 1 + \frac{v(P) - v(X)}{c} \cdot I \right\} = \nu(1 + \zeta), \text{ wegen (5.1),}$$

oder $\nu_0(1 + \xi) = \nu_0(1 + \eta)(1 + \zeta);$

daraus folgt wegen der Annahme a)

$$\xi = \eta + \zeta. \dots\dots\dots(9.1)$$

1. Berichtigung in A:—Man lese das Vorzeichen — des zweiten Gliedes in der rechten Seite der Gleichung (4.7) als +.

Die optische Länge $\tau_\nu(PX)$ wird nach ihrer Definition (4.1)

$$\tau_\nu(PX) = \int_P^X a(\nu(X)) n(X) dPX = \int_0^s n(X) \bar{a}(X) \Delta(\xi) ds,$$

hieraus ergibt sich, wenn man (5.9) und (5.10) benutzt,

$$\begin{aligned} \tau_\nu(PX) = c \cdot \frac{n(P)\bar{a}(P)}{(l \cdot f)} \int_0^s \left\{ 1 - \frac{c l \cdot \nu(n\bar{a})}{n\bar{a}(l \cdot f)} \zeta \right. \\ \left. + \frac{c l \cdot \nu(l \cdot f)}{(l \cdot f)^2} \zeta \right\} \Delta(\xi) d\zeta \end{aligned}$$

oder, indem man ξ anstatt ζ einsetzt und (6.2) und (6.3) berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \tau_\nu(PX) = \tau(P) \left\{ \Phi^0(\xi) - \Phi^0(\eta) \right\} - \sigma(P) \left\{ (\Phi^1(\xi) - \Phi^1(\eta)) \right. \\ \left. - \eta (\Phi^0(\xi) - \Phi^0(\eta)) \right\}. \dots\dots\dots(9.2) \end{aligned}$$

Die gesuchte Intensität $I_\nu(P)$ wird nun durch

$$I_\nu(P) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty n(X) \bar{\beta}(X) \Delta(\xi) e^{-\tau_\nu(PX)} ds$$

gegeben. Setzt man hierin τ_ν von (9.2) ein, so erhält man nach den ähnlichen Manipulationen und Rechnungen wie in § 8

$$\begin{aligned} I_\nu(P) = \frac{\bar{\beta}}{4\pi\bar{a}} \int_\eta^\infty \left[1 - (\xi - \eta)\sigma' + \sigma \left\{ \Phi^1(\xi) - \Phi^1(\eta) \right\} \right. \\ \left. - \sigma\eta \left\{ \Phi^0(\xi) - \Phi^0(\eta) \right\} \right] \times \tau \Delta(\xi) e^{-\tau(\Phi^0(\xi) - \Phi^0(\eta))} d\xi, \end{aligned} \dots\dots\dots(9.3)$$

wo
$$\sigma' \equiv c l \cdot \nu \left(\frac{n\bar{\beta}}{l \cdot f} \right) / n\bar{\beta}. \dots\dots\dots(9.4)$$

Die Integration über ξ gibt dann

$$I_\nu(P) = \frac{\bar{\beta}}{4\pi\bar{a}} \cdot \left\{ 1 - e^{-\tau(\frac{1}{2} - \Phi^0(\eta))} - (\sigma' H_1 - \sigma H_2 + \sigma H_3) e^{\tau\Phi^0(\eta)} \right\}, \dots\dots\dots(9.5)$$

wobei, (8.3), (8.3a), (8.4) berücksichtigt,

$$H_1 \equiv \tau \int_\eta^\infty (\xi - \eta) e^{-\tau\Phi^0(\xi)} \Delta(\xi) d\xi = \chi(\tau, \eta) + \eta (e^{-\tau/2} - e^{-\tau\Phi^0(\eta)}) \dots\dots\dots(9.6)$$

$$\begin{aligned} H_2 \equiv \tau \int_\eta^\infty \left\{ \Phi^1(\xi) - \Phi^1(\eta) \right\} e^{-\tau\Phi^0(\xi)} \Delta(\xi) d\xi \\ = \left(\Phi^1(\eta) - \frac{\Delta}{2} \right) e^{-\tau/2} + \frac{\chi(\tau, \eta)}{\tau} \dots\dots\dots(9.6a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 \equiv \tau \int_\eta^\infty \left\{ \Phi^0(\xi) - \Phi^0(\eta) \right\} e^{-\tau\Phi^0(\xi)} \Delta(\xi) d\xi \\ = \eta e^{-\tau/2} \left(\Phi^0(\eta) - \frac{1}{2} \right) + \frac{\eta}{\tau} \left(e^{-\tau\Phi^0(\eta)} - e^{-\tau/2} \right) \dots\dots\dots(9.6b) \end{aligned}$$

gesetzt worden sind.

§ 10. Um die vom Atomaggregat (Einheitsvolumen) in P absorbierte Gesamtenergiemenge abzuschätzen, betrachten wir zunächst nur die Beiträge $K(P, l)$ aller Strahlungen in l-Richtung. Dazu muss man jede zu P gelangende Strahlung $I_\nu(P) d\nu$ mit dem ihrer Frequenz entsprechenden Absorptionskoeffizienten $n\alpha(\nu)$ multiplizieren und über alle Frequenzen integrieren; man erhält nämlich wegen (2.2)

$$K(P, l) = \int I_\nu(P) n\alpha(\nu) d\nu = \bar{\alpha} n \nu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} I_\nu(P) \Delta(\eta) d\eta.$$

Wenn man hierin (9.5) einführt und (1.3), (8.3) berücksichtigt, so ergibt sich

$$K(P, l) = \frac{\bar{\beta} n \nu_0}{4\pi} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} - \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma' H_1 - \sigma H_2 + \sigma H_3) e^{\tau \Phi^0(\eta)} \Delta(\eta) d\eta \right\}. \tag{10.1}$$

Es können nun aus (6.3), (8.3), (8.4) wegen der geraden Funktion $\Delta(\eta)$ leicht bewiesen werden:

$$\begin{aligned} \tau \int_{-\infty}^{\infty} \chi e^{\tau \Phi^0(\eta)} \Delta(\eta) d\eta &= -e^{-\tau/2} \chi(\tau, -\infty), & \dots\dots\dots(10.2) \\ \tau \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{\tau \Phi^0(\eta)} \Delta(\eta) d\eta &= -\chi(\tau, -\infty), & \dots\dots\dots(10.2a) \end{aligned}$$

daher erhält man aus (8.3), (8.3a), (9.6), (9.6a), (9.6b) nach einigen algebraischen Rechnungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_1 e^{\tau \Phi^0(\eta)} \Delta(\eta) d\eta &= -\frac{2e^{-\tau/2} \chi(\tau, -\infty)}{\tau}, & \dots\dots\dots(10.3) \\ \int_{-\infty}^{\infty} H_2 e^{\tau \Phi^0(\eta)} \Delta(\eta) d\eta &= 0, & \dots\dots\dots(10.3a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} H_3 e^{\tau \Phi^0(\eta)} \Delta(\eta) d\eta &= e^{-\tau/2} \chi(\tau, -\infty) \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{\tau^2} \right) \\ &\quad + e^{-\tau/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^0(\eta) e^{\tau \Phi^0(\eta)} \eta \Delta(\eta) d\eta. & \dots\dots\dots(10.3b) \end{aligned}$$

Wenn man in dem zweiten Glied von (10.3b) $\eta \rightarrow -\eta$ setzt und (6.4), (8.4) berücksichtigt, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^0(\eta) e^{\tau \Phi^0(\eta)} \eta \Delta(\eta) d\eta = -\frac{\chi(\tau, -\infty)}{2\tau} + \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau, \eta) \Delta(\eta) d\eta. \tag{10.4}$$

Setzt man ferner

$$\frac{e^{-\tau/2}}{\tau^2} \cdot \chi(\tau, -\infty) - \frac{e^{-\tau/2}}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau, \eta) \Delta(\eta) d\eta \equiv R(\tau),$$

.....(10.5)

erhält man dann aus (10.3b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_3 e^{\tau \Phi^0(\eta)} \Delta(\eta) d\eta = \frac{2e^{-\tau/2}}{\tau^2} \chi(\tau, -\infty) - R(\tau).$$

.....(10.3b)'

Es ist schliesslich aus (6.2), (9.4) leicht bewiesen :

$$\sigma' - \frac{\sigma}{\tau} = \frac{c}{(I \cdot \mathfrak{f})} [\cdot \mathfrak{V} \left(\log \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right)].$$

Daher erhält man für $K(P, I)$ von (10.1) nach (10.3), (10.3a), (10.3b)'

$$K(P, I) = \frac{\bar{\beta} n \nu_0}{4\pi} \left\{ I - \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} + \frac{2e^{-\tau/2} \chi(\tau, -\infty)}{\bar{\alpha} n} [\cdot \mathfrak{V} \left(\log \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right)] + \sigma R(\tau) \right\}.$$

.....(10.6)'

Wir sind jetzt imstande, den Emissionsüberschuss und Strahlungsdruck zu berechnen. Die Gesamtstrahlungsenergie A , die das Atomaggregat im Einheitsvolumen in P absorbiert, wird durch Integration von $K(P, I) d\omega$ über alle Richtungen. Dabei verschwinden die Grössen erster Ordnung von selbst, weil sie die ungerade Potenz von I enthalten. Daher ergibt sich aus (10.6)

$$A = \bar{\beta} n \nu_0 - \frac{\bar{\beta} n \nu_0}{4\pi} \int \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\omega.$$

Da $\bar{\beta} n \nu_0$ nach (2.6) der Gesamtemission pro Einheitsvolumen gleich ist, wird der Emissionsüberschuss $E(P)$ gegeben durch

$$E = B - A = \frac{\bar{\beta} n \nu_0}{4\pi} \int \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\omega.$$

.....(10.7)

Der Strahlungsdruck, streng genommen, die auf das Einheitsvolumen wirkende Kraft, in einer Richtung r wird gegeben durch

$$F_r = \frac{I}{c} \int K(P, I) (I \cdot r) d\omega.$$

Die Glieder mit der geraden Potenz von I in (10.6) verschwinden in diesen Falle und es ergibt sich

$$F_r = \frac{\bar{\beta} n \nu_0}{4\pi c} \int \left\{ \frac{2e^{-\tau/2} \chi(\tau, -\infty)}{\bar{\alpha} n} [\cdot \mathfrak{V} \left(\log \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right)] + \sigma R(\tau) \right\} (I \cdot r) d\omega.$$

.....(10.8)

1. Vgl. § 5. Das vernachlässigte Glied der zweiten Ordnung enthält lauter gerade Potenzen von I , sodass es dasselbe Zeichen für die entgegengesetzten Richtungen besitzt.

Das hierin vernachlässigte grösste Glied ist, wie aus der Fussnote in S. 105 klar ersichtlich, von dritten Ordnung, so dass es im Vergleich mit dem beibehaltenen Glied ebenso auch von der zweiten Ordnung ist, wie bei (10.7).

§ 11. *Annäherungsausdruck für Strahlungsdruck.* Die Funktionen, $\chi(\tau, -\infty)$, $R(\tau)$ in (10.8) werden gegeben, wenn die Form der Funktion $\Delta(\zeta)$ bekannt wird; die Durchführung der Rechnungen ist jedoch im allgemeinen nicht praktisch. Für die Spektrallinie z. B. die L_{α} -Strahlung bei der Wasserstoffhülle, deren Strahlungsdruck nicht unbedeutend ist, ist die optische Länge τ sehr gross; in solchem Falle kann man die angenäherten Werte von $\chi(\tau, -\infty)$ und $R(\tau)$ leicht berechnen.

$\chi(\tau, -\infty)$ ist durch (8.4) definiert, oder nach (6.3), (10.2_a) umgeschrieben

$$-\chi(\tau, -\infty)e^{-\tau/2} = \frac{\tau \int_{-z}^z \zeta e^{\tau \int_0^{\zeta} \Delta(\zeta) d\zeta} \Delta(\zeta) d\zeta}{e^{\tau/2}}; \dots\dots\dots(11.1)$$

$-\chi e^{-\frac{\tau}{2}}$ ist ein gewichteter Mittelwert von ζ , dessen Gewicht wegen der Eigenschaft von $\Delta(\zeta)$ und des grossen Wertes von τ ein scharfes Maximum im positiven Gebiet besitzt. Bezeichnet man also den diesem entsprechenden Wert von ζ mit ζ_m , so erhält man als erste Approximation

$$\chi(\tau, -\infty) \doteq -\zeta_m e^{\tau/2}. \dots\dots\dots(11.2)$$

ζ_m hängt selbstverständlich nicht nur von der Form von $\Delta(\zeta)$, sondern auch von τ ab. Um seine Abhängigkeit von τ klar zu machen, betrachten wir einen besonderen Fall, wo die Geschwindigkeitsverteilung der regellosen Bewegungen der Atome das *Boltzmannsche* Gesetz befolgt. Man hat dann nach der Fussnote in S. 98 $\Delta(\zeta) = \frac{1}{\pi \Delta} e^{-\zeta^2/\pi \Delta^2}$ und nach einer Reihe der üblichen Rechnungen

$$x = \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \text{ wo } x \equiv \frac{\zeta_m}{\sqrt{\pi} \Delta}. \dots\dots\dots(11.3)$$

Diese Gleichungen zeigen augenscheinlich, dass die Änderung von τ auf ζ_m nur unbedeutende Einfluss ausübt, so dass wir in der Praxis ζ_m als eine Konstante annehmen können. x nimmt in der Tat nur von 2.2 bis 2.5 zu, wenn τ sich von 2200 zu 11500 ändert.¹

Das Glied von $R(\tau)$ in (10.8) scheint, unter unserer Annahme,

1. Nämlich: $x = \zeta_m / \sqrt{\pi} \Delta$

2.0	2.2	2.3	2.4	2.5
τ	740	2200	3700	6500
			11500	

nämlich für sehr grosse τ , klein zu sein. Das ist nicht streng bewiesen worden, kann aber für eine einfache Spezialform von $\Delta(\zeta)$ leicht bestätigt werden, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\zeta) &= a \text{ (Konst.)} && \text{für } |\zeta| < \delta \\ \Delta(\zeta) &= 0 && \text{für } |\zeta| > \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11.4)$$

Man erhält dann aus (6.3), (6.4), (8.4), (10.5) die folgenden Beziehungen :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 2\Delta, \quad 2a\delta = 1, \quad \Phi^0(\zeta) = a\zeta, \\ \chi(\tau, -\infty) &= -2\delta \cosh \frac{\tau}{2} + 4 \frac{\delta}{\tau} \sinh \frac{\tau}{2}, \\ R(\tau) &= \frac{\delta}{\tau} e^{-\tau} \left(1 + \frac{2}{\tau} \right) - \frac{2\delta}{\tau^3} (1 - e^{-\tau}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11.5)$$

Vernachlässigt $\frac{1}{\tau}$ sowie $e^{-\tau}$ gegen eins, so hat man

$$\chi = -2\Delta e^{\frac{\tau}{2}}, \quad R(\tau) = -\frac{4\Delta}{\tau^3}. \quad \dots\dots\dots(11.6)$$

Das Verhältnis des Gliedes von $R(\tau)$ in (10.8) zum anderen wird wegen (6.2)

$$\sigma R(\tau) \div \left\{ \frac{2\chi(\tau, -\infty)}{\bar{a}\mu} e^{-\frac{\tau}{2}} \text{I}\cdot\text{F}\left(\log \frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right) \right\} \sim \frac{R(\tau)}{2\chi(\tau, -\infty)} \tau^2 e^{\frac{\tau}{2}},$$

oder nach (11.6) $\sim \frac{1}{\tau}$, was klein ist gegen eins falls τ gross ist. (10.8)

lautet folglich wegen (11.2)

$$F_r = -\frac{\zeta_m \nu_0}{2\pi c} \int \left(\text{I}\cdot\text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right) \right) \cdot (\text{I}\cdot\text{v}) d\omega. \quad \dots\dots\dots(11.7)$$

Um das Integral durchzuführen, machen wir vom Polarkoordinatensystem Gebrauch, dessen Z-Achse mit der Richtung von $\text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)$ übereinstimmt. Es seien l ($\text{l}, \theta, \varphi$) und r ($\text{r}, \theta, \varphi$); dann ist $\text{I}\cdot\text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right) = \cos\theta \cdot \left| \text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right) \right|$. Man erhält dann nach einigen algebraischen Rechnungen

$$\int (\text{I}\cdot\text{r}) \cdot \left(\text{I}\cdot\text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right) \right) d\omega = \frac{4\pi}{3} \cos\theta \left| \text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right) \right|.$$

Da aber $\cos\theta \left| \text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right) \right| = \text{r}\cdot\text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right)$ ist, ergibt sich aus (11.7)

$$F_r = -\frac{2\nu_0 \zeta_m}{3c} \text{r}\cdot\text{F}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{a}}\right). \quad \dots\dots\dots(11.8)$$

Vermittels dieses Ausdruck für den Strahlungsdruck kann man die Bewegungsgleichungen in verschiedenen Fällen konstruieren. Als einen speziellen Fall erhält man für die parallele Nebelschicht eine Gleichung, die der *Zanstraschen* ganz analog ist.¹

§ 12. *Annäherungsausdruck für Emissionsüberschuss.* Die Gleichung (10.7) ist nach (6.2) umzuschreiben :

$$E = \frac{\nu_0 \bar{\beta}}{4\pi c \bar{a}} \int \left(1 - e^{-\frac{cn\bar{a}}{(I \cdot f)}} \right) \cdot (I \cdot f) d\omega, \quad \dots\dots\dots(12.1)$$

wobei $(I \cdot f)$ sowie $\int (I \cdot f) d\omega$ durch (7.10) bzw. (7.11) gegeben sind.

