Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (I)

Par **Sikazô Kodama**

(Reçu en Avril 15. 1939)

Déjà en 1895, M. Borel a fondé la théorie des fonctions quasi-analytiques d'une variable. Il a recherché des fonctions qui ont en commun avec les fonctions analytiques la propriété fondamentale suivante : *Elles sont complètement déterminées dans tout leur domaine d'existence par la connaissance de leurs valeurs dans une portion de domaine si petite qu'elle soit.* Nous allons traiter ici une classe des fonctions $f(x,y)$ de deux variables x, y, indéfiniment dérivables dans un certain domaine$\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B \end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$|f^{(m+n)}(x,y)| \leqslant k^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A\,; & m=0, 1, 2, \ldots \\ b\leqslant y\leqslant B\,; & n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où $\{M_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ est une suite double donnée de nombres positifs et k une constante dépendant seulement du choix de chaque fonction $f(x,y)$. Pour abréger, nous désignerons cette classe par C_M.

Un problème extrêmement important posé par M. Hadamard en 1912, peut, dans ce cas où nous nous plaçons, s'énoncer de la manière suivante : *Quelles sont les conditions que doit remplir la suite double* $\{M_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ *pour que la classe C_M jouisse de la même propriété que la classe des fonctions analytiques, à savoir que les valeurs d'une fonction $f(x,y)$ de cette classe, et de ses dérivées partielles prenant en un point (x_0, y_0) dans le domaine* $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B \end{pmatrix}$ *d'existence déterminent cette fonction d'une manière unique.* Une telle classe sera dite *quasi-analytique*.

Nous allons dès maintenant donner l'extension du théorème de MM. Denjoy-Carleman répondant à cette question.

Je suis heureux de dédier ce mémoire en hommage à M. Tosizô Matumoto, Professeur de Mathématiques à l'Université de Kioto, au Maître à qui je dois de m'être orienté vers la quasi-analyse.

§ 1. Quelques propriétés des fonctions entières de deux variables

1. Soit $f(x,y)$, n'étant pas un polynome, une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe dans les deux plans entiers, de deux variables complexes

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2 \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

On peut développer cette fonction en une série double de Taylor :

$$(1.1) \qquad f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\, x^m y^n,$$

qui converge dans les x, y-plans entiers. En posant

$$C_{m,n} = |c_{m,n}|, \quad R = |x|, \quad r = |y|,$$

$$(1.2) \qquad F(R, r) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n}\, R^m r^n,$$

on a $|f(x, y)| \leqslant F(R, r)$ et

$$(1.3) \qquad \lim_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{C_{m,n}} = 0, \text{ c'est-à-dire } \lim_{m+n\to\infty} \frac{-\log C_{m,n}}{m+n} = +\infty.$$

Comme en prenant une paire de valeurs positives finies de R et r, on a

$$\lim_{m+n\to\infty} C_{m,n}\, R^m r^n = 0,$$

on peut constater immédiatement qu'à chaque paire de ces valeurs positives finies correspond, au moins, une paire d'entiers positifs λ et μ, telle que $C_{\lambda,\mu} R^\lambda r^\mu$ n'est inférieur à aucun autre terme $C_{m,n} R^m r^n$ $\begin{pmatrix} m \neq \lambda \\ n \neq \mu \end{pmatrix}$, dans l'expression (1.2). Désignons par $T(R, r)$ la valeur maximum d'un ou de plusieurs termes $C_{m,n} R^m r^n$ dans l'expression (1.2) lorsque m et n varient, pour une paire de valeurs positives finies de R et r, c'ést-à-dire

$$(1.4) \qquad T(R, r) = C_{\lambda,\mu} R^\lambda r^\mu = \max_{m,\, n \geq 0} C_{m,n} R^m r^n.$$

Si l'on considère dans un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, les points $P_{m,n}$ de coordonnées

$$x = m, \ y = n, \ z = G_{m,n} = -\log C_{m,n},$$

le terme maximum $T(R, r)$ pour $X = \log R$ et $Y = \log r$ correspond aux nombres entiers (non négatifs) λ, μ tels que

$$G_{m,n} \geqslant (m-\lambda)X + (n-\mu)Y + G_{\lambda,\mu} \qquad \begin{pmatrix} m \neq \lambda \\ n \neq \mu \end{pmatrix};$$

on voit donc que les points $P_{m,n}$ ne peuvent être au-dessous du plan

$$(1.5) \qquad z = xX + yY - Z,$$

où $\qquad Z = \log T(R, r) = \lambda X + \mu Y - G_{\lambda,\mu}.$

Par conséquent, lorsque X et Y prennent indépendamment les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, ces plans (1.5) enveloppent une surface polyhédrale convexe de Newton,[1] désignée par S, dont les sommets sont certains

---

1. Valiron: Sur un théorème de M. Hadamard, (Bull. des sci. math., série III, t. 47 (1923), pp. 177–192).

des points $P_{\lambda,\mu}$, tout point $P_{m,n}$ ne peut être au-dessous du plan de l'une des faces; les plans (1.5) coïncident avec une face de S, ou touchent la surface S suivant une arête, ou passent par un sommet en restant au-dessous de la surface S. D'après l'égalité (1.5), $Z=\log T(R, r)$ pour $X=\log R$, $Y=\log r$ est donné par le produit $d\sqrt{1+X^2+Y^2}$, où d est la distance changée de signe de l'origine au plan de contact de S dont les coefficients sont X, Y, -1. On voit donc que la donnée de la surface polyhédrale convexe S est équivalente à celle de la fonction $T(R, r)$. On voit aussi que la surface S est la même pour toutes les fonctions $F(R, r)$ pour lesquelles les nombres $G_{\lambda,\mu}$ des sommets de la surface S sont donnés, les autres nombres $G_{m,n}$ étant au moins égaux respectivement aux cotes $G'_{m,n}$ des points de la surface S.