Wir begegnen in der heutigen Astrophysik der Erscheinung der Materiezerstreuung bei manchen Himmelskörpern, wie z. B. den neuen Sternen und P-Cygni-Sternen u. a.² In diesem Fall gibt es immer $D\rho/Dt < 0$, wo ρ die Dichte bedeutet, oder, was gleich bedeutend ist, $\text{div} \mathbf{v} > 0$, wegen der Kontinuitätsbedingung. Daher wird der Mittelwert von $(I \cdot f)$ nach (7.11) immer positiv.

Bei der Ableitung von (12.1) haben wir angenommen, dass $(I \cdot f)$ für alle Richtungen positiv ist, das ist jedoch, streng gesprochen, nicht immer der Fall, d. h. $(I \cdot f)$ könnte unter Umständen für einige Richtungen negativ sein. Da aber der Mittelwert von $(I \cdot f)$ positiv ist, muss $(I \cdot f)$ innerhalb des grössten Teils des Raumwinkels positiv sein, so dass (12.1) in guter Annäherung gelten muss. Setzen wir nun weitergehend den durch (7.11) gegebenen Mittelwert von $(I \cdot f)$ in (12.1) ein, was zu unserem Zweck ausreichen wird, so erhalten wir für den Emissionsüberschuss

$$E = \frac{\nu_0 \bar{\beta}}{3c \bar{a}} \left\{ 1 - e^{-\frac{3cn\bar{a}}{\text{div} \mathbf{v}}} \right\} \cdot \text{div} \mathbf{v}. \quad \dots\dots\dots(12.2)^3$$

§ 13. Die Grösse $\frac{3cn\bar{a}}{\text{div} \mathbf{v}}$ in (12.2) lässt sich als eine Art von Mittelwert der optischen Gesamtlängen in allen Richtungen betrachten. Bezeichnet man sie mit $\bar{\tau}$ (oder strenger $\bar{\tau}_y$), so hat man

1. M. N. **96** (1936) 46, Gl. (22).
 2. Gerasimovič, *loc. cit.*; H. Zanstra, M. N. **95** (1934) 84;
 S. Rosseland, *Theoretical Astrophysics*, 287; E. G. Williams, M. N. **97** (1937) 612;
 C. S. Beals, M. N. **95**(1935) 585; O. Struve, *Ap. J.* **81** (1935) 66;
 T. Araki u. M. Kurihara, *Jap. J. Ast. Geo.*, **14** (1937) 305.

3. Vgl. Gleichung (5.8) in A, wo $\text{div} \mathbf{v} = \frac{V}{r} \left(1 - \frac{\Gamma}{3} \right)$ ist.

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{3cM\bar{v}_{ij}}{\text{divb}} \quad \text{oder} \quad \bar{\tau}_{ij} = \frac{A_{ji}n_i}{\tilde{\omega}_{ji}} \cdot \frac{3}{\text{divb}} \quad \text{wegen (2.3).}$$

.....(13.1)

In folgenden soll dieses $\bar{\tau}$ als die mittlere optische Gesamtlänge verstanden werden.

Es ist wohl geeignet, an dieser Stelle einige oben ermittelten Formeln mittels $\bar{\tau}$ auszudrücken.

Für den Emissionsüberschuss wird Gleichung (12.2)

$$E = B - A = \frac{\beta n \nu_0}{\bar{\tau}} (1 - e^{-\bar{\tau}}), \quad \text{.....(13.2)}$$

woraus nach (2.6), für die Gesamtaborption

$$A = \beta n \nu_0 \left(1 - \frac{1 - e^{-\bar{\tau}}}{\bar{\tau}} \right). \quad \text{.....(13.3)}$$

Da das zweite Glied in (2.5) zu $\frac{n_j}{n_i} \frac{q_i}{q_j} \frac{A(\nu_{ij})}{n \nu_{ij}}$ gleich ist, so erhält man also

$$\beta_{ji} = \frac{A_{ji} n_j}{n} \left\{ 1 - \frac{n_j}{n_i} \frac{q_i}{q_j} \left(1 - \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{\bar{\tau}_{ij}} \right) \right\}^{-1}.$$

.....(13.4)

Nun wird der den $j \rightleftharpoons i$ Übergängen entsprechende Emissionsüberschuss in Quanta durch $E(\nu_{ij})/h\nu_{ij}$ gegeben, was der Bezeichnungsweise im Teile II nach als $Q_{[j,i]}$ zu schreiben ist, so ergibt sich aus (13.2), (13.4)

$$Q_{[j,i]} = \frac{E(\nu_{ij})}{h\nu_{ij}} = \frac{A_{ji} n_j}{\bar{\tau}_{ij}} \cdot \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{1 - \frac{n_j}{n_i} \frac{q_i}{q_j} \left(1 - \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{\bar{\tau}_{ij}} \right)}.$$

.....(13.5)

Können die erzwungenen Emissionsübergänge vernachlässigt werden, so folgt

$$Q_{[j,i]} = \frac{A_{ji} n_j}{\bar{\tau}_{ij}} (1 - e^{-\bar{\tau}_{ij}}); \quad \text{.....(13.5a)}$$

woraus folgt, unabhängig von $\bar{\tau}_{ij}$,

$$0 < Q_{[j,i]} < \frac{A_{ji} n_j}{\bar{\tau}_{ij}}. \quad \text{.....(13.5b)}$$

Wenn insbesondere $\bar{\tau}_{ij} \gg 1$ ist, erhält man

$$Q_{[j,i]} \rightarrow \frac{A_{ji} n_j}{\bar{\tau}_{ij}} = \tilde{\omega}_{ji} \frac{n_j}{n_i} \frac{\text{divb}}{3}. \quad \text{.....(13.5c)}$$

Wenn dagegen $\bar{\tau}_{ij} \ll 1$ ist, so reduziert sich (13.5) im allgemeinen

$$Q_{[j,i]} \rightarrow A_{ji} n_j \quad \text{.....(13.6)}$$

§ 14. *Direkte Strahlung vom Zentralstern.* In den vorhergehenden Abschnitten haben wir uns mit derjenigen monochromatischen Strahlungen beschäftigt, die aus irgendwelchen Atomen innerhalb der Gaswolke emittiert worden sind. Man muss aber ausserdem auch die von dem Zentralstern her direkt kommenden Strahlungen betrachten. Unter solchen Strahlungen vermögen nur die folgenden beiden Teile auf die Atome in der Gaswolke einzuwirken, nämlich, die sog. Ultraviolettstrahlungen, deren Wellenlänge ausserhalb der Grenze der jeweils zu betrachtenden Spektralserie liegt, und diejenigen monochromatischen Strahlungen, deren Frequenz in der Nähe irgendeiner Eigenfrequenz der Atome liegt. Die ersteren können die Atome ionisieren, und spielen infolgedessen eine wichtige Rolle in der Rekombinationstheorie des Emissionsmechanismus. Dagegen vermögen die letzteren die Atome nur anzuregen und ausserdem ist ihre Gesamtenergiemenge im Vergleich mit der der ersteren klein, so dass sie gewöhnlich vernachlässigt zu werden pflegt. Es ist aber auch zu vermuten, dass die Anregung bei den Sternen von niedrigerer Temperatur zur Erzeugung der Emissionslinie ebensoviel wie die Einfangsprozesse der Elektronen beitragen kann. Aus diesem Grunde wollen wir sie auch in Betracht ziehen.

Die Intensität J_i der Ultraviolettstrahlung (in weiterem Sinn) ausserhalb der i -Seriegrenze nimmt mit der Entfernung vom Zentralstern in Folge der Absorption ab. Diese Verhältnisse sind insbesondere für J_1 von Chandrasekhar, Gerasimovič u. s. a. theoretisch untersucht worden. Für den Zweck in dieser Abhandlung jedoch genügt es, von dem mittleren Wert von J_i (sei \bar{J}_i) für die ganze Gashölle Gebrauch zu machen.

Damit man den mittleren Wert von J_i sowie auch im allgemeinen den einer beliebigen physikalischen Grösse \mathfrak{A} eindeutig definieren kann, nehmen wir annäherungsweise das Gewicht $e^{-\tau_1}$ für die Vermittelung an, das die Intensität der Ultraviolettstrahlung ausserhalb der Lyman-grenze J_1 ungefähr proportional ist, wobei τ_1 die dem Abstand vom Zentralstern entsprechende optische Länge in bezug auf J_1 bedeutet. Der Grund dieser Annahme lässt sich etwa daraus erschen, dass jede Grösse, so lange sie sich auf optische Erscheinung bezieht, um so grössere physikalische Wichtigkeit haben müsste, je grösser das Emissionsvermögen in dem betrachteten Punkte ist, und dass dieses seinerseits mit dem Ionisationsvermögen oder J_1 wachsen müsste. Auf diese Weise erhält man

$$\bar{J}_i = \int_0^\infty \mathfrak{A} e^{-\tau_1} d\tau_1. \quad \dots\dots\dots(14.1)$$

Dabei darf die obere Grenze der Integration durch ∞ ersetzt werden, weil die gesamte optische Länge dadurch unendlich wird, dass man eine ganz dünne Schicht zur Gashülle von etwa $\tau_1=2$ hinzufügt.¹

Bezeichnet man mit $(J_i)_0$ den Wert von J_i auf der Sternoberfläche, so ergibt sich nach (14.1) für $i=1$, insbesondere,

$$J_1 = \frac{\omega^2}{4} (J_1)_0 \int_0^\infty e^{-2\tau_1} d\tau_1 = \frac{\omega^2}{8} (J_1)_0 \quad \dots\dots\dots(14.2)$$

wo ω das Verhältnis des Radius des Zentralsterns zu dem der Gashülle bedeutet. Aber für andere $i (\geq 2)$ bleibt der Wert von J_i überall beinahe konstant,² so dass man erhält

$$J_i = \frac{\omega^2}{4} (J_i)_0 \int_0^\infty e^{-\tau_1} d\tau_1 = \frac{\omega^2}{4} (J_i)_0, \quad i \geq 2. \quad \dots\dots\dots(14.2a)$$

$(J_i)_0$ wird hier, gemäss dem *Planckschen* Gesetz, durch

$$(J_i)_0 = 3.52 \times 10^7 \times T^4 \int_{x_i}^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad x_i = \frac{h\nu_i}{kT} \quad \dots\dots\dots(14.3)$$

gegeben, wobei ν_i die Grenzfrequenz der i -Serie und T die effektive Temperatur in Einheiten von 1000° bedeutet.

§ 15. Wir wollen nun den Übergangskoeffizienten B_i sowie den Absorptionskoeffizienten a_i des i -Atoms für die J_i -Strahlung berechnen. Bezeichnet man im allgemeinen mit B_{ik} den Koeffizienten dafür, dass ein Atom durch Absorption eines ν_{ik} -Quantums von einem diskreten Zustande i zu einem Intervalle $z, z + dz$ der kontinuierlichen Zustände übergeht, so folgen aus ihren Definitionen

$$B_i \int I_\nu d\nu = \int \left(\frac{B_{ik}}{d\nu} \right) I_\nu d\nu, \quad a_i \int I_\nu d\nu = \frac{h}{4\pi} \int \nu_{ik} \left(\frac{B_{ik}}{d\nu} \right) I_\nu d\nu, \quad \dots\dots\dots(15.1)$$

wobei B_{ik} durch

$$B_{ik} = \frac{4\pi^2 c^2}{h m c \nu_{ik}} f_{ki} dz \quad \dots\dots\dots(15.2)$$

gegeben ist.

Indem man für die J_i -Strahlung das *Plancksche* Gesetz und für die Oscillatorstärke f_{ki} den *Kramerschen* Ausdruck annimmt, erhält man für das Wasserstoffatom aus (15.1) und (15.2)

1. Vgl. Zanstra, M. N. 95 (1932) 131.

2. Vgl. § 20.

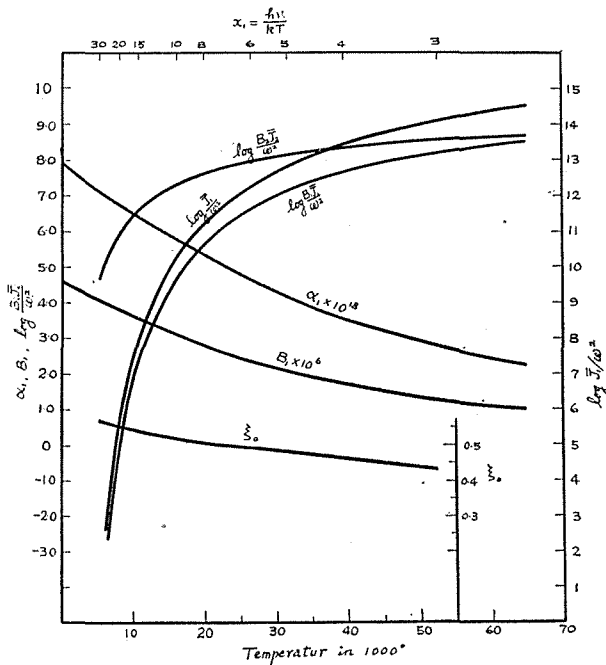
3. Vgl. D. H. Menzel und C. L. Pekeris, M. N. 96 (1935) 77, Gl.(2.1), (2.2).

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{hmcR^3}{\pi e^2} \frac{3\sqrt{3}}{2^6} B_i &= \frac{1}{4.60 \times 10^{-6}} \cdot B_i \\
 &= i^3 x_i^4 \int_{x_i}^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} \bigg/ \int_{x_i}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\
 \\
 \frac{mcR}{e^2} \frac{3\sqrt{3}}{2^4} a_i &= \frac{1}{7.88 \times 10^{-18}} \cdot a_i \\
 &= i x_i^3 \int_{x_i}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} \bigg/ \int_{x_i}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15.3)$$

Die Ionisationswahrscheinlichkeit des i -Atoms ist gleich zu $\frac{B_i J_i}{4\pi}$, deren Wert aus (14.2), (14.2a), (14.3), (15.3) berechnet wird; insbesondere für hinreichend kleinen Wert von x_i

$$\begin{aligned}
 \frac{B_i J_i}{4\pi} &\sim 2\pi\omega^2 \frac{e^2 R}{mc^3} \frac{2^4}{3\sqrt{3}} \frac{1}{i^3} \left(\frac{kT}{h} \right) \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{x_i}{2} \log x_i + \dots \right\}, \quad i \geq 2, \dots\dots\dots(15.4)
 \end{aligned}$$

Abb. 2



Die Ergebnisse der Berechnungen von \mathcal{J}_1 , a_1 , B_1 und $\frac{B_1 \mathcal{J}_1}{4\pi}$, $\frac{B_2 \mathcal{J}_2}{4\pi}$ sind in Abb. 2 veranschaulicht.