Le logarithme du terme maximum, comme le fait M. Valiron avec M. Hadamard, peut être obtenu en prenant la polaire réciproque de la surface S par rapport au paraboloïde $x^2+y^2-2z=0$, ce qui donne dans un système d'axes OX, OY, OZ une nouvelle surface polyhédrale convexe $\sum$ ayant les propriétés suivantes: 1° La côte de la surface $\sum$ pour $X=\log R$, $Y=\log r$ est égale à $\log T(R, r)$; 2° De plus, quand l'angle polyhédrale en un sommet de S a p faces, la face correspondante de $\sum$ est un polygone ayant p côtés, et réciproquement.

2. En désignant par $\Phi(m, n)$ *le rang* du terme $C_{m,n} R^m r^n$ dans le schème suivant:

$$\begin{array}{llllll}
C_{0,0} & C_{1,0}R, & C_{2,0}R^2, & \dots\dots, & C_{m,0}R^m, & \dots\dots, \\
C_{0,1}r, & C_{1,1}Rr, & C_{2,1}R^2r, & \dots\dots, & C_{m,1}R^mr, & \dots\dots, \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, & \dots\dots & \dots\dots, \\
C_{0,n}r^n, & C_{1,n}Rr^n & C_{2,n}R^2r^n, & \dots\dots, & C_{m,n}R^mr^n, & \dots\dots, \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, & \dots\dots & \dots\dots,
\end{array}$$

et, en plus, en écrivant $N=m+n$, il est aisé de voir que

$$\Phi(m, n)=\frac{1}{2}\{(m+n)^2+3m+n+2\}, \qquad N=[\sqrt{2\Phi(m,n)}].$$

Prenons $\lambda(R, r)$ et $\mu(R, r)$ dans l'expression de $T(R, r)$ telles que $\Phi(\lambda, \mu)$ a la plus grande valeur, alors $N(R,r)=\lambda(R,r)+\mu(R,r)$ est discontinue sur certaines lignes correspondants aux projections orthogonales sur le plan xOy des arêtes de $\sum$.

On sait, d'après la figure géométrique de n° 1, que la fonction $T(R, r)$ est croissante par rapport à chaque variable. On peut aussi affirmer directement cette propriété de la définition même de la fonction $T(R,r)$. Prenons, en effet, par exemple, deux valeurs R_1, $R_2(>R_1)$ de R, r étant fixe mais arbitraire, et posons

$$T(R_1, r) = C_{\lambda_1, \mu_1} R_1^{\lambda_1} r^{\mu_1}, \quad T(R_2, r) = C_{\lambda_2, \mu_2} R_2^{\lambda_2} r^{\mu_2}.$$

Alors on a

$$C_{\lambda_1, \mu_1} R_1^{\lambda_1} r^{\mu_1} < C_{\lambda_1, \mu_1} R_2^{\lambda_1} r^{\mu_1} \leqslant C_{\lambda_2, \mu_2} R_2^{\lambda_2} r^{\mu_2},$$

ce qui donne

$$(2.1) \qquad T(R_1, r) < T(R_2, r) \qquad \left(\begin{matrix} R_1 < R_2 \\ r \text{ étant fixe mais arbitraire} \end{matrix}\right).$$

On peut donc tirer la relation suivante

$$\frac{C_{\lambda_1, \mu_1}}{C_{\lambda_2, \mu_2}} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{R_2}{r}\right)^{-\lambda_2} r^{N(R_1, r) - N(R_2, r)} < 1,$$

ce qui exprime que $N(R, r)$ est une fonction croissante de R (pour $r > r_0$). On voit de même que $N(R, r)$ est une fonction croissante de r (pour $R > R_0$).

Posons maintenant

$$T = T(R, r), \quad T_\nu = T(R_\nu, r_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

où $\quad 0 < \min R_\nu < R < \max R_\nu, \quad 0 < \min r_\nu < r < \max r_\nu,$

et soit
$$\begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & 1 \\ X_2, & Y_2, & 1 \\ X_3, & Y_3, & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad \text{où } X_\nu = \log R_\nu, \quad Y_\nu = \log r_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Alors on peut déterminer deux nombres p, q tels qu'on ait

$$R_1^p r_1^q T_1 = R_2^p r_2^q T_2 = R_3^p r_3^q T_3.$$

Or toutes les déterminations de la fonction correspondante de x, y sont définies et régulières à l'intérieur de

$$\min R_\nu \leqslant |x| \leqslant \max R_\nu, \quad \min r_\nu \leqslant |y| \leqslant \max r_\nu;$$

et par suite cette fonction atteint son maximum de valeur absolue sur les frontières, c'est-à-dire

$$R^p r^q T \leqslant R_1^p r_1^q T_1 = R_2^p r_2^q T_2 = R_3^p r_3^q T_3.$$

On en déduit un résultat de la forme

$$\begin{vmatrix} \log T & X & Y & 1 \\ \log T_1 & X_1 & Y_1 & 1 \\ \log T_2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ \log T_3 & X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} \leqslant 0, \qquad \text{où} \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

ce qui prouve que la fonction $\log T(R, r)$ est convexe, donc continue, par rapport à X, Y.

Supposons ensuite que R et r varient de telles façons que $r = kR$, c'est-à-dire que $X = Y + k'$, où k' est un paramètre dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Si nous remarquons que $N(R, kR)$ est le rang du terme maximum dans la fonction entière $F(R, kR)$ d'une variable R, il est bien connu que $N(R, kR)$ est une fonction croissante, tendant vers l'infini avec R, et possèdant des points discontinus de première espèce, dont le nombre est fini dans l'intervalle fini. On a donc

$$d \log T(R, kR) = N(R, kR)dX.$$

Il en résulte que, si l'on suppose pour simplifier $F(0, 0) = 1$, on a

$$\log T(R, r) = \int_0^R N(\xi, k\xi) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{2.2}$$

qui est valable pourvu que R soit positif. Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\log T(R, r) = \int_0^1 N(Rt, rt) \frac{dt}{t}, \tag{2.3}$$

qui est valable quels que soient R et r (non négatifs).