§ 16. Die Anzahl der Einfangsvorgänge von freien Elektronen pro Zeiteinheit pro Volumeneinheit wird nach (1.50) und (1.53) in der Abhandlung Menzels (*loc. cit.*) berechnet durch

$$n_0 n_e f(v) v \frac{2^4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2 h}{m^2 c^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{z^3} g_{II} dv,$$

wobei n_e , $f(v)$ die Zahl pro Volumeneinheit bzw. die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion von freien Elektronen bedeuten.

Wenn man das *Maxwellsche* Gesetz für $f(v)$ benutzt und Menzels g_{II} angenähert als 1 setzt, so erhält man $n_0 n_e D M(i, T)$ für die Gesamtanzahl des Einfangens in den i -Zustand, wo D eine Konstante $\left(= \frac{2^9 \pi^5}{(6\pi)^{3/2}} \cdot \frac{c^{10}}{m^2 c^3 h^3} \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^{3/2} = 3.22 \times 10^{-6} \right)$ ist, während $M(i, T)$ eine gewisse Funktion ist, deren Werte Cillié numerisch berechnet hat.

Die Wahrscheinlichkeit A_i dafür, dass ein ionisiertes Atom ein freies Elektron in den i -Zustand einfängt, ist selbstverständlich

$$A_i = n_e D M(i, T). \dots\dots\dots(16.1)$$

§ 17. Danach betrachten wir die den Eigenfrequenzen des Atoms entsprechenden Sternstrahlungen. Man fasse nun in einem P-System ein Bündel solcher Strahlungen ins Auge. Wenn der Verdünnungsfaktor dabei nicht zu klein ist, so stimmt die Richtung des Bündels annäherungsweise mit der des Radiusvektors \mathbf{l} des P-Systems überein. Dann lässt sich die Absorption im P-System leicht berechnen. Zu diesem Zweck hat man die optische Länge von P für die direkte Sternstrahlung mit der Frequenz $\nu = \nu_0(1 + \eta)$ in bezug auf das P-System zu berechnen; indem man nämlich in (9.2) $\xi \rightarrow \infty$ setzt, erhält man

$$\tau_\nu(P, \infty) = \tau(P) \left\{ \frac{1}{2} - \Phi''(\eta) \right\} - \sigma(P) \left\{ \left(\frac{A}{2} - \Phi''(\eta) \right) - \eta \left(\frac{1}{2} - \Phi''(\eta) \right) \right\}. \dots\dots\dots(17.1)$$

Wenn man nun der Einfachheit halber die Intensität J_ν der Strahlung in der Nachbarschaft der betrachteten Linie als konstant annimmt, so wird die im P zu absorbierende Gesamtenergiemenge A_s pro Volumen- und Zeiteinheit durch

$$A_s = J_\nu \int e^{-\tau_\nu} a(\nu) n d\nu$$

gegeben. Hieraus erhält man auf dieselbe Weise in § 10

$$A_S = J_\nu(I \cdot f) \frac{\nu_0}{c} \left\{ 1 - e^{-\tau} - \tau \sigma R(\tau) \right\}. \quad \dots\dots\dots(17.2)$$

Dabei ist $R(\tau)$ durch (10.5) definiert; es folgt demnach aus (11.5) und (6.2)

$$|\tau \sigma R(\tau)| \sim \frac{1}{\tau} \frac{\tau \omega}{V} \quad \text{für } \tau \gg 1$$

$$,, \quad \sim \tau \frac{\tau \omega}{V} \quad \text{für } \tau \ll 1,$$

wo ω und V die mittlere Geschwindigkeit der regellosen Bewegungen bzw. die des P-Systems bedeuten. Wenn man also das dritte Glied in den Klammern von (17.2) wegen der Kleinheit von $\tau \omega/V$ vernachlässigt, so erhält man als erste Approximation

$$A_S = J_\nu(I \cdot f) \frac{\nu_0}{c} (1 - e^{-\tau}). \quad \dots\dots\dots(17.2a)$$

Man hat ausserdem nach dem Planckschen Gesetze

$$J_\nu = \frac{\omega^2}{4} \frac{8\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad \dots\dots\dots(17.3)$$

§ 18. *Zum Strahlungsionisationsgleichgewicht.* Wir fassen die im i -Zustande befindlichen Atome in einem Atomaggregat in einem Volumenelement ins Auge. Ihre Zahl wird einerseits durch die Ionisations- und die Anregungsvorgänge sowie durch das Emittieren des Lichtquantums verkleinert, und andererseits durch die Übergänge zu diesem Zustande von den anderen aus in Folge der Absorption oder Emission und durch das Einfangen freier Elektronen vergrössert. Die Differenz dieser beiden Änderungen pro Zeiteinheit ist selbstverständlich gleich der Zeitderivative der Zahl der betrachteten Atome. Wenn sie verschwindet, möchten wir sagen, dass sich die Gashölle oder Atmosphäre im „*Strahlungsionisationsgleichgewicht*“ befindet. Wir wollen solche Gleichung, welche die Bedingung für dieses Gleichgewicht darstellt, „*allgemeine Zyklusgleichung*“ nennen.

Was solches Gleichgewicht anbetrifft, so sind insbesondere die folgenden drei Punkte zu bemerken, die man bei der Entwicklung der Theorie in Teil II zu berücksichtigen hat.

(1) Bei den Sternen von hoher Temperatur wie B_e -Sternen herrscht die Ionisation vom Grundzustande und folglich auch das Einfangen von Elektronen am stärksten vor. Der Absorptionskoeffizient a_1 oder, was dasselbe ist, die Absorption der Quanten B_1 für den ersteren Vorgänge nimmt, während die Temperatur von $30,000^\circ$ bis zu $10,000^\circ$ abnimmt, ungefähr um 50% zu, indem a_1 und B_1 am Ende je zu einem Grenzwert 7.88×10^{-18} bzw. 4.60×10^{-6} konvergieren. Ebenso wenig bedeutend

ändern sich die dem letzteren Vorgang entsprechenden Koeffizienten A_i innerhalb des ziemlich umfangreichen Temperaturgebiets; das ist insbesondere der Fall bei ihren Verhältnissen zueinander, wie die Rechen-
 ergebnisse Cilliés zeigen. Man kann also nötigenfall diese beiden Koeffizienten als Konstanten approximieren.

(2) Es ist nach (13.5) und (13.5a) klar, dass $\frac{n_j q_i}{n_i q_j} \left(1 - \frac{1 - e^{-\bar{\tau}}}{\bar{\tau}}\right)$

dem Beitrage der erzwungenen Emissionsübergänge ($j \rightarrow i$) zum Emissionsüberschuss $Q_{(j,i)}$ massgebend ist. Man kann aus den Tabellen IV, VI, VII, VIII durch unmittelbare Abschätzungen leicht sehen, dass entweder der Faktor $\frac{n_j}{n_i} \frac{q_i}{q_j}$ oder der Emissionsüberschuss selbst sehr klein wird, wenn $\bar{\tau}_{ij}$ nicht unbedeutend ist, infolgedessen darf man in den allgemeinen Zyklusgleichungen jene massgebende Grösse vernachlässigen.

(3) Bei den B_e -Sternen ist die Intensität der direkten Sternstrahlung um so schwächer, je höher die Spektralserie ist und, wenn $\bar{\tau}$ klein wird, kann die durch sie verursachte Anregung ausserdem vernachlässigt werden (vgl. (17.2a)). Es genügt also für uns nur diejenigen Anregungen zu betrachten, die durch die den grössten $\bar{\tau}$ entsprechenden Lymanlinien verursacht werden. Indem man den Ausdruck (17.2a) längs eines Radius integriert, so erhält man die Gesamtenergie, die durch die Atome in einem Zylinder mit Einheitsquerschnitt absorbiert wird, nämlich

$$J_\nu \frac{\nu_0}{c} \int (1 - e^{-\tau})(I \cdot f) dr \sim J_\nu \Delta\nu, \quad \tau \gg 1. \quad \dots\dots\dots(18.1)$$

wobei $\Delta\nu$ den Umfang der Geschwindigkeiten längs des Radius, in Frequenz ausgedrückt, bedeutet.

Das Verhältnis der Häufigkeit der Anregungen zu der der Ionisationen vom Grundzustand wird angenähert durch $\sum J_\nu \Delta\nu / 2J_1$ (sei $=\gamma$) gegeben, wobei sich die Summation über die Lymanserie erstreckt. Wenn man beispielsweise L_β -Strahlung ins Auge fasst, so erhält man aus (17.3) und (18.1)

Temp. in 1000°	31.4	26.2	19.6	15.7	10.5	7.9
$J_{L\beta} \Delta\nu / 2J_1$,	1.0×10^{-3}	1.5×10^{-3}	2.8×10^{-3}	4.7×10^{-3}	1.4×10^{-2}	3.3×10^{-2}

dabei ist $\Delta\nu \cdot c = 100$ km/sec angenommen worden. Die Frequenzdifferenz benachbarter Linien wird kleiner als $\Delta\nu$, wenn die laufende Quantenzahl hinreichend gross wird, und zugleich wird die entsprechende Strahlungsintensität schwächer als die von L_β ; γ ist also, wie aus einfachen Rechnungen folgt, der Grössenordnung nach etwa 20 mal so gross wie

die in der Tabelle. Es ist daher leicht zu sehen, dass die Anregung bei Temperatur niedriger als 10,000° beträchtlich häufig stattfindet, und dass sie bei 20,000° auch noch nicht unbedeutend bleibt, namentlich $\gamma \approx 0.05$. Da sich solcher Vorgang jedoch meistens auf höhere Zustände bezieht, darf man ihn für *Be*-Sterne vernachlässigen, so lange man sich auf die niedrigeren Zustände beschränkt, was aber ein kleines Herabsetzen der Temperatur zur Folge hat.

II. Strahlungsionisationsgleichgewicht.

§ 19. *Allgemeine Zyklusgleichungen.* In diesem Teil soll die Theorie des Strahlungsionisationsgleichgewichts auf die Wasserstoffgashülle in Bewegung angewandt werden.

Es seien $Q_{j,i}^e$ und $Q_{i,j}^a$ die Zahlen der $j \rightarrow i$ bzw. $i \rightarrow j$ Übergänge pro Volumeneinheit pro Zeiteinheit, wobei $j > i$ anzunehmen ist. Für die Nettovermehrung der i -Atome infolge solcher Übergänge schreiben wir der Einfachheit halber so:

$$Q_{[j,i]} \equiv Q_{j,i}^e - Q_{i,j}^a.$$

Man erhält dann als die fundamentale Gleichung für den i -Zustand

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i v) = n_0 A_i - \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} Q_{[j,i]} - \sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,j]},$$

oder wegen der Kontinuitätsbedingung

$$\sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,j]} + \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = n_0 A_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} Q_{[j,i]} - n \frac{D}{Dt} \left(\frac{n_i}{n} \right), \dots\dots\dots(19.1)$$

wobei $n_0 A_i$ die Häufigkeit des Einfangens von freien Elektronen und $\frac{B_i J_i}{4\pi} n_i$ die der Ionisation bedeutet; die Anregungen der direkten Sternstrahlungen sind ausser acht gelassen. Wenn man (19.1) über alle Zustände summiert, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = \sum_{i=1}^{\infty} n_0 A_i + n \frac{D}{Dt} \left(\frac{n_0}{n} \right), \dots\dots\dots(19.2)$$

welche wir „Ionisationsgleichung“ nennen möchten.

Die Zeitderivative in (19.1) und (19.2) ist im allgemeinen ganz klein, es sei denn, dass es sich um das äusserste Gebiet der Gashülle oder um die Atmosphäre vom späteren Spektraltypus handelt. Man darf also bei den *Be*-Sternen annehmen, dass sich die Gashülle im Strahlungsionisationsgleichgewicht befindet. Dann werden (19.1) und (19.2) einfach

$$\sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i,j]} + \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = n_0 A_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} Q_{[j,i]}, \dots\dots\dots(19.3)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j = \sum_{j=1}^{\infty} n_0 A_j. \dots\dots\dots(19.4)$$

Diese Gleichungen gelten natürlich in jedem Punkte der betrachteten Gashülle. Will man sie aber als die Zyklusgleichungen für einen durchschnittlichen Zustand der ganzen Gashülle ansehen, so hat man anstatt der darin auftretenden Grössen ihre Mittelwerte von irgendwelcher Art, wie z. B. in § 14 erwähnt, einzusetzen.

§ 20. Wenn man in (19.3) $i=1$ setzt, so ergibt sich

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - n_0 A_1 = \sum_{j=2}^{\infty} Q_{(j,1)}. \quad \dots\dots\dots(20.1)$$

Hier ist die rechte Seite wegen (13.5a) immer positiv; man kann also

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - n_0 A_1 = \xi \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1, \quad 1 > \xi > 0 \quad \dots\dots\dots(20.2)$$

setzen; oder

$$(1 - \xi) \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = n_0 A_1. \quad \dots\dots\dots(20.2a)$$

Setzt man weiterhin

$$\xi_0 = \frac{\sum_{j=2}^{\infty} A_j}{\sum_{j=1}^{\infty} A_j} (< 1), \quad \dots\dots\dots(20.3)$$

so erhält man aus (20.2a) nach (19.4)

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j = \left(\frac{1 - \xi}{1 - \xi_0} - 1 \right) \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1. \quad \dots\dots\dots(20.4)$$

Die linke Seite ist wieder positiv, so dass gemäss (20.2)

$$\xi_0 > \xi > 0, \quad \dots\dots\dots(20.5)$$

nämlich ändert sich die Grösse ξ nach den verschiedenen physikalischen Bedingungen der Gashülle zwischen den Grenzwerte 0 und ξ_0 , und ξ_0 hängt nur von der Temperatur und zwar in ganz geringem Masse ab (vgl. Abb. 2). ξ darf also als einen, oben genannte Bedingungen charakterisierenden Parameter gewählt werden.

Setzt man in (20.4) $\xi=0$, so ergibt sich

$$\frac{\xi_0}{1 - \xi_0} \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 > \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j, \quad \dots\dots\dots(20.6)$$

wo $\xi_0/1 - \xi_0$, wie aus Abb. 2 gesehen wird, ungefähr 1 beträgt. Hieraus können wir einen wichtigen Schluss ziehen, dass die Ionisationsvorgänge vom Grundzustand aus häufiger als dieselben Übergänge von allen übrigen Zuständen aus stattfinden, woraus folgt, dass die Intensität J_i ($i \geq 2$) überall in der Gashülle beinahe konstant ist, weil $J_i \gg J_1$ für Bc -Temperatur ist. So lautet die schon in § 14 gemachte Voraussetzung.