On voit donc que $\log T(R, r)$ est une fonction continue, croissante et tendant vers l'infini avec R, r.

§ 2. Fonctions de deux variables, indéfiniment dérivables

3. Nous allons utiliser dans la suite une proposition suivante de M. Borel[1]: *Toute fonction des deux variables x, y, ayant des dérivées partielles de tous les ordres sous les conditions $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $-1 \leqslant y \leqslant +1$ peut être mise sous la forme*

$$\begin{aligned} f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ & (A_{m,n} y^n + B_{m,n} \cos \pi ny + C_{m,n} \sin \pi ny) x^m \\ & + (A'_{m,n} y^n + B'_{m,n} \cos \pi ny + C'_{m,n} \sin \pi ny) \cos \pi mx \\ & + (A''_{m,n} y^n + B''_{m,n} \cos \pi ny + C''_{m,n} \sin \pi ny) \sin \pi mx \Big\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

les constantes $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $A'_{m,n}$, $B'_{m,n}$, $C'_{m,n}$, $A''_{m,n}$, $B''_{m,n}$, $C''_{m,n}$ étant telles que l'on ait, pour toutes les valeurs de p et de q,

$$|A_{m,n}| < \frac{K_{p,q}}{m^p n^q}, \quad |B_{m,n}| < \frac{K_{p,q}}{m^p n^q}, \quad \ldots, \quad |C''_{m,n}| < \frac{K_{p,q}}{m^p n^q}, \tag{3.2}$$

les nombres $K_{p,q}$ ne dépendant pas de m ni de n.

On sait, d'ailleurs, que toutes les dérivées partielles, de tous les ordres, de cette fonction $f(x, y)$ sont données par les séries doubles obtenues par les différentiations successives terme-à-terme de cette série; et que les séries doubles, ainsi obtenues, convergent uniformément dans $\begin{pmatrix} -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ -1 \leqslant y \leqslant +1 \end{pmatrix}$.

§ 3. Intégrale de Poisson

4. Soit $f(x, y)$ une fonction intégrable au sens de M. Lebesgue dans

1. E. Borel: Sur les fonctions de deux variables réelles (Annales de l'École Normale Sup., III, t. 13, (1896), pp. 79-94); E. Borel: Leçons sur les fonctions de variables réelles (1905), pp. 66-74.

le carré $\begin{pmatrix} 0, & 2\pi \\ 0, & 2\pi \end{pmatrix}$, et soit $0 \leqslant R < 1$, $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$; posons

$$f(R, r;\ \theta, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) \Re \left[\left\{ \frac{1}{1 - Re^{i(\alpha - \theta)}} - \frac{1}{2} \right\} \times \left\{ \frac{1}{1 - re^{i(\beta - \phi)}} - \frac{1}{2} \right\} \right] d\alpha d\beta.$$

En remarquant, d'une part

$$\Re \left\{ \frac{1}{1 - Re^{i(\alpha - \theta)}} - \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - R^2}{1 - 2R\cos(\alpha - \theta) + R^2},$$

où la quantité $1 - 2R\cos(\alpha - \theta) + R^2$ représente le carré de la distance entre les points $e^{i\alpha}$ et $Re^{i\theta}$, on voit que l'expression $f(R, r;\ \theta, \phi)$ peut être mise sous la forme, qui s'appelle *intégrale de Poisson*

$$(4.1) \qquad f(R, r;\ \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) \frac{1 - R^2}{1 - 2R\cos(\alpha - \theta) + R^2} \times \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\beta - \phi) + r^2} d\alpha d\beta.$$

Or on a, d'autre part

$$\Re \left\{ \frac{1}{1 - Re^{i(\alpha - \theta)}} \right\} = \Re \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{im(\alpha - \theta)} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} R^m \cos m(\alpha - \theta),$$

qui est, poun $0 \leqslant R < 1$ fixe, uniformément convergente par rapport à α ; d'où l'on tire

$$\Re \left[\left\{ \frac{1}{1 - Re^{i(\alpha - \theta)}} - \frac{1}{2} \right\} \left\{ \frac{1}{1 - re^{i(\beta - \phi)}} - \frac{1}{2} \right\} \right] \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant R < 1 \\ 0 \leqslant r < 1 \end{pmatrix}$$
$$= \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} R^m \cos m(\alpha - \theta) \right\} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\beta - \phi) \right\}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} R^m \cos m(\alpha - \theta) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\beta - \phi) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R^m r^n \cos m(\alpha - \theta) \cos n(\beta - \phi).$$

En posant

$$(4.2) \qquad \begin{aligned} f(x, y) \sim \frac{a_{00}}{4} &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mx + b_{m0} \sin mx) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos ny + c_{0n} \sin ny) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny \\ &\qquad + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny), \end{aligned}$$

on peut donc écrire l'intégrale de Poisson sous la forme

$$f(R, r;\ \theta, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} R^m \cos m(\alpha - \theta) \right\}$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\beta-\phi)\right\} d\alpha d\beta$$

$$\begin{aligned}
(4.3)\qquad &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} R^m \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha,\beta)\cos m(\alpha-\theta)\,d\alpha d\beta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha,\beta)\cos n(\beta-\phi)\,d\alpha d\beta \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} R^m r^n \\
&\qquad\qquad \times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha,\beta)\cos m(\alpha-\theta)\cos n(\beta-\phi)\,d\alpha d\beta \\
&= \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} R^m (a_{m0}\cos mx + b_{m0}\sin mx) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_{0n}\cos ny + c_{0n}\sin ny) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} R^m r^n (a_{mn}\cos mx\cos ny + b_{mn}\sin mx\cos ny \\
&\qquad\qquad + c_{mn}\cos mx\sin ny + d_{mn}\sin mx\sin ny).
\end{aligned}$$

Considérons d'abord, en posant $v=re^{i\phi}$, les séries entières :

$$\frac{1}{2}a_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn} - i\,c_{mn})v^n \qquad (m=0, 1, 2, \dots),$$

$$\frac{1}{2}b_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty}(b_{mn} - i d_{mn})v^n \qquad (m=1, 2, 3, \dots);$$

comme

$$\lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} c_{mn} = 0 \qquad (m=0, 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{mn} = \lim_{n\to\infty} d_{mn} = 0 \qquad (m=1, 2, 3, \dots),$$

le rayon de convergence de chaque série est au moins égal à un. Elles représentent donc dans le cercle $|v|<1$ des fonctions holomorphes $A_m(v)$ et $B_m(v)$, et l'on a

$$\begin{aligned}
\Re\{A_m(v)\} &= \frac{1}{2}a_{m0} + \Re\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn} - ic_{mn})r^n e^{in\phi}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}a_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_{mn}\cos n\phi + c_{mn}\sin n\phi) \\
&= A_m \qquad\qquad (m=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Re\{B_m(v)\} &= \frac{1}{2}b_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (b_{mn}\cos n\phi + d_{mn}\sin n\phi) \\
&= B_m \qquad\qquad (m=1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

Considérons ensuite, en posant $u=Re^{i\theta}$, la série entière

$$(4.4) \qquad \frac{1}{2}A_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m-iB_m)u^m\,;$$

comme

$$\lim_{m\to\infty} A_m=\lim_{m\to\infty} B_m=0,$$

le rayon de convergence de cette série est aussi au moins égal à un. Elle représente donc dans le cercle $|u|<1$ une fonction holomorphe de u. Si le rayon de convergence de la série (4.4) est supérieur à un, c'est-à-dire si $\overline{\lim_{m\to\infty}}(A_m^2+B_m^2)^{\frac{1}{2m}}<1$, alors la série

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta)=f(1,\ 1\ ;\ \theta,\phi)$$

converge uniformément par papport à chacune des variables θ, ϕ, et l'on a, en désignant par $F(u, v)$ la fonction holomorphe dans les cercles $|u|<1$, $|v|<1$,

$$\begin{aligned}\Re\{F(Re^{i\theta},\ re^{i\phi})\}\\ =\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\{F(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})\}\frac{1-R^2}{1-2R\cos(\alpha-\theta)+R^2}\\ \times\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\beta-\phi)+r^2}d\alpha d\beta.\end{aligned}$$

Si, en particulier, $F(u, v)=1$, on a

$$\begin{aligned}1=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-R^2}{1-2R\cos(\alpha-\theta)+R^2}\\ \times\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\beta-\phi)+r^2}d\alpha d\beta.\end{aligned}$$

5. Si $g(u, v)$ est une fonction holomorphe dans les cercles fermés $|u|\leqslant 1$, $|v|\leqslant 1$, et ne s'y annulant pas, alors chaque détermination de la fonction $\log g(u, v)$ est une fonction holomorphe dans ces cercles, et l'on a

$$\begin{aligned}\log|g(Re^{i\theta},\ re^{i\phi})|\\ =\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})|\frac{1-R^2}{1-2R\cos(\alpha-\theta)+R^2}\\ \times\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\beta-\phi)+r^2}d\alpha d\beta.\end{aligned}$$

En posant, en particulier, $R=r=0$, on a

$$(5.1) \qquad \log|g(0,0)|=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta.$$

Si, au contraire, $g(u,v)$ est une fonction holomorphe dans les cercles fermés $|u|\leqslant 1$, $|v|\leqslant 1$, et s'annulant dans ces cercles ouverts, sans toute-fois s'annuler aux origines, alors on peut, en désignant par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$ les zéros de la fonction $g(u, v)$ par rapport à ses variables u, v, et par $h_1, h_2, \ldots, h_p, k_1, k_2, \ldots, k_q$ leurs degrés respectifs, opérer sur la fonction

$$g(u, v)(u-\xi_1)^{-h_1}(u-\xi_2)^{-h_2}\ldots\ldots(u-\xi_p)^{-h_p}$$
$$\times(v-\eta_1)^{-k_1}(v-\eta_2)^{-k_2}\ldots(v-\eta_q)^{-k_q},$$

qui ne s'annule pas dans les cercles fermés, comme nous venons d'opérer sur la fonction $g(u, v)$; et par suite, on a

$$\begin{aligned}\log|g(0,0)|-\sum_{m=1}^{p}h_m\log|\xi_m|-\sum_{n=1}^{q}k_n\log|\eta_n|\\ =\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\log|g(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|-\sum_{m=1}^{p}h_m\log|e^{i\alpha}-\xi_m|\\ -\sum_{n=1}^{q}k_n\log|e^{i\beta}-\eta_n|\}d\alpha d\beta\\ =\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|d\alpha d\beta\,;\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\log|g(0,0)|<\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|d\alpha d\beta, \tag{5.2}$$

parce qu'on a

$$\log|\xi_m|<0\quad(m=1, 2, \ldots, p)\quad\text{et}\quad\log|\eta_n|<0\quad(n=1, 2, \ldots, q).$$

Dans le cas où nous nous plaçons, on a supposé implicitement que la fonction $g(u, v)$ ne s'annule pas sur les cercles $|u|=1$, $|v|=1$ eux mêmes. Dans le cas contraire, on pourrait d'abord appliquer l'inégalité précédente (5.2) à la fonction $g(Re^{i\alpha}, re^{i\beta})$, où $R(0<R<1)$ et $r(0<r<1)$ sont tous les deux suffisamment voisins de un pour que cette fonction ne s'annule pour aucune valeur de α, β ; et l'on passera ensuite à la limite, en faisant tendre R, r vers un.