(20.6) bestimmt ausserdem die obere Grenze von n_2/n_1 .¹

1. Nämlich; T in 1000° 20 30 50
 $n_2/n_1 <$ 0.013 0.08 0.14

§ 21. Es ergibt sich aus (20.1) und (20.2)

$$\sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]} = \xi \frac{B_1 J_1}{4\pi} \nu_1; \dots\dots\dots(21.1)$$

nämlich ist der Gesamtemissionsüberschuss der Lymanlinien in Quanten gleich der Häufigkeit der Ionisationen vom Grundzustand, multipliziert durch ξ . Wie man später sehen wird, $\xi = \xi_0$ und $\sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]} = Q_{[2,1]}$, falls der Verdünnungsfaktor hinreichend gross ist. (21.1) wird dann

$$Q_{[2,1]} = \xi_0 \frac{B_1 J_1}{4\pi} \nu_1, \dots\dots\dots(21.2)$$

d. h. ebensoviele L_{α} -Quanten müssen emittiert werden, wie die im Ultraviolett zu absorbierenden Quanten, multipliziert mit ξ_0 . Dabei reduziert sich ξ zu der von Ambarzumian benutzten Grösse $1 - \rho$.¹

§ 22. *Ionisationsgrad.* (20.2a) kann umgeschrieben werden:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{1}{1 - \xi} \frac{4\pi A_1}{B_1 J_1}. \dots\dots\dots(22.1)$$

Man kann also den Ionisationsgrad streng berechnen, wenn der Wert von ξ bekannt wäre; das ist nicht der Fall, denn man wird den letzteren erst dann bestimmen können, wenn das Problem völlig gelöst werden wird. Hier reicht es aber aus, seine Grössenordnung zu kennen; zu diesem Zweck setzt man die Grenzen von ξ aus (20.5) in (22.1) ein, nämlich

$$\frac{1}{1 - \xi_0} \frac{4\pi A_1}{B_1 J_1} > \frac{n_1}{n_0} > \frac{4\pi A_1}{B_1 J_1}, \dots\dots\dots(22.2)$$

wobei ξ_0 etwa $\frac{1}{2}$ ist. Der Mittelwert dieser beiden Grenzen bestimmt

also den Ionisationsgrad innerhalb eines Fehlerbereiches von 50%. Auf diese Weise werden die Rechnungen durchgeführt, indem man die Werte von $\frac{B_1 J_1}{\omega^2}$ aus Abb. 2 und den $M(i, T)$ gegeben von Cillié für $T = 20,000^\circ$ braucht; bei $M(i, T)$ lassen wir die Änderung der Temperatur ausser acht, was deshalb gestattet werden wird, weil die Abhängigkeit von der Temperatur nicht so bedeutend ist.² Die Ergebnisse der Rechnungen sind folgendermassen:

1. Vgl. M. N. 93 (1935) 50; Z. f. Ap. 9 (1935) 267.
 2. Um strenge Werte zu ermitteln, multipliziere man die Werte in der Tabelle mit $5.2 \times 10^{12} \left(\frac{A_1}{n_0} \right) \cdot (1 - \xi)^{-1}$.

Tabelle I

T in 1000°	7.86	10.5	15.7	19.6	26.2	31.4	39.3	52.4
$\frac{n_1}{n_0}$ in $n_e \omega^{-2}$	2.0×10^{-12}	1.0×10^{-14}	4.7×10^{-17}	5.2×10^{-18}	5.4×10^{-19}	1.7×10^{-19}	5.1×10^{-20}	1.5×10^{-20}

Wenn die Zahl der Atome in den zweiten und höheren Niveaus vernachlässigt wird, so wird der Ionisationszustand der Materie, die sich im thermodynamischen Gleichgewichte mit der verdünnten Strahlung befindet; durch die Gleichung ausgedrückt :

$$\frac{n_1}{n_0} = 4\omega^{-2} n_e \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \frac{h\nu_1}{c k T}.$$

Nach numerischen Rechnungen haben wir die folgenden Ergebnisse :¹

Tabelle I_a

T in 1000°	7.86	10.5	15.7	19.6	26.2	31.4	39.3	52.4
$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)_{r.gl.}$ in $n_e \omega^{-12}$	2.3×10^{-12}	1.0×10^{-14}	3.7×10^{-17}	3.6×10^{-18}	3.1×10^{-19}	8.8×10^{-20}	2.3×10^{-20}	5.4×10^{-21}

Der Vergleich der Tabellen I und I_a zeigt, dass in beiden Fällen die Ionisationen im gleichen Grade stattfinden, so dass es praktisch nicht nötig ist, sie von einander zu unterscheiden. Das bedeutet aber theoretisch nichts anders als eine von W. S. Adams und H. N. Russell² gefundene Tatsache, dass sich die Materie in der Sternatmosphäre in bezug auf den Ionisationszustand angenähert in thermodynamischem Gleichgewicht befindet, obgleich das nicht der Fall ist in bezug auf die Atomenverteilung in den Energieniveaus.

§ 23. *Grösse q.* Es ist wohl zweckmässig, hier eine neue Grösse q als das Verhältnis der beiden Glieder auf der linken Seite der Zyklusgleichung (19.3) für $i=2$ einzuführen, nämlich

$$q = \frac{4\pi Q_{[2,1]}}{n_2 B_2 J_2}, \dots\dots\dots (23.1)$$

d. h. q stellt das Verhältnis des L_α -Emissionsüberschusses in Quanten zu der Häufigkeit der Ionisationen vom zweiten Niveau aus dar. Angenommen, wie gewöhnlich, $\bar{\tau}_{12} \gg 1$, so ergibt sich aus (13.5c) und (23.1)

$$q = \frac{A_{21}}{\bar{\tau}_{12}} \frac{4\pi}{B_2 J_2} = \frac{4\pi A_{21}}{\omega^2 \bar{\tau}_{12}} \left(\frac{B_2 J_2}{\omega^2} \right)^{-1}, \dots\dots\dots (23.2)$$

wobei $\frac{B_2 J_2}{\omega^2}$ nur eine Funktion der Temperatur ist (vgl. Abb. 2).

q ist also proportional dem Verdünnungsfaktor ($4\omega^{-2}$).

1. Hier ist das Resultat mit einen Faktor 2 multipliziert, um die Strahlungsintensität dem durchschnittlichen Zustand der Gashülle anzupassen.

2. Ap. J. 68 (1928) 9.

Um eine andere physikalische Bedeutung von q zu sehen, betrachte man einen besonderen Fall, wo die *Zanstrasche* Rekombinationstheorie angenähert gilt. Da in diesem Fall $\xi \doteq \xi_0$ (vgl. § 25) ist, so erhält man aus (13.1), (21.2) und (23.1)

$$\zeta_1 \equiv \frac{\bar{\tau}_{2,3}}{\bar{\tau}_{1,2}} = \frac{1}{q} \times \text{Funktion von } T. \quad \dots\dots\dots(23.3)$$

q ist also sozusagen massgebend für die Durchsichtigkeit der Gashülle für die Balmerlinien.

Die Verallgemeinerung von (23.1) gibt

$$q_i = \frac{4\pi Q_{[i,1]}}{B_i J_i n_i}, \quad \text{wo } q_2 = q. \quad \dots\dots\dots(23.4)$$

Setzt man weiter als einen Mittelwert

$$\bar{q} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j = \sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]}, \quad \dots\dots\dots(23.5)$$

so erhält man aus (20.4), (21.1), (23.5) eine wichtige Beziehung zwischen \bar{q} und ξ , nämlich

$$\frac{\xi}{1-\xi} \left(1 + \frac{1}{\bar{q}} \right) = \frac{\xi_0}{1-\xi_0}. \quad \dots\dots\dots(23.6)$$

Hieraus folgt, dass die Bedingungen $\xi \rightarrow 0$ und $\xi \rightarrow \xi_0$ auf $\bar{q} \rightarrow 0$ bzw. $q \rightarrow \infty$ folglich auch auf $q_i \rightarrow 0$ bzw. $q_i \rightarrow \infty$ hinauslaufen, denn $\frac{B_j J_j n_j}{4\pi}$

und $Q_{[j,1]}$ müssten sich mit j kontinuierlich ändern. Es sei an dieser Stelle noch zu bemerken, dass, wenn (23.6) auch, streng genommen, eine Beziehung zwischen \bar{q} und ξ ist, sie, wegen der angenäherten Gleichheit $\bar{q} \doteq q$ (vgl. § 29), für eine Beziehung zwischen q und ξ gehalten werden darf; in diesem letzteren Sinne wollen wir im folgenden von (23.6) Gebrauch machen.

§ 24. *Grenzfall* $\xi \rightarrow 0, q \rightarrow 0$. Als einen hypothetischen Fall denken wir diesen Fall, der etwa durch eine unendliche Dichte verwirklicht würde. (20.2) wird dann

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = n_0 A_1. \quad \dots\dots\dots(24.1)$$

Da die Summanden in (21.1) alle positiv sind, erhält man

$$\sum_{j=2}^{\infty} Q_{[j,1]} \rightarrow 0, \quad Q_{[j,1]} \rightarrow 0. \quad \dots\dots\dots(24.2)$$

Man kann aber aus (13.5 b) und (13.5 c) unter der Annahme, $\bar{\tau}_{1,i} \gg 1$, die folgende Ungleichheit beweisen:

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} Q_{[k,j]} < \frac{n_1}{n_j} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}_{kj}}{\bar{\omega}_{k1}} Q_{[k,1]}$$

Demnach erhält man aus (2.4.2) wegen $\frac{\bar{\omega}_{ki}}{\bar{\omega}_{k1}} < j^{-1}$ (nach (2.1), (2.3)), unabhängig von j ,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_{[k, j]} = 0, \quad \dots\dots\dots(2.4.3)$$

wenn die Grössenordnung grösser bei $j^4 n_j$ als bei j selbst ist.

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i, j]} < \sum_{j=1}^{i-1} \frac{n_i}{n_j} \bar{\omega}_{ij} \frac{3}{\text{div}b} < Q_{[i, 1]} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{n_1}{n_j j^4},$$

hieraus folgt nach (2.4.2), unabhängig von i ,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{i-1} Q_{[i, j]} = 0. \quad \dots\dots\dots(2.4.4)$$

Schliesslich reduziert sich (1.9.3) gemäss (2.4.3), (2.4.4) zu

$$\frac{B_i J_i}{4\pi} n_i = n_0 A_i. \quad \dots\dots\dots(2.4.5)$$

Die Zyklusgleichungen sind also gelöst worden. Wie aus (2.4.5) leicht zu erschen ist, wächst n_j logarithmisch mit j zu unendlich, denn $A_j \sim O\left(j^{-3} \log \frac{j^2}{x_1}\right)$ nach Cillié und $B_j J_j \sim O(j^{-3})$ nach (1.5.4); d. h. die Bedingung für (2.4.3) und (2.4.4) ist bestätigt worden.

§ 25. Grenzfall $\xi \rightarrow \xi_0, q \rightarrow \infty$. Das entspricht kleiner Dichte oder grosserem Verdünnungsfaktor, wie bei den planetarischen Nebeln. In diesem Fall folgt aus (2.0.4)

$$\left. \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j J_j}{4\pi} n_j \right/ \left. \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = 0 \right\} \quad \dots\dots\dots(2.5.1)$$

also $n_j/n_1 \rightarrow 0$

Die Gashülle wird demgemäss transparent für alle Strahlungen anders als die Lymanlinien; folglich ergibt sich aus (1.9.3) für $i=2$ wegen (1.3.6)

$$Q_{[2, 1]} = n_0 A_2 + \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_j, \quad \dots\dots\dots(2.5.2)$$

woraus $Q_{[2, 1]} > \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_j. \quad \dots\dots\dots(2.5.2a)$

Da aber aus (1.3.5c) unter der Annahme $\bar{\tau}_{1j} \ll 1$

$$A_{j2} n_j \gg Q_{[j, 1]}, \quad \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_j \gg \sum_{j=3}^{\infty} Q_{[j, 1]} \quad \dots\dots\dots(2.5.3)$$

folgt, erhält man aus (2.5.2a)

$$Q_{[2, 1]} \gg \sum_{j=3}^{\infty} Q_{[j, 1]}. \quad \dots\dots\dots(2.5.4)$$

Die Zyklusgleichungen werden nun wegen $q_i \gg 1$ vereinfacht, nämlich, aus (19.3), (19.4) und (20.3), (25.1), (25.3), (25.4) berücksichtigt,

$$\sum_{j=2}^{i-1} A_{ij} n_i = n_0 A_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} A_{ji} n_j, \quad \text{für } i \geq 3, \quad \dots\dots\dots(25.5)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{[2,1]} &= n_0 A_2 + \sum_{j=3}^{\infty} A_{j2} n_i \\ Q_{[2,1]} &= \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - n_0 A_1 = \frac{\xi_0}{1 - \xi_0} A_1 n_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25.6)$$

$$\frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 = \sum_{j=1}^{\infty} n_0 A_j. \quad \dots\dots\dots(25.7)$$

Es ist bemerkenswert, dass dieser Fall das von Zanstra zuerst betrachtete Problem darbietet, dass (25.5) in der Tat nichts anders als die Zyklusgleichungen von Cillié sind und die *Zanstrasche* Theorie durch (25.6) formuliert wird.

§ 26. *Formalmanipulationen der allgemeinen Zyklusgleichungen.*
Die Methode, wonach Cillié seine Gleichungen (25.5) gelöst hat, ist nicht auf unsere allgemeinen Zyklusgleichungen anwendbar. Aber man kann durch die Einführung der in (26.3) zu definierenden Quantität $\bar{r}_{i+1, i}$ diese Gleichungen nach n_i formal lösen.

Wir verallgemeinern nun die Definition von ζ_i in (23.3) so :

$$\zeta_i \equiv \frac{\bar{r}_{i+1, i+2}}{\bar{r}_{i, i+1}} \quad \dots\dots\dots(26.1)$$

und setzen weiter

$$Q_{[j, i+1]} \equiv r_{i+1, i}^j \zeta_i^{-1} Q_{[j, i]}. \quad \dots\dots\dots(26.2)$$

Wenn man dann einen Mittelwert von $r_{i+1, i}^j$ gemäss dem Gesetz

$$\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j, i+1]} \equiv \bar{r}_{i+1, i} \zeta_i^{-1} \sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j, i]} \quad \dots\dots\dots(26.3)$$

nimmt, so erhält man, indem man $\sum_{i+2}^{\infty} Q_{[j, i+1]}$ und $\sum_{i+2}^{\infty} Q_{[j, i]}$ aus den Zyklusgleichungen für $i, i+1$ eliminiert,

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \bar{r}_{i+1, i} \zeta_i^{-1} \right\} Q_{[i+1, i]} + \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ Q_{[i+1, j]} - \bar{r}_{i+1, i} \zeta_i^{-1} Q_{[i, j]} \right\} \\ & + \frac{B_{i+1} J_{i+1}}{4\pi} n_{i+1} - \bar{r}_{i+1, i} \zeta_i^{-1} \frac{B_i J_i}{4\pi} n_i \\ & = A_{i+1} n_0 - \bar{r}_{i+1, i} \zeta_i^{-1} A_i n_0. \quad \dots\dots\dots(26.4) \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält formal nur $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \dots \zeta_i$; wenn nur ζ_1 einmal gegeben wird, so können alle ζ_i daher berechnet werden. Wir wollen nun (26.4) in eine etwas bequemere Form umschreiben.

Mit Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} r_{(j)}^i &\equiv I \cdot r_{2,1}^i \cdot r_{3,2}^i \cdot \dots \cdot r_{j,j-1}^i, \quad r_{(1)}^i \equiv I \\ \zeta_{(i)} &\equiv \zeta_1 \zeta_2 \cdot \dots \cdot \zeta_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26.5)$$

folgt aus (26.1) und (26.2) im allgemeinen

$$Q_{[i,j]} = r_{(j)}^i \zeta_{(j-1)}^{-1} Q_{[i,1]}. \dots\dots\dots(26.6)$$

Aus (13.1), (13.5c), (26.1) folgt

$$Q_{[i,1]} = \frac{A_{2,1}}{A_{i+1,i}} \cdot \frac{\tilde{\omega}_{i+1,i} \tilde{\omega}_{i,1}}{\tilde{\omega}_{2,1}} \zeta_{(i-1)!} \frac{\text{div} \mathbf{b}}{3} \dots\dots\dots(26.7)$$

und weiter aus (20.2a) nach (13.1), (23.2)

$$A_1 n_0 = \frac{1-\xi}{q} \cdot \frac{A_{2,1} A_1}{A_{3,2} A_2} \cdot \frac{\tilde{\omega}_{3,2}}{3} \text{div} \mathbf{b} \cdot \zeta_{10}, \dots\dots\dots(26.8)$$

wobei nach (24.5) gesetzt ist

$$\zeta_{10} = \frac{A_{3,2} \tilde{\omega}_{2,1}}{A_{2,1} \tilde{\omega}_{13,2}} \cdot \frac{A_2 B_1 J_1}{A_1 B_2 J_2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \zeta_1. \dots\dots\dots(26.9)$$

Diese Relationen, in (26.4) eingesetzt, geben nach einigen algebraischen Rechnungen schliesslich

$$\begin{aligned} &\left\{ r_{(i)}^{i+1} + \sum_{j=2}^{i-1} r_{(j)}^{i+1} \frac{\zeta_{(i-1)!}}{\zeta_{(j-1)!}} + \left(1 + \frac{1}{q_{i+1}} \right) \zeta_{(i-1)!} \right\} \cdot \zeta_i^2 \\ &+ \left\{ \bar{\tau}_{i+1,i} r_{(i)}^{i+1} - \frac{1-\xi}{q} C_{i+1,2} \frac{A_{i+1}}{A_2} \zeta_{10} \right\} \cdot \zeta_i \\ &- \bar{\tau}_{i+1,i} \left\{ C_{i+1,i} \sum_{j=2}^{i-1} r_{(j)}^i \frac{\zeta_{(i-1)!}}{\zeta_{(j-1)!}} + \left(1 + \frac{1}{q_i} \right) C_{i+1,i} \zeta_{(i-1)!} \right. \\ &\left. - \frac{1-\xi}{q} C_{i+1,2} \frac{A_i}{A_2} \zeta_{10} \right\} = 0, \quad i \geq 2, \quad \dots\dots\dots(26.10) \end{aligned}$$

wo
$$C_{i,j} = \frac{A_{i+1,i} \tilde{\omega}_{j+1,j} \tilde{\omega}_{j,1}}{A_{j+1,j} \tilde{\omega}_{i+1,i} \tilde{\omega}_{i,1}}. \dots\dots\dots(26.11)$$

§ 27. Fall $\zeta_1 \ll 1$. Die Formel (26.10) kann in dem Fall von ziemlich grossen $\bar{\tau}_{ij}$ am bequemsten behandelt werden. In § 25 wurde berechnet, dass $\bar{\tau}_{2,3} \rightarrow 0$, als $q \rightarrow \infty$, oder, was dasselbe ist, $\xi \rightarrow \xi_0$. Wenn also q ziemlich gross und folglich $\bar{\tau}_{2,3}$ nicht zu merklich ist, so ist es eher zweckmässig, folgendermassen zu manipulieren. Nämlich werden Gleichungen (25.5), (25.6), (25.7) ohne weiteres für den hiesigen Fall gültig, bis auf ganz triviale mathematische Ungenauigkeit, wenn man nur $Q_{[j,i]}$ anstatt $A_{ji} n_j$ setzt. Indem man aus diesen Gleichungen für

$i, i+1$ unmittelbar $\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,i]}$, $\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,i+1]}$ eliminiert, und dabei

$$S_{i,i+1} = \frac{\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,i+1]}}{\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,i]}} \dots\dots\dots(27.1)$$

$$A'_{ji} = A_{ji} \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{ij}}}{\bar{\tau}_{ij}} \dots\dots\dots(27.2)$$

setzt, so erhält man nach (13.1), (13.5a), (25.6)

$$\begin{aligned} & \bar{\tau}_{i+1, i+2} \left\{ A'_{i+1, i} S_{i, i+1} + \sum_{j=2}^i A'_{i+1, j} \right\} \\ & - \bar{\tau}_{i, i+1} \frac{\tilde{\omega}_{i+1, i} A_{i+2, i+1}}{\tilde{\omega}_{i+2, i+1} A_{i+1, i}} S_{i, i+1} \sum_{j=2}^{i-1} A'_{i, j} \\ & = \left\{ \frac{A_{i+1}}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} - S_{i, i+1} \frac{A_i}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} \right\} \frac{A_{2,1} A_{i+2, i+1} \tilde{\omega}_{3,2}}{A_{3,2} \tilde{\omega}_{i+2, i+1}} \cdot \zeta_1, \\ & \dots\dots\dots(27.3) \end{aligned}$$

insbesondere für $i=2$

$$n_3 A'_{3,2} (1 + S_{2,3}) = Q_{[2,1]} S_{2,3} + n_0 A_2 \left(\frac{A_3}{A_2} - S_{2,3} \right),$$

oder wegen (13.1), (20.3), (25.6)

$$\begin{aligned} (1 + S_{2,3}) \bar{\tau}_{3,4} & = \frac{\tilde{\omega}_{3,2} A_{1,3} A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{4,3} A_{3,2} A'_{3,2}} \left\{ \frac{A_3}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} + S_{2,3} \frac{\sum_{j=3}^{\infty} I_j}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} \right\} \cdot \zeta_1. \\ & \dots\dots\dots(27.4) \end{aligned}$$

Man kann also der Reihe nach $\bar{\tau}_{3,4}$, $\bar{\tau}_{4,5}$, oder n_3 , n_4 , für gegebene Werte von $\bar{\tau}_{1,2}$, $\bar{\tau}_{2,3}$ berechnen. Die Relativintensitäten der Balmerlinien in Quanten werden durch $A'_{i,2} n_i / A'_{1,2} n_1$ gegeben.

§ 28. Um eine Beziehung zwischen ζ_1 und ξ oder q zu ermitteln und damit die formale Behandlung der Zyklusgleichungen vollkommen auszuführen, wenden wir nun die Methode in den vorhergehenden Abschnitten auf die Gleichungen für $i=1, 2$ an; wenn man nämlich, mittels $\bar{\tau}_{2,1}$, $\sum_{j=3}^{\infty} Q_{[j,1]}$ und $\sum_{j=3}^{\infty} Q_{[j,2]}$ aus ihnen eliminiert, so erhält man nach (20.2a) und (23.1)

$$\left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{q} \right) \frac{\zeta_1}{\bar{\tau}_{2,1}} \right\} \cdot Q_{[2,1]} = \left\{ \frac{\xi}{1 - \xi} + \frac{\zeta_1}{\bar{\tau}_{2,1}} \frac{A_2}{A_1} \right\} A_1 n_0,$$

oder (23.6), (26.7), (26.8) berücksichtigend

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{q} \right) \frac{\zeta_1}{\bar{\tau}_{2,1}} \right\} \zeta_1 & = \left\{ \frac{\xi_0}{1 - \xi_0} \cdot \frac{q}{1 + q} + \frac{1}{\bar{\tau}_{2,1}} \cdot \frac{A_2}{A_1} \right\} \zeta_1 \\ & \times \frac{1 - \xi}{q} \frac{A_1}{A_2} \zeta_{10}. \quad \dots\dots(28.1) \end{aligned}$$

Es ist hier zu bemerken, dass die Gleichung (28.1) im allgemeinen für die Bestimmung von ζ_1 gebraucht wird. Sie gibt in der Tat $\zeta_1 = \zeta_{10}$

für $\xi \rightarrow 0$ oder $q \rightarrow 0$ in Übereinstimmung mit der Definition von ζ_{10} . (Vgl. (26.9)). Dagegen für hinreichend grosse q hat sie eine asymptotische Lösung :

$$\zeta_1 \sim \frac{A_1}{A_2} \frac{\xi_0}{q} \zeta_{10}, \dots\dots\dots(28.2)$$

was nichts anders als der genaue Ausdruck für (23.3) ist.

§ 29. *Annäherungswerte von $\bar{r}_{i+1,i}$, $S_{i,i+1}$, \bar{q} .* Diese sind nötig, um die oben ermittelten Formeln praktisch anwenden zu können.

a) $\bar{r}_{i+1,i}$. Es folgt aus (13.1), (13.5a), (26.2)

$$r_{i+1,i}^j = (r_{i+1,i}^j)_0 \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{j,i+1}}}{1 - e^{-\bar{\tau}_{j,i}}}, \dots\dots\dots(29.1)$$

wo $(r_{i+1,i}^j)_0 = \frac{A_{i+2,i+1} \tilde{\omega}_{i+1,i} \tilde{\omega}_{j,i+1}}{A_{i+1,i} \tilde{\omega}_{i+2,i+1} \tilde{\omega}_{j,i}} \dots\dots\dots(29.1a)$

$(r_{i+1,i}^j)_0$ nimmt mit j allmählich zu, um endlich einen Grenzwert zu erreichen. $\bar{r}_{i+1,i}$ wird wegen (26.2), (26.3)

$$\bar{r}_{i+1,i} = \frac{\sum_{j=i+2}^{\infty} r_{i+1,i}^j Q_{[j,i]}}{\sum_{j=i+2}^{\infty} Q_{[j,i]}}, \dots\dots\dots(29.2)$$

oder nach (13.1), (13.5a), (29.1)

$$\bar{r}_{i+1,i} = \frac{\sum_{j=i+2}^{\infty} (r_{i+1,i}^j)_0 \tilde{\omega}_{j,i} n_j (1 - e^{-\bar{\tau}_{i+1,j}})}{\sum_{j=i+2}^{\infty} \tilde{\omega}_{j,i} n_j (1 - e^{-\bar{\tau}_{i,j}})}. \dots\dots\dots(29.3)$$

Wenn man nun berücksichtigt, dass $1 - e^{-\bar{\tau}_{ij}}$ und $\tilde{\omega}_{ji} \rightarrow 0$, als $j \rightarrow \infty$, für bestimmtes i , und dass sich n_j langsam mit j ändert, so erhält man für hinreichend grossen Wert von $\bar{\tau}$ als eine Approximation

$$\bar{r}_{i+1,i} \doteq \frac{\sum_{j=i+2}^N (r_{i+1,i}^j)_0 \tilde{\omega}_{j,i}}{\sum_{j=i+2}^N \tilde{\omega}_{j,i}}. \dots\dots\dots(29.4)$$

Wenn man aber, um die Abnahme von n_j mit j noch in Betracht zu ziehen, in (29.2) anstatt $Q_{[j,i]}$ annäherungsweise A_j einsetzt, so erhält man als eine andere Approximation

$$\bar{r}_{i+1,i} \doteq \frac{\sum_{j=i+2}^N (r_{i+1,i}^j)_0 A_j}{\sum_{j=i+2}^N A_j}. \dots\dots\dots(29.5)$$

Nach diesen beiden Formeln sind die Werte von $\bar{r}_{i+1,i}$ berechnet worden; dabei sind die Werte von A_{ji} und A_j aus den Arbeiten von Menzel bzw. von Cillié ($T=20,000^{\circ}$) entnommen. Die Rechenergebnisse sind folgendermassen :

Tabelle II

Gleichung	Berücksichtigt bis zu 8-ten Niveau		Berücksichtigt bis zu 10-ten Niveau	
	(29.4)	(29.5)	(29.4)	(29.5)
$\bar{r}_{2,1}$	0.27	0.26	0.29	0.28
$\bar{r}_{3,2}$	0.37	0.33	0.41	0.36
$\bar{r}_{4,3}$	0.38	0.33	0.45	0.38

Die Werte von $\bar{r}_{i+1,i}$ abgesehen von $\bar{r}_{2,1}$, hängen also sowohl von den alternativen Formeln als auch von der Anzahl der in Betracht gezogenen Zustände ab. Aber wir werden im Teil III die Werte in der vierten Spalte der Tabelle annehmen, welche beinahe gleich den Werten der ersten Spalte sind.

b). $S_{i,i+1}$. Es ergibt sich aus (13.5a), (27.1), (27.2)

$$S_{i,i+1} = \frac{\sum_{j=i+2}^{\infty} n_j A'_{j,i+1}}{\sum_{j=i+2}^{\infty} n_j A'_{j,i}} \dots\dots\dots(29.6)$$

Da $A'_{j,i}$ sich für nicht zu grossen \bar{r}_{ij} ungefähr wie j^{-5} ändert, so erhält man im solchen Falle als eine gute Approximation

$$S_{i,i+1} = \frac{\sum_{j=i+2}^N A'_{j,i+1}}{\sum_{j=i+2}^N A'_{j,i}} \text{ für } \zeta_1 \ll 1, \dots\dots(29.7)$$

insbesondere für $\bar{r}_{ij} \ll 1$

$$S_{i,i+1} = \frac{\sum_{j=i+2}^N A_{j,i+1}}{\sum_{j=i+2}^N A_{j,i}} \dots\dots\dots(29.7a)$$

In der Tat steht das Resultat im Teil III, wo man in (29.7a) die Zustände bis $j=10$ berücksichtigt, mit dem von Cillie bis $j=14$ in Betracht gezogenen Resultat in guter Übereinstimmung.

Wenn \bar{r}_{ij} nicht merklich klein ist, so hat man unmittelbar durch (29.7) sukzessiverweise die Werte von $S_{i,i+1}$ zu berechnen.

c). \bar{q} . (23.4), (23.5) werden wegen (13.5c), (23.1)

$$\frac{q}{q_i} = \frac{\tilde{\omega}_{3,1}}{\tilde{\omega}_{i,1}} \cdot \frac{B_i J_i}{B_2 J_2}, \dots\dots\dots(29.8)$$

$$\bar{q} = q \frac{\sum_{j=2}^{\infty} \tilde{\omega}_{j,1} n_j}{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{q}{q_j} \tilde{\omega}_{j,1} n_j} \dots\dots\dots(29.9)$$

Hier ändert sich q/q_j mit j kontinuierlich¹ und $\tilde{\omega}_{j,1}$ ungefähr mit j^{-2} , und n_2 ist gross im Vergleich mit n_j ($j \geq 3$) (vgl. Tabelle VI, VII), woraus folgt

$$\bar{q} \approx q. \dots\dots\dots(29.10)$$

I. Nämlich:	$r \setminus j$	2	3	4	5	6	7
	20,000	1	1.19	1.16	1.10	0.95	0.88
	30,000	1	.86	.73	.64	.56	.50

III. Numerische Betrachtungen.

§ 30. *Durchschnittliche Zustände der Gashülle.* In diesem Teil sollen als Anwendung der, im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Theorie die Atomverteilung in den Energieniveaus und die Relativintensitäten der Balmeremissionen numerisch betrachtet werden. Dazu betrachten wir zunächst die Beziehungen zwischen dem in der Theorie eine wichtige Rolle spielenden Parameter q einerseits, und den durchschnittlichen Werten einiger physikalischen Größen in der Gashülle andererseits.

Gegeben sind bei unserem Problem die Sterntemperatur und die optischdurchschnittlichen Werte der Dichte, der Dimension, des Verdünnungsfaktors und der Divergenz der Geschwindigkeit. Aber nur vier Größen von ihnen sind unabhängig, denn (14.1) gibt längs eines Radius $\bar{\tau}_1 = \int \tau_1 e^{-\tau_1} d\tau_1 = 1$ für die J_1 -Strahlung. Diese Bedingung läuft angenähert auf

$$\bar{\tau}_1 = a_1 n_1 R \omega^{-1} = 1, \quad \dots\dots\dots(30.1)$$

wo R den Sternradius bedeutet.

Wenn man einfachheitshalber $\text{div} \mathbf{v} = 3 \frac{V}{r}$ (was $V \propto r$ entspricht) annimmt, so folgt aus (13.1)

$$\bar{\tau}_{1,2} = \frac{c n_1 \bar{\sigma}_{1,2} R}{V \omega} = \frac{A_{2,1} n_1 R}{\tilde{\omega}_{2,1} V \omega}.$$

Dann ergibt sich wegen (30.1)

$$\bar{\tau}_{1,2} = \frac{A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{2,1} a_1 V}. \quad \dots\dots\dots(30.2)$$

Indem man $\bar{\tau}_{1,2}$ aus (23.2) und (30.2) eliminiert, erhält man

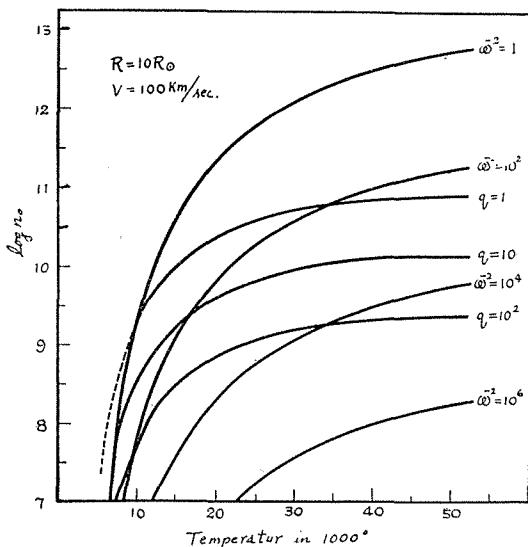
$$\left. \begin{aligned} \omega^2 q &= f_1(T, V) = V \phi_1(T), \\ \phi_1(T) &= 4\pi \tilde{\omega}_{2,1} a_1 \left(\frac{B_2 J_2}{\omega_2} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30.3)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus (20.2a), (30.1), (30.3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{q^{3/2} n_0^2}{1 - \xi} &= f_2(T, R, V) = \frac{V^{3/2}}{R} \phi_2(T), \\ \phi_2(T) &= \tilde{\omega}_{2,1}^{3/2} (4\pi a_1)^{1/2} \left(\frac{A_1}{n_0} \right)^{-1} \left(\frac{B_1 J_1}{\omega^2} \right) \left(\frac{B_2 J_2}{\omega^2} \right)^{-3/2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30.4)$$

Die Quantität $1 - \xi$ in (30.4) ändert sich nur um etwa $\frac{1}{2}$; d. h. nimmt von 1 bis $\frac{1}{2}$ ab, als ξ von 0 zu ξ_0 wächst. Wenn man also annäherungsweise $\xi = \frac{1}{2} \xi_0$ setzt, so kann man mittels (30.3), (30.4) für gege-

Abb. 3



ebene R und V die Größen ω^2, n_0 als Funktionen von T, q numerisch berechnen. Die Ergebnisse der Rechnungen sind in Abb. 3 veranschaulicht; dabei sind $R = 10 R_\odot, V = 100 \text{ km/sec}$ angenommen, was etwa bei den B_e -Sternen verwirklicht würden.