On voit ainsi, lorsque la fonction $g(u, v)$ est holomorphe dans les cercles $|u|\leqslant 1$, $|v|\leqslant 1$, qu'on a

$$\log|g(0,0)|\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|d\alpha d\beta. \tag{5.3}$$

On peut de même affirmer que

$$\log|g(0,0)|\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(Re^{i\alpha}, re^{i\beta})|d\alpha d\beta \tag{5.4}$$
$$\begin{pmatrix}0<R<1\\0<r<1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0<R\leqslant 1\\0<r<1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0<R<1\\0<r\leqslant 1\end{pmatrix}.$$

§ 4. Une proposition auxiliaire

6. Considérons une fonction $f(x, y)$ des deux variables complexes

$$x=x_1+ix_2=Re^{i\theta},\quad y=y_1+iy_2=re^{i\phi}.$$

Nous supposons que cette fonction est holomorphe et bornée à droite de chaque axe imaginaire des x, y-plans, et qu'elle n'est pas identiquement nulle dans ces demi-plans.

Soit C_x un cercle situé dans le demi-plan de x, de rayon ρ tangent à l'axe imaginaire à l'origine, et soit C_y un cercle situé dans le demi-plan de y, de rayon σ tangent à l'axe imaginaire à l'origine. On prend un point P sur l'axe réel, dans le cercle C_x, d'affixe positive a $(a<\rho)$; et un point Q sur l'axe réel, dans le cercle C_y, d'affixe positive b $(b<\sigma)$. Soit P' le point conjugué de P, il sera d'affixe négative $-a'$ et situé hors du cercle C_x. Soit Q' le point conjugué de Q, il sera d'affixe négative $-b'$ et situé hors du cercle C_y. Par conséquent, le cercle C_x est le lieu du point M d'affixe x dont le rapport des distances à P et à P' est une constante $a:a'$, et le cercle C_y est le lieu du point N d'affixe y dont le rapport des distances à Q et à Q' est une constante $b:b'$. Si l'on désigne donc par α l'angle des vecteurs PM et $P'M$, et par β celui des vecteurs QN et $Q'N$ (chacun compté positif dans le sens direct), on a, sur les cercles C_x, C_y,

$$\frac{x-a}{x+a'}=\frac{a}{a'}e^{i\alpha},\qquad \frac{y-b}{y+b'}=\frac{b}{b'}e^{i\beta};$$

d'où l'on tire facilement

$$\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x+a'}=id\alpha,\qquad \frac{dy}{y-b}-\frac{dy}{y+b'}=id\beta.$$

Considérons maintenant l'intégrale double effectuée sur C_x, C_y:

$$(6.1)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_x}\int_{C_y}\log f(x,y)\left(\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x+a'}\right)\times\left(\frac{dy}{y-b}-\frac{dy}{y+b'}\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_x}\int_{C_y}\log f(x,y)d\alpha d\beta.$$

Si $f(x,y)$ n'a pas de zéro dans les cercles C_x, C_y, la fonction $\log f(x,y)$ est holomorphe; d'où l'on voit, en remarquant les situations des points P, P', Q, Q', que l'intégrale double (6.1) est égale à $\log f(a, b)$, en vertu du théorème classique de Cauchy. On a donc, pour la partie réelle de (6.1),

$$(6.2)\qquad \log|f(a,b)|=\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_x}\int_{C_y}\log|f(x,y)|\,d\alpha d\beta,$$

qui est une autre forme de l'intégrale de Poisson.

Dans le cas où $f(x,y)$ s'annule dans les intérieurs des cercles C_x, C_y, on désigne par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$ les zéros de $f(x,y)$, par $h_1, h_2, \ldots, h_p, k_1, k_2, \ldots, k_q$ leurs degrés respectifs, et par $L_1^{(x)}, L_2^{(x)}, \ldots, L_p^{(x)}, L_1^{(y)}, L_2^{(y)}, \ldots, L_q^{(y)}$ les lacets correspondants. L'un d'eux, par exemple, $L_m^{(x)}$ se compose d'une coupure joignant l'origine au point ξ_m et d'un cercle infiniment petit autour de ce point; et le contour du lacet dans le sens direct se constitue par le parcours de la coupure sur le bord droit de l'origine au point ξ_m, par le tour du cercle dans le sens direct et par le retour á l'origine sur l'autre bord de la coupure. Si l'on pose

$$f(x, y)=(x-\xi_m)^{h_m}(y-\eta_n)^{k_n} f_{m,n}(x, y) \qquad \begin{pmatrix} m=1, 2, \ldots, p \\ n=1, 2, \ldots, q \end{pmatrix},$$

on a évidemment $f_{m,n}(\xi_m, \eta_n)\neq 0$, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}(L_{m,n})&=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_m^{(x)}}\int_{L_n^{(y)}}\log f(x, y) \\ &\qquad\qquad \times\left(\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x+a'}\right)\left(\frac{dy}{y-b}-\frac{dy}{y+b'}\right) \\ &=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_m^{(x)}}\int_{L_n^{(y)}}\{h_m\log(x-\xi_m)+k_n\log(y-\eta_n) \\ &\qquad +\log f_{m,n}(x, y)\}\left(\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x+a'}\right)\left(\frac{dy}{y-b}-\frac{dy}{y+b'}\right).\end{aligned}$$