Die Kurve $\omega = 1$ in Abb. 3 stellt die Grenze des Spielraums der Quantitäten dar. Die entsprechenden Werte von q (sei

$= q_0$) und T sind folgendermassen:

Tabelle III

T in 1000°	5.24	7.86	10.5	15.7	19.6	26.2	31.4	39.3	52.4
q_0/V in 100 km/sec	61	3.3	.71	.13	.057	.023	.0133	.0072	.0032

Wie Tabelle III zeigt, besitzt q für B_e -Sterne eine kleine aber doch nicht verschwindende untere Grenze. Der Fall $q = 0$ kann demgemäss nur hypothetisch verwirklicht werden.

§ 31. *Änderung von ζ_1 im Verlauf $q = 0 \rightarrow \infty$.* Damit man sehen kann, wie die Zustände der Gashülle die mittlere optische Gesamtlänge beeinflusst, sind die Werte von ζ_1 mittels $M(z, T)$ von Cillié und $\bar{\tau}_{2,1}$ in der vierten Spalte der Tabelle II aus (23.6) und (28.1) berechnet worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle IV zusammengestellt, wo die Werte von ξ auch gegeben sind.

Tabelle IV

q	10,500°		15,700°		19,600°		26,200°		31,400°		39,300°		
	ξ	ζ_1	ξ	ζ_1	ξ	ζ_1	ξ	ζ_1	ξ	ζ_1	ξ	ζ_1	
0		2.20×10^{-4}		8.9×10^{-3}		.039		.158		.32		.63	
						$(.054 \quad .057)$		$(.021 \quad .023)$		$(.012 \quad .013)$		$(.0061 \quad .0072)$	
0.1				$(.11 \quad .13)$.087	.050	.080	.16	.077	.30	.072	.57
0.2			.15	.014	.15	.049	.14	.15	.13	.28	.12	.52	
0.5	$(.33 \quad q_0 = .71)$	2.3×10^{-4}	.27	.011	.26	.040	.24	.13	.24	.23		.44	.41
1	.37	1.8	.35	6.9×10^{-3}	.34	.029	.33	.10	.32	.18	.30	.32	
2	.44	1.1	.42	4.4	.41	.018	.39	.070	.38	.13	.36	.22	
4	.48	.59	.46	2.5	.45	.010	.44	.041	.42	.078	.41	.14	
6	.50	.41	.48	1.7	.47	7.4×10^{-3}	.45	.028	.44	.057	.42	.10	
8	.51	.31	.49	1.3	.48	5.6	.46	.023	.45	.044	.43	.083	
10	.05 .52	.25 $\times 10^{-4}$.50	1.1 $\times 10^{-3}$.49	4.5 $\times 10^{-3}$.47	.019	.46	.037	.44	.069	
100	.54	2.6×10^{-6}	.52	1.1 $\times 10^{-4}$.51	4.8 $\times 10^{-4}$.49	2.0×10^{-3}	.48	3.6×10^{-3}	.46	8.1×10^{-3}	
∞	.54		.52		.51		.49		.48		.46		

Die in Klammern stehenden Zahlen in der Tabelle sind q_0 und die entsprechenden Grenzwerte von ξ, ζ_1 . Der Verdünnungsfaktor $4\omega^{-2}$ wird nach (30.3) berechnet durch

$$\omega^2 = q_0/q. \dots\dots\dots(31.1)$$

Die Grenze $\omega^{-2} = 100$ findet an den durch schwarze Linienstrecke gekennzeichneten Stellen statt. Die bei $q=0$ stehenden Zahlen in Tabelle IV stellen die aus (26.9) berechneten Grenzwerte ζ_1 , nämlich ζ_{10} dar.

Die Werte von a_1 in Abb. 2 und $\frac{A_{2,1}}{\bar{\omega}_{2,1}} = 1.36 \times 10^{-7}$ geben nach (30.2) die Werte von

	$\bar{\tau}_{1,2} \times V$ (in 100 km/sec)				
T in 1000°	5.24	10.5	19.6	31.4	52.4
	1900	2100	2600	3400	4900.

Diese Zahlen geben nur die Größenordnung von $\bar{\tau}_{1,2}$ wegen der Annäherung (30.1). Der Vergleich dieser mit der Tabelle IV zeigt, dass

sich die Grössen ζ_1 sowie $\bar{\tau}_{2,3}$ allmählich Null nähern, als $q \rightarrow \infty$, wenn sie auch mit der Temperatur zunehmen. Z. B. für $\omega^{-2} = 100$ sieht man, dass $\bar{\tau}_{2,3}$ etwa bei $15,000^\circ$ etwas merklich zu werden beginnt, und bei $25,000^\circ$ Grössenordnung von 100 erreicht. Wenn man dagegen, wie üblich, $\omega^{-2} \sim 10^4, 10^5$ bei B_e -Sternen annimmt, so darf man ihren Gas-hüllen Durchsichtigkeit von ziemlich hohen Grade zuschreiben.

§ 32. *Kontinuierliche Absorption an der Balmergrenze.* Das Verhältnis der Häufigkeit der Ionisationen von den Zuständen $i \geq 2$ zu der der von Grundzustande wird nach (20.4), (23.6) gegeben durch

$$\frac{\sum_{j=2}^{\infty} B_j J_j n_j}{B_1 J_1 n_1} = \xi / q.$$

Die Werte dieses Verhältnisses für die gerade bei der Grenze $\omega^{-2} = 100$ stehenden Werte von q in Tabelle IV sind dort nebenbei in Italik gegeben. Es beträgt z. B. 0.12 für $20,000^\circ$: die Ionisationen finden also bei den B_e -Sternen ziemlich häufig vom zweiten Zustande aus statt. Aber das bedeutet nicht immer, dass sie gewaltige kontinuierliche Absorption an der Balmergrenze verursachen können. Die Bedingung dafür ist in der Tat

$$Q_{[2]} \equiv n_0 A_2 - \frac{B_2 J_2}{4\pi} n_2 \leq 0. \quad \dots\dots\dots(32.1)$$

Da aber nach (13.1), (20.2a) und (26.9)

$$Q_{[2]} = \left\{ 1 - \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_{10}} \right\} A_2 n_0 \quad \dots\dots\dots(32.2)$$

ist, so gibt (32.1)

$$\zeta_1 \geq (1 - \xi) \zeta_{10}. \quad \dots\dots\dots(32.3)$$

Das Gleichsetzen beider Seiten von (32.3) bestimmt drei kritische Werte von q , nämlich aus (28.1)

$$q_k = 0 \quad \text{und} \quad 1 + q_k = \frac{\sum_{j=2}^{\infty} A_j}{A_2} \left\{ 1 + \frac{\zeta_{10}}{\bar{\tau}_{2,1}} (1 - \xi_k) \right\}^{-1}, \quad \dots\dots\dots(32.4)$$

einer ist negativ und hat keinen Sinn, die anderen beiden 0 und $q_k > 0$ bestimmen das Gebiet der kontinuierliche Absorption. Die Werte von q_k für jede Temperatur werden nach (23.6) und (32.4) berechnet, nämlich

Temp.	15,700°	19,600°	26,200°	31,400°
q_k	1.5	1.3	0.81	0.28
ω^{-2}	12	23	35	22.

Diese Resultate können auch unmittelbar nach (32.3) mittels der in Tabelle IV gegebenen Werte von ζ_1, ξ, ζ_{10} bestätigt werden. Wie man

sieht, findet die kontinuierliche Absorption nur bei den *Be*-Sternen mit kleinen Verdünnungsfaktoren statt.

§ 33. *Gesamtquanten von Balmeremissionen und kontinuierliche Emissionen an der Balmergrenze.* Indem man aus den Zyklusgleichungen für $i = 1, 2$ $Q_{[2,1]}$ eliminiert und (20.2_a), (23.6), (26.3) berücksichtigt, erhält man für die Gesamtquanten von Balmeremissionen den Ausdruck:

$$\sum_{j=3}^{\infty} Q_{[2,1]} = \frac{\sum_{j=3}^{\infty} A_j}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{q}\right) \xi}{1 + \frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}} \left(1 + \frac{1}{q}\right)} \cdot \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1. \quad \dots\dots\dots(33.1)$$

Also wird das Verhältnis γ_B der Gesamtquanten der von der ganzen Gashülle aus herstammenden Balmeremissionen zu den der Ultraviolettquanten der Sternstrahlung¹ gegeben durch

$$\gamma_B = \frac{\sum_{j=3}^{\infty} A_j}{\sum_{j=2}^{\infty} A_j} \cdot \frac{(1+q)\xi}{q + \frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}}(1+q)}. \quad \dots\dots\dots(33.2)$$

In ähnlicher Weise erhält man für das Verhältnis γ_K der Gesamtzahl der Quanten der kontinuierlichen Emissionen zu der der Balmeremissionen wegen (13.1), (20.2_a), (23.6), (32.2), (33.1)

$$\gamma_K = \left\{ 1 - \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_{10}} \right\} \left\{ 1 + \frac{\zeta_1}{\bar{r}_{2,1}} \cdot \frac{1+q}{q} \right\} \cdot \frac{A_2}{\sum_{j=3}^{\infty} A_j}. \quad \dots\dots\dots(33.3)$$

Insbesondere, falls $q \gg 1$

$$\gamma_B = \frac{\sum_{j=3}^{\infty} A_j}{\sum_{j=1}^{\infty} A_j}, \quad \gamma_K = A_2 / \sum_{j=3}^{\infty} A_j \quad \dots\dots\dots(33.4)$$

und falls $q \ll 1$

$$\gamma_B \sim \frac{\bar{r}_{2,1} \sum_{j=3}^{\infty} A_j}{\zeta_{10} \sum_{j=2}^{\infty} A_j} \cdot \xi, \quad \gamma_K = \frac{\zeta_{10} A_2}{\bar{r}_{2,1} \sum_{j=3}^{\infty} A_j} - 1. \quad \dots\dots(33.5)$$

γ_B und γ_K werden üblich für die Konstanten gehalten, welche den Werten von (33.4) gleich sind, aber sind sie in Wirklichkeit nicht konstant, sondern veränderlich. Diese Verhältnisse sind in der Tabelle V zu sehen.

¹ Das Verhältnis der Gesamtquanten der Balmeremissionen zu den der in der ganzen Gashülle zu absorbierenden Ultraviolettquanten ist gleich γ_B/ξ , weil sie nach (33.1) durch $\int \xi \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 d\omega$ gegeben wird, wo $d\omega$ das Volumenelement bedeutet.

Tabelle V $\gamma/(\gamma)_{q=\infty}$

	q	0	0.1	0.5	1	2	4	10	∞
19,600°	γ_B	0	0.63	1.1	1.1	1.1	1.1	1.0	1.0
	γ_K	-0.9	-1.2	-0.56	-0.15	0.23	0.54	0.76	1.0
31,400°	γ_B	0	0.15	0.46	0.58	0.70	0.81	0.92	1.0
	γ_K	-0.2	-0.8	0.2	0.41	0.58	0.79	0.85	1.0

§ 34. *Relativintensitäten der Balmeremissionen.* Man hat mittels der Werte von ζ_1, ξ in Tabelle IV erstens die Werte von ζ_2, ζ_3 zu berechnen, damit man die Relativintensität H_α/H_β in Quanten abschätzen kann.

1) *Fall $\bar{\tau}_{2,3} \gg 1$.* In diesem Fall kann man am bequemsten von (26.10) Gebrauch machen, welche für $i=2, 3$ lautet:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{1}{r_{2,1}^3} \left(1 + \frac{1}{q_3} \right) \zeta_1 \right\} \cdot \zeta_2^2 \\ & - \left\{ \frac{A_3 \tilde{\omega}_{3,2} A_{4,3} A_{2,1}}{A_2 \tilde{\omega}_{4,3} A_{3,2}^2} \cdot \frac{1-\xi}{q} \zeta_{10} - \bar{\tau}_{3,2} \right\} \cdot \zeta_2 \\ & - \bar{\tau}_{3,2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{q} \right) \zeta_1 - \frac{1-\xi}{q} \zeta_{10} \right\} \cdot \frac{\tilde{\omega}_{3,2} A_{4,3} A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{4,3} A_{3,2}^2} = 0 \\ & \dots\dots\dots(34.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left\{ 1 + \frac{1}{r_{2,1}^3} \left(1 + \frac{1}{q_1} \right) \zeta_1 \right\} \cdot \frac{\zeta_2}{r_{3,2}^4} \right] \cdot \zeta_3^2 \\ & - \left[\frac{A_4 \tilde{\omega}_{3,2} A_{5,4} A_{2,1}}{A_2 \tilde{\omega}_{5,4} A_{3,2} A_{4,3}} \cdot \frac{1-\xi}{q} \zeta_{10} - \bar{\tau}_{4,3} \right] \cdot \zeta_3 \\ & - \bar{\tau}_{4,3} \frac{\tilde{\omega}_{3,2} A_{5,4} A_{2,1}}{\tilde{\omega}_{5,4} A_{3,2} A_{4,3}} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{r_{2,1}^3} \left(1 + \frac{1}{q_3} \right) \zeta_1 \right\} \right. \\ & \times \left. \frac{A_{3,2}^2 \tilde{\omega}_{4,3}}{A_{4,3} A_{2,1} \tilde{\omega}_{3,2}} \zeta_2 - \frac{A_3}{A_2} \frac{1-\xi}{q} \zeta_{10} \right] = 0, \\ & \dots\dots\dots(34.2) \end{aligned}$$

woraus ζ_2 und ζ_3 berechnet werden. Dann erhält man nach (13.1), (13.5)

$$\frac{H_\alpha}{H_\beta} = \frac{\tilde{\omega}_{3,2} \tilde{\omega}_{4,3} A_{5,4}}{\tilde{\omega}_{4,2} \tilde{\omega}_{5,4} A_{4,3}} \cdot \frac{1 - \frac{2^2}{4^2} \frac{n_1}{n_2}}{1 - \frac{2^2}{3^2} \frac{n_3}{n_2}} \cdot \zeta_3^{-1}$$

$$= \frac{1.92}{\zeta_3} \cdot \frac{1 - \frac{n_1}{4n_2}}{1 - \frac{4n_3}{9n_2}}, \quad \dots\dots\dots(34.3)^1$$

denn H_α/H_β in Quanten ausgedrückt muss $Q_{[3,2]}/Q_{[4,2]}$ gleich sein.

Hier wird das Verhältnis n_{i+1}/n_i wegen (13.1) berechnet durch

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{A_{i+1,i} \tilde{\omega}_{i+2,i+1}}{A_{i+2,i+1} \tilde{\omega}_{i+1,i}} \cdot \zeta_i, \quad \dots\dots\dots(34.4)$$

wobei der Koeffizient 0.120, 0.267 bzw. 0.376 zu setzen ist, je nachdem $i=1, 2$ bzw. 3 ist. Die Rechenergebnisse sind wie in Tabelle VI.