Pour abréger, nous désignerons cette relation par $(L_{m,n})=J_{m,n}^{(1)}+J_{m,n}^{(2)}+J_{m,n}^{(3)}$. Il est d'abord aisé de voir que $J_{m,n}^{(3)}=0$. On voit ensuite que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_m^{(x)}}\log(x-\xi_m)\left(\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x+a'}\right) \\ &\quad=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\odot}+\int_{\xi_m}^{0} 2\pi i\right)\left(\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x+a'}\right) \\ &\quad=\log\left(\frac{\xi_m+a'}{\xi_m-a} : \frac{a'}{-a}\right),\end{aligned}$$

et si l'on désigne par ρ_m et ρ'_m les distances du point ξ_m aux points P et P', alors la partie réelle de cette intégrale s'écrit comme

$$\log\left(\frac{\rho'_m}{\rho_m} : \frac{a'}{a}\right),$$

qui est positive puisque $\dfrac{\rho'_m}{\rho_m} : \dfrac{a'}{a}>1$ au point ξ_m à l'intérieur du cercle C_x. On en déduit que $J_{m,n}^{(1)}>0$, et de même que $J_{m,n}^{(2)}>0$. On a donc

$$(L_{m,n})>0 \qquad \begin{pmatrix} m=1, 2, \ldots, p \\ n=1, 2, \ldots, q \end{pmatrix},$$

et par suite

$$\log|f(a, b)|<\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_x}\int_{C_y}\log|f(x, y)|\,d\alpha d\beta.$$

On voit ainsi qu'à la seule condition que $f(x, y)$ soit holomorphe dans les cercles C_x, C_y, on a

$$(6.3) \qquad \log|f(a,b)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{C_x}\int_{C_y}\log|f(x,y)|\,d\alpha d\beta.$$

Si l'on parcourt les cercles C_x, C_y dans les sens directs, les angles α, β varient tous les deux de $-\pi$ à π dans les mêmes sens, car $d\alpha$ et $d\beta$ ne peuvent pas s'annuler. On peut donc prendre α, β comme variables des intégrations dans (6.3), et l'écaire

$$(6.4) \qquad \log|f(a,b)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(x,y)|\,d\alpha d\beta,$$

l'intégration se faisant sur les cercles C_x, C_y.

7. En supposant $f(x,y)$ holomorphe et bornée à droite de chaque axe imaginaire des x, y-plans, nous allons effectuer sur l'intégrale double (6.4) un passage à la limite qui remplacera les cercles C_x, C_y par les axes imaginaires. Dans ce cas, il existe un nombre positif A tel que l'on ait, dans ces demi-plans, $\log|f(x,y)| < A$, et alors on a, quelque petits que soient δ, ε positifs,

$$\log|f(a,b)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_{-\pi}^{-\delta}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int_{-\pi}^{-\delta}\int_{\varepsilon}^{\pi}+\int_{\delta}^{\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\right.$$
$$\left.+\int_{\delta}^{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\right\}\log|f(x,y)|\,d\alpha d\beta + B,$$

où B est une quantité positive tendant vers zéro avec δ, ε.

Si l'on fait croître indéfiniment les rayons ρ, σ des cercles C_x, C_y, en laissant fixes les points P, Q, donc a, b invariables, alors a' tend vers a, et b' vers b. Or l'angle α est plus petit en valeur absolue que δ sur le cercle C_x sauf sur un arc C'_x de longueur bornée ayant l'origine pour milieu ; et à la limite, pour $\rho \to \infty$, cet arc C'_x devient un segment de l'axe imaginaire du x-plan de centre l'origine et de longueur $2l_x$. On peut aussi procéder pour le cercle C_y, en introduisant un segment de l'axe imaginaire du y-plan de longueur $2l_y$. La formule précédente subsiste à la limite, l'intégration double se faisant sur les axes imaginaires. Faisons tendre δ, ε vers zéro, alors l_x, l_y tendent vers ∞. On a donc

$$(7.1) \qquad \log|f(a,b)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(x,y)|\,d\alpha d\beta,$$

l'intégration se faisant sur les axes imaginaires.

Si l'on prend les modules des $x=Re^{i\theta}$, $y=re^{i\phi}$ comme variables d'intégration, on a, x et y parcourant les axes imaginaires,

$$d\alpha = -\frac{2a}{a^2+R^2}dR, \quad d\beta = -\frac{2b}{b^2+r^2}dr\,;$$

d'où l'on tire facilement

$$(7.2) \qquad \log|f(a,b)| \leqslant \frac{ab}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\log|f|\,\frac{dR}{a^2+R^2}\,\frac{dr}{b^2+r^2},$$

où $f = f(Re^{\frac{\pi}{2}i}, re^{\frac{\pi}{2}i})f(Re^{\frac{\pi}{2}i}, re^{-\frac{\pi}{2}i})f(Re^{-\frac{\pi}{2}i}, re^{\frac{\pi}{2}i})f(Re^{-\frac{\pi}{2}i}, re^{-\frac{\pi}{2}i})$.

On voit ainsi qu'à la condition que $f(x, y)$ soit entière et bornée à droite de chaque axe imaginaire des x, y-plans, et non identiquement nulle, la valeur de $\log|f(a, b)|$, a et b étant deux nombres positifs quelconques, est bornée supérieurement.

8. Supposons que la fonction $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions précédentes, tend vers zéro quand x ou y s'éloigne indéfiniment sur l'axe imaginaire. On peut alors assigner une constante positive A et une fonction positive $\Gamma(R, r)$, non décroissante et tendant vers l'infini avec chacune des variables R, r, telles que l'on ait, sur les axes imaginaires

$$|f(x, y)| < e^{A-\Gamma(R, r)},$$

c'est-à-dire

$$\log|f(x, y)| < A - \Gamma(R, r).$$

Si l'on applique la formule (7.2) à la fonction $e^{-A}f(x, y)$, on voit que

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Gamma(R, r)\frac{dR}{a^2+R^2}\,\frac{dr}{b^2+r^2} \leqslant k\{A - \log|f(a, b)|\},$$

où k est une constante finie. Il en résulte que l'intégrale double du premier membre doit être convergente. Or cette intégrale double converge ou diverge en même temps que

$$\int_{R_0}^\infty\int_{r_0}^\infty \Gamma(R, r)\frac{dR}{R^2}\,\frac{dr}{r^2}, \tag{8.1}$$

où R_0 et r_0 sont des constantes positives finies.

On a donc la proposition suivante :

Soit $f(x, y)$ une fonction entière et bornée dans les demi-plans des x, y situés à droite des axes imaginaires, et soit, de plus, $f(x, y)$ une fonction tendant vers zéro quand x, y tendent vers l'infini sur ces axes de manière à vérifier la condition suivante :

$$|f(x, y)| < e^{A-\Gamma(R, r)},$$

où A est une constante positive, et $\Gamma(R, r)$ une fonction positive, non décroissante et tendant vers l'infini avec chacune des variables R, r. Dans ce cas, l'intégrale double (8.1) ne peut être divergente à moins que la fonction $f(x, y)$ ne soit identiquement nulle.

§ 5. Problème de M. Watson

9. *Soit respectivement C_x, C_y les cercles $|x-1|=1$, $|y-1|=1$ dans les x, y-plans ; quelles conditions faut-il imposer à la suite double $\{M_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ pour que du fait qu'une fonction $f(x, y)$, holomorphe aux intérieurs de C_x, C_y, vérifie les inégalités :*

$$(9.1)\qquad |f(x,y)|<M_{m,n}|x|^m|y|^n \qquad \left(\begin{matrix}|x-1|<1\ ;\ m=0,1,2,\ldots\\ |y-1|<1\ ;\ n=0,1,2,\ldots\end{matrix}\right),$$

résulte que $f(x,y)$ est identiquement nulle.

C'est *le problème de M. Watson.* On peut répondre, avec M. Carleman, à ce problème de la manière suivante :

Désignons $\max\limits_{m,n\geq 1} \dfrac{R^m r^n}{M_{m,n}}\left(\begin{matrix}|x|=R\\ |y|=r\end{matrix}\right)$ *par* $T(R,r)$. *C'est une fonction définie pour toutes les valeurs positives de deux variables* R, r (*elle peut être égale à* $+\infty$) ; *alors la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $f(x,y)$ *satisfaisant aux inégalités* (9.1) *est identiquement nulle, est que l'intégrale double*

$$(9.2)\qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R,r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

soit divergente.

Nous allons démontrer ce théorème en suivant la méthode employée par M. Mandelbrojt à la fonction d'une variable.[1]

Tout d'abord, supposons que les quantités $\sqrt[m+n]{M_{m,n}}$ ne tendent pas vers l'infini avec $m+n$; alors il existe une suite partielle infinie $\{M_{m_\nu,n_\nu}\}$, telle que

$$\sqrt[m_\nu+n_\nu]{M_{m_\nu,n_\nu}}<A<\infty \qquad (\nu=1,2,3,\ldots),$$

et par suite

$$T(R,r)>\left(\frac{R}{A}\right)^{m_\nu}\left(\frac{r}{A}\right)^{n_\nu} \qquad (\nu=1,2,3,\ldots),$$

d'où l'on tire, pour $R, r>A$,

$$T(R,r)\to\infty \qquad \text{avec } \nu,$$

et

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R,r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$
$$>\int_1^\infty\int_1^\infty\left\{m_\nu\log\frac{R}{A}+n_\nu\log\frac{r}{A}\right\}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}>k(m_\nu+n_\nu),$$

où k est un nombre positif. On voit donc que l'intégrale double (9.2) diverge ; or les inégalités (9.1) deviennent pour $m=m_\nu$, $n=n_\nu$ ($\nu=1,2,3,\ldots$),

$$|f(x,y)|<(A|x|)^{m_\nu}(A|y|)^{n_\nu},$$

d'où l'on conclut, en posant $|x|<\dfrac{1}{A}$, $|y|<\dfrac{1}{A}$, que la fonction $f(x,y)$ est identiquement nulle. On voit donc, dans ce cas, que le théorème est évident.

---

1. S. Mandelbrojt: Série de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions (1935), p. 52 et sui.

On peut ensuite supposer que

$$\lim_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{M_{m,n}} = \infty.$$

On voit alors que la fonction $T(R, r)$ peut être considérée comme le plus grand terme d'une fonction entière $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^m r^n}{M_{m,n}}$ de deux variables R, r, et que $T(R, r)$ est par conséquent une fonction continue tendant vers l'infini, en croissant, avec R, r.

10. Nous allons d'abord démontrer que si la fonction $f(x, y)$, satisfaisant aux inégalités (9.1), n'est pas identiquement nulle, alors l'intégrale double (9.2) converge.