Tabelle VI

$T=31,400^\circ$											
q	0		0.1	0.2	0.5	1	2	4	6	8	10
ζ_2	3.2	$q_0=.013$ 3.1	2.8	2.5	2.0	1.50	1.18	.86	.69	.58	.50
n_3/n_2	.85	.83	.73	.65	.52	.40	.32	.23	.18	.16	.13
ζ_3	2.8	2.8	2.5	2.3	1.96	1.65	1.32	1.08	.97	.88	.85
n_4/n_3	1.06	1.05	.95	.88	.74	.62	.50	.41	.37	.33	.32
H_α/H_β	.85	.86	.94	.99	1.15	1.33	1.63	1.93	2.1	2.3	2.4
$T=26,200^\circ$											
ζ_2	2.7	$q_0=.023$ 2.6	2.2	1.94	1.53	1.19	.88	.59	.44	.38	.32
n_3/n_2	.73	.67	.59	.52	.41	.32	.23	.16	.12	.10	.08
ζ_3	2.6	2.5	2.3	2.1	1.65	1.35	1.10	.91	.81	.76	.72
n_4/n_3	.99	.95	.86	.78	.62	.51	.41	.34	.30	.28	.27
H_α/H_β	.88	.88	1.00	1.09	1.34	1.59	1.90	2.2	2.5	2.6	2.8
$T=19,600^\circ$											
ζ_2	2.3	$q_0=.057$ 1.84	1.63	1.36	0.95	0.65	0.40				
n_3/n_2	.61	.49	.44	.36	.21	.16	.11				
ζ_3	2.5	1.86	1.70	1.45	1.15	.93	.76				
n_4/n_3	.92	.70	.64	.55	.43	.35	.29				
H_α/H_β	.93	1.21	1.30	1.50	1.83	2.2	2.6				

1. Die erzwungenen Emissionsübergänge sind berücksichtigt worden, denn ihre Beiträge zu den Emissionsüberschüssen $Q_{[3,2]}$, $Q_{[4,2]}$ selbst werden beträchtlich, falls $q \leq 1$. (Vgl. S. 115).

2) *Fall* $\zeta_1 \ll 1$. In diesem Falle werden $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ mittels (28.2), (27.4), (27.3) für gegebene Werte von $\bar{\tau}_{1,2}$ q berechnet. Da aber solche Rechnungen praktisch kompliziert sind, haben wir umgekehrt ζ_2, ζ_3, \dots und q für gegebene Werte von $\bar{\tau}_{1,2}$ und ζ_1 berechnet, nämlich, ζ_2, ζ_3, \dots aus (27.4), (27.3) und q aus (28.2); dabei $S_{i,i+1}$ nach den sukzessiven Approximationen ermittelt. Die Ergebnisse stehen in Tabelle VII, dabei $T=20,000^\circ$ und dementsprechend beinahe $\bar{\tau}_{1,2}=2,500$ (vgl. S. 129) angenommen, und die Energieniveaus bis zu $i=10$ in Betracht gezogen.

Tabelle VII

 $T=20,000^\circ \quad \bar{\tau}_{1,2}=2,500$

$\bar{\tau}_{2,3}$	q	ζ_0	n_3/n_2	ζ_3	n_4/n_3	H_α/H_β	$\bar{\tau}_{3,2}$	$\bar{\tau}_{4,3}$
40	3.0	.25	.067	.61	.23	3.2	.21	.38
20	6.2	.132	.035	.44	.17	4.7	.14	.39
10	13	.059	.019	.50	.19	5.1	.08	.51
5	26	.035	.009	.85	.32	4.5	.04	.93
2	62	.016	.004	1.67	.63	4.1	.02	1.85
1	120	.011	.003	2.4	.89	4.0		2.7
0.5	240	.009	.002	2.9	1.11	3.87		3.2
0	∞	.007	.002	3.62	1.36	3.85		4.0

Die Werte der Grösse $\bar{\tau}_{i+1,i}$ sind nach ihrer Definition (26.3) mittels der hier ermittelten Werte von $S_{i,i+1}$ berechnet worden. Die Zahlen in den letzten beiden Spalten in Tabelle VII zeigen, dass, wenn q abnimmt, sich $\bar{\tau}_{i+1,i}$ allmählich den in Tabelle II gegebenen Werten nähert, die wir für ziemlich kleine q vorausgesetzt haben, und dass, bei den Temperaturen niedriger als $19,600^\circ$, die Annäherungslösungen in dem vorhergehenden Paragraphen nicht mehr für grössere q als eins angenommen werden kann.

3) *Fall* $q \rightarrow \infty$. Die allgemeine Zyklusgleichung läuft auf die von Gillié hinaus. Da aber die Lösungsmethode ganz anderes als die von Cillié ist, so wird es auch interessant sein, die beiden Resultaten hier zu vergleichen: nämlich

Relativintensitäten in Energie.

$T=20,000^\circ$	H_α	H_β	H_γ
Cillié { I	2.91	1.00	0.46
{ II	2.88	1.00	0.48
Kurihara	2.85	1.00	0.48

In I und II hat Cillié die Energieniveaus bis zu $i=7$ bzw. $i=14$ in Betracht gezogen. Unser Resultat steht mit den Fällen von Cillié in Übereinstimmung und insbesondere schön mit dem Fall II.

4) Fall $\xi \rightarrow 0$. Die Relativintensitäten der Balmeremissionen sind aus

$$\frac{Q_{[j,2]}}{Q_{[4,2]}} = \frac{\tilde{\omega}_{j,2} n_j}{\tilde{\omega}_{4,2} n_4} \cdot \frac{1 - \frac{n_4}{4n_2}}{1 - \frac{2^2 n_j}{j^2 n_2}}, \quad \text{wegen (13.1), (13.5),}$$

berechnet worden, dabei n_3/n_i durch (24.5) bestimmt worden sind. Das Resultat ist folgendermassen:

Tabelle VIII

	i	2	3	4	5
20,000°	n_i/n_{i-1}	0.0052	0.61	0.94	1.0
	ζ_{i-1}	0.043	2.3	2.5	2.2
		$H_\alpha=0.90$	$H_\beta=1.00$	$H_\gamma=0.85$	
50,000°	n_i/n_{i-1}	0.13	1.0	1.1	1.1
	ζ_{i-1}	1.0	3.9	3.0	2.4
		$H_\alpha=0.87$	$H_\beta=1.00$	$H_\gamma=0.69$	

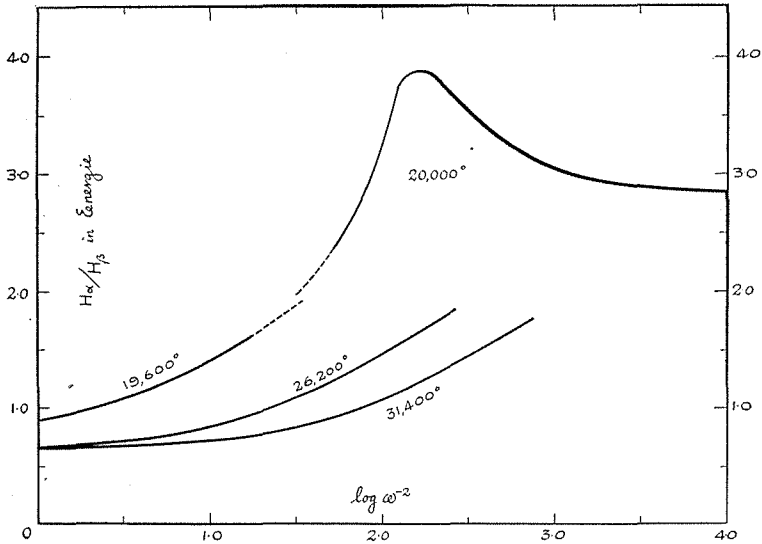
Die obigen Ergebnisse für H_α/H_β sind in Abb. 4 veranschaulicht. Hier ist die Relativintensität nicht in Quanten, sondern vielmehr in Energie ausgedrückt (das kann leicht dadurch getan werden, dass man H_α/H_β und H_γ/H_β mit 0.741 bzw. 1.12..... multipliziert). Die Geschwindigkeit ist vorläufig als 100 km/sec angenommen.

Unsere numerischen Ergebnisse sind im allgemeinen gültig, solange man T und q als unabhängige Variablen betrachtet. Wenn man aber ω^2 als das Argument einführen will, damit man sie mit den Beobachtungen vergleichen kann, so kann man nicht umhin einige Annahmen in bezug auf die Gashülle zu machen, um q und ω^2 in eine bestimmten Beziehung zu bringen. Was den Sternradius sowie die Geschwindigkeit anbetrifft, kann man freilich durch (31.1), (30.4) mittels der Werte von q_0 in Tabelle III passende Verbesserungen machen.

§ 35. *Diskussionen.* Die Grenze $q \rightarrow 0$ ist besonders bemerkenswert, weil, wie die Tabelle VIII zeigt, H_α , im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fällen, schwächer als H_β ist. H_α/H_β nimmt mit q zu und zwar um so stärker, je niedriger die Temperatur ist, nimmt aber allmäh-

lich wieder ab, wenn q über einen gewissen Wert wächst, um sich letzten Endes einem $\xi \rightarrow \xi_0$ entsprechenden Wert asymptotisch zu nähern. (Vgl. Abb. 4).

Abb. 4



Diese Verhältnisse lassen sich wohl dadurch erklären, dass das Elektron im 4-Zustande zu dem Emissionsüberschuss entweder durch den $4 \rightarrow 3$ oder durch den $4 \rightarrow 2$ Übergang beizutragen vermag, dass dagegen das Elektron im 3-Zustande es nur durch den einzigen Übergang $3 \rightarrow 2^1$ tut: Da die Anzahlen der von oben zu diesen beiden Zustände übergehenden Elektronen sind grössenordnungsmässig zu A_{1n_0} bzw. A_{3n_0} gleich sind, darf man das Verhältnis $\frac{Q_{[4,2]} + Q_{[4,3]}}{Q_{[3,2]}}$ beinahe als eine

Konstante unabhängig von q ansehen. Das Verhältnis $Q_{[4,2]}/Q_{[3,2]}$, oder H_{β}/H_{α} , nimmt also zu oder ab, je nachdem die $4 \rightarrow 2$ Übergänge häufiger als die $4 \rightarrow 3$ stattfinden oder umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit für die ersteren Übergänge wird durch

$$A_{1,2} \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{2,4}}}{\bar{\tau}_{2,4}} \Bigg/ \left\{ A_{1,2} \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{2,4}}}{\bar{\tau}_{2,4}} + A_{1,3} \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{3,4}}}{\bar{\tau}_{3,4}} \right\}$$

gegeben. Diese Wahrscheinlichkeit, von $q=0$ an zuerst allmählich abnehmend, erreicht einen minimalen Wert, nimmt dann wieder zu,

1. Der Einfachheit halber sind die Übergänge $4 \rightarrow 1$ und $3 \rightarrow 1$ wegen der Kompensierung der entgegengesetzten Vorgänge ausser acht gelassen worden.

um endlich einem Grenzwert $A_{4,2}/A_{4,2} + A_{4,3}$ nahezukommen, denn $\bar{\tau}_{3,4}$ wird durch die Änderung von q am empfindlichsten beeinflusst. Das Verhältnis H_{β}/H_{α} hat einen Minimumwert und konvergiert gegen eine bestimmte Grenze. Auf diese Weise ist der oben erwähnte Verlauf von H_{α}/H_{β} erklärt worden.

Es ist hier wohl interessant zu bemerken, dass zwei Werte des Verdünnungsfaktors ($4\omega^{-2}$) für einen und denselben Wert von der Relativintensität H_{α}/H_{β} entsprechen, wenn er grösser als der *Cillié*sche Wert ist. Das muss bei der Untersuchung von B_e -Sternen vorsichtig berücksichtigt werden; man kann z. B. nicht vorschnell der Gashülle einen grossen Verdünnungsfaktor zuschreiben, wenn ihr Spektrum etwa solches Dekrement der Balmeremissionen, wie das *Cillié*sche, zeigt.

Wenn sich die Gashülle bei den B_e -Sternen im Bewegungszustande befindet, und wenn sie für die Balmerlinien ziemlich undurchsichtig ist, so ist es aus Abb. 3, 4 sehr naheliegend, dass man bei den B_e -Sternen eher Verdünnungsfaktor ≤ 400 ($\omega^{-2} \leq 100$) und Dichte $\geq 10^{-14}$ deshalb annehmen müsste, weil diese Sterne, wie man unten sehen wird, meistens relative Intensitäten kleiner als bei *Cillié* zeigen. Diese Abschätzung des Verdünnungsfaktors ist viel kleiner als heute von den meisten Forschern angenommen wird; es war jedoch der Fall bei Nova Herculis im Jahr 1934.

§ 36. Nova Herculis wurde am 13. Dezember 1934 entdeckt. Gerade nach dem Lichtausbruch war H_{α}/H_{β} ausserordentlich klein, vergrösserte sich aber nachher allmählich. Diese allmähliche Vergrösserung bedeutet nichts anderes als eine kräftige Bestätigung unserer Theorie. Nach den Beobachtungen von E. G. Williams,¹ Greaves und Martin² beträgt H_{α}/H_{β} im Mittel 1.59 in Energie oder 2.15 in Quanten in der Periode von der Entdeckung bis 18.8 Dez. Die *Cillié*sche Theorie gibt dagegen 2.88 bzw. 3.89 für $T=20,000^{\circ}$. Dieser beobachtete Wert entspricht aber einem sehr kleinen Verdünnungsfaktor. Wenn man, um weiter zu sehen, vorläufig das *Williamss*che Modell annimmt, so erhält man $\omega^{-2}=29$ im Mittel für sechs innere Schalen, von der äussersten abgesehen.³

1. M. N. 97 (1937) 612.

2. M. N. 96 (1936) 425.

3. Mit $H_{\alpha}/H_{\beta}=2.15$, $V=330$ km/sec und $\omega^{-2}=29$ gerechnet, wird die Temperatur dieses Sternes etwa $23,000^{\circ}$, während seine Farbtemperatur nach Beobachtungen $11,000^{\circ}$ ist. Der grosse Unterschied dieser beiden wird wohl auf die Tatsache zurückgeführt, dass die Strahlung im Ultraviolett aussergewöhnlich stark im Vergleich mit dem *Plancks*chen Gesetz ist.

§ 37. In bezug auf die B_e -Sterne haben wir aus den Beobachtungsangaben von O. Mohler¹ und B. G. Karpov² die folgenden :

H_α/H_β in Quanten			
	γ Cas	ψ Per	B_e -Sterne
Mohler	2.3	3.4	2.79 (11)
Karpov	3.6	4.3	3.90 (12)
Mittel	3.0	3.9	3.35 (23)

Der Unterschied der Ergebnisse der beiden Forscher wird vielleicht auf den verschiedenen Behandlungsweisen der Beobachtungen beruhen. γ Cas und ψ Per sind die stärkste Emissionen zeigenden Sterne; sie besitzen nach Mohler gleiche Temperatur $18,700^\circ$, so dass man annäherungsweise aus der Kurve für $T=19,600^\circ$ in Abb. 4 erhält

für	γ Cas	ψ Per	B_e -Sterne (23)
ω^{-2}	42	79	56.

Wenn man eine noch niedrigere Temperatur annimmt, so werden diese Werte etwas verkleinert; wenn man dagegen eine Geschwindigkeit kleiner als 100 km/sec wählt, so werden sie vergrößert.

§ 38. Die obigen Ergebnisse betreffs Nova Herculis sowie der B_e -Sterne scheint unsere in § 35 abgeschätzten Grössenordnungen zu bestätigen

$$\omega^{-2} \leq 100, \quad \rho \geq 10^{-14}. \quad \dots\dots\dots(38.1)$$

Von ganz anderem Standpunkte aus haben O. Struve und P. Swings³ den Verdünnungsfaktor als 400 und die Dichte als 2.5×10^{-13} abgeschätzt, was guter Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen steht. Es ist auch bemerkenswert, dass die dabei von Struve und Swings selbst bemerkte Schwierigkeit bei unserer Theorie beseitigt worden ist; sie sagen nämlich: „this density is not unreasonable, as it is similar to that of the solar chromosphere. A more serious difficulty arises from the fact that in a nebula of this density the temperature may not be equal to that of the photosphere. Whether or not the proximity of the nebula to a B star insures the equality of these temperatures cannot be definitely stated.....“ Wir haben bis jetzt die Gleichheit dieser beiden Temperaturen stillschweigend angenommen. Das wird aber in unserer Theorie erlaubt; denn das Strahlungsisonisationsgleichgewicht

1. Pub. Obs. Mich. **5** (1934) 43.
 2. L. O. B. **16** (1934) 159.
 3. Ap. J. **75** (1932) 161.

ist hauptsächlich durch die Sterntemperatur beherrscht, und durch die Elektronentemperatur nur in geringem Grade und zwar mittelbar durch Einfangkoeffizient A_i beeinflusst (vgl. S. 115). In der Tat hat die Herabsetzung der Elektronentemperatur von $20,000^\circ$ zu $10,000^\circ$ nur eine Ionisationsänderung von 35% zur Folge.

§ 39. Es mag bedeutungsvoll sein, an dieser letzten Stelle, zur Anregung durch Elektronenstöße und Metastabilität des Zustandes, die wir bis jetzt ausser acht gelassen haben, ein paar Bemerkungen zu geben.

1) Um den Beitrag der Anregung durch Elektronenstöße zum Strahlungsionisationsgleichgewicht abzuschätzen, wollen wir die Anzahl solcher Anregungen $1 \rightarrow 2$, die am häufigsten stattfinden, mit der des Elektroneneinfangens im 2-Zustand vergleichen. Es sei γ_s das Verhältnis dieser beiden Fälle, so hat man

$$\gamma_s = \frac{\pi \sigma^2 C_e' n_e' n_1}{A_2 n_0} = \frac{\pi \sigma^2 C_e'}{A_2 / n_0} \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{n_e'}{n_e}$$

wobei man mit σ den Radius der scheinbaren Zielscheibe und mit C_e' und n_e' die mittlere Geschwindigkeit bzw. die Zahl derjenigen Elektronen bezeichnet, dessen kinetische Energie sich der Anregung $1 \rightarrow 2$ benügt.

Mit $\frac{A_2}{n_0} = 3.7 \times 10^{-14}$, $\frac{n_1}{n_0} = 1.7 \times 10^{-19} \cdot n_e \omega^{-2}$, $\frac{n_e'}{n_e} = 0.05$ und $\pi \sigma^2 = 10^{-16}$ ¹ erhält man für $T = 31,400^\circ$

$$\gamma_s = 2.5 \times 10^{-15} \times n_e \omega^{-2}.$$

Da nach (30.3), (30.4) $n_e \omega^{-2} = C \omega^{-\frac{1}{2}}$ ($C = 1.5 \times 10^{12}$ für $31,400^\circ$) ist, so folgt

$$\gamma_s = 3.8 \times 10^{-3} \times \omega^{-\frac{1}{2}}. \dots\dots\dots(39.1)$$

Der Grund für die Vernachlässigung der Anregung durch Elektronenstöße bei den *Be*-Sternen ist wohl darin zu sehen, dass aus (39.1) $\gamma_s < 0.04$ nach (38.1) folgt.

2) *Metastabiler Zustand 2s*. Wir fassen der Einfachheit halber nur die ionisierten und die Atome in vier Zuständen, nämlich 1, 2s, 2p, 3, ins Auge. Vernachlässigt man weiter sowohl die Ionisationsvorgänge von den 2s, 2p, 3-Zuständen als auch den Emissionsüberschuss $Q_{[3,1]}$, so erhält man

1. S. Miyamoto, die Abhandlung wird in diesem Memoiren veröffentlicht werden.

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{[3, 2p]} + Q_{[3, 2s]} &= A_3 n_0 \\
 Q_{[2p, 1]} &= A_{2p} n_0 + Q_{[3, 2p]} \\
 0 &= A_{2s} n_0 + Q_{[3, 2s]} \\
 Q_{[2p, 1]} &= \frac{B_1 J_1}{4\pi} n_1 - A_1 n_0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39.2)$$

Hieraus folgt sogleich

$$Q_{[3, 2p]} - Q_{[3, 2s]} = \frac{2A_{2s} + A_3}{A_3} \cdot \left\{ Q_{[3, 2p]} + Q_{[3, 2s]} \right\} \dots\dots\dots(39.3)$$

Nun ist es leicht zu beweisen, dass der Emissionsüberschuss in diesem Fall durch die folgenden Formeln gegeben wird (vgl. §§ 2, 9, 10, 12, 13):

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{[3, 2p]} &= n_3 A_{3, 2} \left(\frac{A_{3, 2p}}{A_{3, 2}} - \frac{\bar{\tau}_{2p, 3}}{\bar{\tau}_{2, 3}} \right) \\
 &\quad + \frac{\bar{\tau}_{2p, 3}}{\bar{\tau}_{2, 3}} \cdot \frac{n_3 A_{3, 2}}{\bar{\tau}_{2, 3}} (1 - e^{-\bar{\tau}_{2, 3}}) \\
 Q_{[3, 2s]} &= n_3 A_{3, 2} \left(\frac{A_{3, 2s}}{A_{3, 2}} - \frac{\bar{\tau}_{2s, 3}}{\bar{\tau}_{2, 3}} \right) \\
 &\quad + \frac{\bar{\tau}_{2s, 3}}{\bar{\tau}_{2, 3}} \cdot \frac{n_3 A_{3, 2}}{\bar{\tau}_{2, 3}} (1 - e^{-\bar{\tau}_{2, 3}})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39.4)$$

$$A_{3, 2} = A_{3, 2s} + A_{3, 2p}, \quad \bar{\tau}_{2, 3} = \bar{\tau}_{2s, 3} + \bar{\tau}_{2p, 3}, \quad \dots\dots\dots(39.5)$$

wo $\bar{\tau}_{2s, 3}$ und $\bar{\tau}_{2p, 3}$ die optischen Gesamtlängen für die 3→2-Strahlung und zwar 2s bzw. 2p-Atome bedeuten.

Wenn man (39.4) in (39.3) einsetzt, so ergibt sich sogleich

$$\begin{aligned}
 &\frac{\bar{\tau}_{2s, 3} - \bar{\tau}_{2p, 3}}{\bar{\tau}_{2, 3}} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{2, 3}}}{\bar{\tau}_{2, 3}} \right\} \\
 &= \frac{2A_{2s} + A_3}{A_3} \cdot \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_{2, 3}}}{\bar{\tau}_{2, 3}} - \frac{A_{3, 2p} - A_{3, 2s}}{A_{3, 2}}; \dots\dots\dots(39.6)
 \end{aligned}$$

insbesondere,

$$\frac{\bar{\tau}_{2s, 3} - \bar{\tau}_{2p, 3}}{\bar{\tau}_{2, 3}} = \frac{A_{3, 2s} - A_{3, 2p}}{A_{3, 2}}, \quad \text{falls } \bar{\tau}_{2, 3} \gg 1 \text{ ist,} \dots\dots\dots(39.7)$$

$$\bar{\tau}_{2s, 3} - \bar{\tau}_{2p, 3} \sim 1, \quad \text{falls } \bar{\tau}_{2, 3} \text{ unbedeutend ist.} \dots\dots\dots(39.8)$$

Diese Resultate bedeuten, dass die optische Gesamtlänge für die dem Übergange zwischen dem metastabilen Zustand 2s und dem 3 entsprechende Strahlung der Grössenordnung nach zu der für dieselbe Strah-

lung bezüglich des $2p$ Zustandes gleich ist, selbst wenn man die vollständige Metastabilität des $2s$ Zustandes annimmt. Wenn man also die durch Elektronenstöße zu verursachenden Übergangsvorgänge $2p \rightleftharpoons 2s$ berücksichtigt, die in der Tat nach S. Miyamoto (*loc. cit.*) etwa 100 mal so häufig als die ähnlichen Übergänge $1 \rightleftharpoons 2$ stattfinden, so ist es desto naheliegender, dass die metastabilen Zustände keine wesentliche Rolle spielen.

Zusammenfassung.

I. Im ersten Teil ist eine Betrachtung über den Transport der Strahlungsenergie mit einer bestimmten Eigenfrequenz ($\nu_j = \nu_0$) des Atoms in der Gashülle eines B_e -Sternes gemacht. Die Methode und die Manipulation bestehen wesentlich in der Verallgemeinerung der Theorie in unserer früheren Arbeit (Z. f. Ap. 13 (1937) 89); man entwickelt nämlich in bezug auf das „effektive Zentrum“ die Ortsfunktion in eine Reihe von $\zeta = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}$.

1) Ein Begriff „optische Umgebung um einen Punkt“ wird in § 1 eingeführt, deren Betrag durch die „optische Gesamtlänge“ definiert wird (§ 5). Die Grenzfläche der optischen Umgebung lässt sich durch eine quadratische Gleichung darstellen. Der Betrag des Radiusvektors eines Punktes auf der Grenzfläche ist zu der Quadratwurzel der optischen Gesamtlänge in seiner Richtung proportional und der Mittelwert der optische Gesamtlänge ist proportional zu $\frac{1}{3} \text{div} b$ (7.11).

2) Der Emissionsüberschuss sowie der Strahlungsdruck werden mittels der physikalischen Grössen in dem betreffenden Punkt in einfache Ausdrücke gebracht (§§ 9–12).

3) In §§ 14–17 werden die von dem Zentralstern aus direkt kommenden Strahlungen betrachtet. Die mittleren Intensitäten (J_i) der sog. Ultraviolettstrahlungen und die Absorptions- (a_i) sowie die Übergangskoeffizienten (B_i) für J_i werden in ihrer Abhängigkeit von der effektiven Temperatur (T) in Abb. 2 veranschaulicht. Einige Bemerkungen zum „Strahlungsionisationsgleichgewicht“ sind auch gemacht (§ 18).

4) Eine Zusammenstellung der Formeln im ersten Teil steht in § 13.

II. Wir betrachten im zweiten Teil das Strahlungsionisationsgleichgewicht im allgemeinen.

1) Die Bedingung für solches Gleichgewicht (die allgemeine

Zyklusgleichung) wird mit Hilfe des Ausdrucks für den Emissionsüberschuss formuliert. ((19.3), (19.4), (13.5), (13.5a)).

2) Um den physikalischen Zustand der Gashülle einfach zu charakterisieren, macht man von zwei Parametern ξ , q Gebrauch, wobei ξ und q dem Prozentsatz der Quantenverwandlungen von der Ultraviolettstrahlung zur L_α -Strahlung bzw. der Durchsichtigkeit der Gashülle für die Balmerlinien massgebend sind. Sie werden durch (23.6) miteinander verbunden, und zwar derart, dass $\xi \rightarrow 0$ und $\xi \rightarrow \xi_0$ je als $q \rightarrow 0$ und $q \rightarrow \infty$. Hier entspricht die Grenze $\xi \rightarrow 0$ der unendlich grossen Dichte, $\xi \rightarrow \xi_0$ dem unendlich grossen Verdünnungsfaktor.

3) Die Schlusserfolge der Theorie sind folgendermassen:

i) Die Ionisationsvorgänge finden häufiger vom Grundzustand aus als von allen übrigen Zuständen aus statt; die Intensität J_i ($i \geq 2$) ist infolgedessen überall in der Gashülle beinahe konstant (§ 20).

ii) In § 22 wird eine von W. S. Adams und H. N. Russell gefundene Tatsache theoretisch aufrechterhalten, dass sich die Materie der Sternatmosphäre angenähert in thermodynamischem Gleichgewicht befindet, vom Standpunkt des Ionisationszustandes aus gesehen, obgleich das nicht der Fall ist, hinsichtlich der Atomenverteilung in Energieniveaus.

4) Bei dem Grenzfall $q \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow \xi_0$) reduzieren sich unsere allgemeinen Zyklusgleichungen für $i \geq 3$ zu den *Cilliéschen*, während sie, für die beiden Fälle $i = 1, 2$, zusammen die *Zanstrasche* Rekombinationstheorie darstellen. Sie verhalten sich dagegen bei dem Grenzfall $q \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$) ganz anderes.

5) Um die Zahl der Atome n_i im i -Zustand für die Zwischenwerte von q aus den allgemeinen Zyklusgleichungen zu ermitteln, führt man die Quantitäten $\bar{r}_{i+1, i}$ und $S_{i, i+1}$ ein, je nachdem q klein oder gross ist. Die Werte von $\bar{r}_{i+1, i}$ lassen sich vorher annäherungsweise aber doch allgemein bestimmen (Tabelle II), während die von $S_{i, i+1}$ für jeden Wert von q von vornherein berechnet werden muss.

III. Im dritten Teile werden einige numerischen Betrachtungen gemacht.

1) Erstens wird die Abhängigkeit des Parameters q von den durchschnittlichen Werten einiger physikalischen Grössen, wie Dichte, Temperatur, Verdünnungsfaktor, in der Gashülle klar gemacht (§ 30, Abb. 3).

2) Nächstens werden die Zyklusgleichungen für $i = 1, 2$ numerisch gelöst. Aus den Ergebnissen der Rechnungen können die folgenden hauptsächlichsten Schlüsse gezogen werden.

i) Die Gashülle der B_e -Sterne ist für die Balmerlinien ziemlich undurchsichtig, wenn ihr Verdünnungsfaktor ($4\omega^{-2}$) klein ist—grössenordnungsgemäss etwa bis zu 400; und die Durchsichtigkeit von ziemlich hohen Grade darf nur für seinen grossen Wert—etwa $\omega^{-2} \sim 10^4, 10^5$, den man heute anzunehmen pflegt,—ihr zugeschrieben werden (§ 31, Tabelle IV), so dass der Verdünnungsfaktor bei den B_e -Sternen kleiner als 400 sein muss (vgl. § 35).

ii) Die Atome vermögen die Energie der kontinuierlichen Strahlungen des Zentralsternes ausserhalb der Balmergrenze nur dann in die der Emissionslinien zu verwandeln, wenn der Verdünnungsfaktor kleiner als ein gewisser ganz kleiner Wert ist, der von der effektiven Temperatur des Zentralsternes bestimmt wird.

3) Um den Zusammenhang der relativen Intensitäten der Balmerlinien mit dem Verdünnungsfaktor zu sehen, werden die Zyklusgleichungen für einige Temperaturen nach n_i numerisch aufgelöst, indem man die ersten zehn Energieniveaus berücksichtigt.

i) Für einen hinreichend grossen Verdünnungsfaktor steht unser Resultat mit dem von Cillié in schöner Übereinstimmung, der die Energieniveaus bis zu $i=14$ in Betracht gezogen hat.

ii) Die relative Intensität H_α/H_β für den Grenzfall $q \rightarrow 0$ ist viel kleiner als für den Cillié betrachteten Fall $q \rightarrow \infty$. Sie nimmt mit q bis zu einem gewissen Wert zu und zwar um so stärker, je niedriger die Temperatur ist, und nimmt dann wieder allmählich ab, um letzten Endes einem $\xi \rightarrow \xi_0$ entsprechenden Wert (Cillié) asymptotisch sich zu nähern (§ 34, Tabelle VI, VII, VIII, Abb. 4).

4) Durch das Vergleichen unsere Resultate mit den Beobachtungsangaben bei den B_e -Sternen erhält man im Mittel $\omega^{-2} < 100$, $\rho \gtrsim 10^{-14}$, die mit den Abschätzungen von O. Struve und P. Swings in Grössenordnung übereinstimmt (§ 37).

5) In § 39 werden einige Bemerkungen zu dem Grund für die Vernachlässigung der Anregung durch Elektronenstösse und des metastabilen Zustands $2s$ gegeben.

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Toschima Araki für seine ständige Leitung bei der Ausführung dieser Arbeit und der Stiftung „Hattori-Hokokwai, Tokio“ für ihren Unterstützungsfonds meinen herzlichen Dank auszusprechen.