Dans le cas où nous nous plaçons, on peut trouver immédiatement des nombres ξ, η tels que l'on ait $f(\xi, \eta)\neq 0$, et tels que, lorsque

$$|x-\xi|\leqslant\xi<1, \qquad |y-\eta|\leqslant\eta<1,$$

on ait

$$|f(x, y)|<1.$$

Or, on sait, en vertu de la formule (5.4), que si la fonction $g(x, y)$ est holomorphe dans les cercles $|x|\leqslant R_1<1$, $|y|\leqslant r_1<1$, et si la valeur de $g(0, 0)$ n'est pas nulle, alors on a

$$\log|g(0,0)|\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(R_1e^{i\alpha}, r_1e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta\,;$$

d'où l'on tire, en posant $g(x, y)=f\{\xi(1+x),\ \eta(1+y)\}$,

$$\log|f(\xi, \eta)|\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\xi+\xi R_1e^{i\alpha}, \eta+\eta r_1e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta\,;$$

et comme $\log|f(\xi+\xi R_1e^{i\alpha}, \eta+\eta r_1e^{i\beta})|<0$, on peut écrire, quels que soient les nombres positifs ε_1, ε_2, δ_1, δ_2, plus petits que π,

$$(10.1)\qquad \log|f(\xi, \eta)|\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_0^{\pi-\varepsilon_1}\int_0^{\pi-\delta_1}+\int_0^{\pi-\varepsilon_1}\int_{\pi+\delta_2}^{2\pi}+\int_{\pi+\varepsilon_2}^{2\pi}\int_0^{\pi-\delta_1}\right.$$
$$\left.+\int_{\pi+\varepsilon_2}^{2\pi}\int_{\pi+\delta_2}^{2\pi}\right\}\log|f(\xi+\xi R_1e^{i\alpha}, \eta+\eta r_1e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta.$$

Remarquons d'une part que la fonction $f(x, y)$ est holomorphe lorsque

$$\begin{cases} x=\xi+\xi R_1e^{i\alpha}, & 0\leqslant R_1<1, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi-\varepsilon_1, \quad \pi+\varepsilon_2\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,\\ y=\eta+\eta r_1e^{i\beta}, & 0\leqslant r_1<1, \quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi-\delta_1, \quad \pi+\delta_2\leqslant\beta\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

et par conséquent que cette fonction ne s'annule qu'un nombre fini de fois pour les valeurs précisées de x, y. On voit alors que la fonction $\log f(x, y)$ ne possède qu'un nombre fini de singularités, toutes logarithmiques, et que les intégrales doubles du second membre de (10.1) existent encore lorsque $R_1, r_1=1$. On a donc

$$(10.2)\qquad \log|f(\xi, \eta)|\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_0^{\pi-\varepsilon_1}\int_0^{\pi-\delta_1}+\int_0^{\pi-\varepsilon_1}\int_{\pi+\delta_2}^{2\pi}+\int_{\pi+\varepsilon_2}^{2\pi}\int_0^{\pi-\delta_1}\right.$$

$$+\int_{\pi+\varepsilon_2}^{2\pi}\int_{\pi+\delta_2}^{2\pi}\Big\}\log|f(\xi+\xi e^{i\alpha}, \eta+\eta e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta.$$

Comme cette inégalité subsiste, quelles que soient les valeurs de ε_1, ε_2, δ_1, δ_2, on peut, en les tendant vers zéro, écrire

$$(10.3) \qquad \log|f(\xi, \eta)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\xi+\xi e^{i\alpha}, \eta+\eta e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta,$$

dont le second membre est négatif, en vertu de ce qu'on a dit. Or on a remarqué que $f(\xi, \eta)\neq 0$. Donc, l'intégrale double du second membre de (10.3) converge.

On a d'autre part, en vertu des inégalités (9.1),

$$|f(\xi+\xi e^{i\alpha}, \eta+\eta e^{i\beta})| < M_{m,n}(\xi|1+e^{i\alpha}|)^m(\eta|1+e^{i\beta}|)^n$$
$$= M_{m,n}\Big(2\xi\,\Big|\cos\frac{\alpha}{2}\Big|\Big)^m\Big(2\eta\,\Big|\cos\frac{\beta}{2}\Big|\Big)^n,$$

et, d'après la définition même de la fonction $T(R, r)$, on a

$$|f(\xi+\xi e^{i\alpha}, \eta+\eta e^{i\beta})| \leqslant \min_{m,n\geq 1} M_{m,n}\Big(2\xi\Big|\cos\frac{\alpha}{2}\Big|\Big)^m\Big(2\eta\Big|\cos\frac{\beta}{2}\Big|\Big)^n$$
$$= \frac{1}{T\left(\dfrac{1}{2\xi\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|}, \dfrac{1}{2\eta\left|\cos\dfrac{\beta}{2}\right|}\right)};$$

d'où l'on tire

$$\log T\left(\frac{1}{2\xi\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|}, \frac{1}{2\eta\left|\cos\dfrac{\beta}{2}\right|}\right) \leqslant -\log|f(\xi+\xi e^{i\alpha}, \eta+\eta e^{i\beta})|.$$

Or on sait que l'intégrale double du second membre de l'inégalité (10.3) converge. On en déduit que l'intégrale double

$$(10.4) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log T\left(\frac{1}{2\xi\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|}, \frac{1}{2\eta\left|\cos\dfrac{\beta}{2}\right|}\right)d\alpha d\beta$$
$$= 4\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\log T\left(\frac{1}{2\xi\cos\dfrac{\alpha}{2}}, \frac{1}{2\eta\cos\dfrac{\beta}{2}}\right)d\alpha d\beta$$

converge aussi. En posant

$$R = \frac{1}{2\xi\cos\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad r = \frac{1}{2\eta\cos\dfrac{\beta}{2}},$$

l'intégrale double du second membre de (10.4) devient

$$4\int_{\frac{1}{2\xi}}^{\infty}\int_{\frac{1}{2\eta}}^{\infty}\log T(R, r)\frac{R}{\sqrt{4\xi^2R^2-1}}\,\frac{r}{\sqrt{4\eta^2r^2-1}}\,\frac{dR}{R^2}\,\frac{dr}{r^2}.$$

Comme cette dernière intégrale double converge, l'intégrale double

$$(9.2) \qquad \int_1^\infty \int_1^\infty \log T(R, r) \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2}$$

converge aussi.

On voit donc que si l'intégrale double (9.2) diverge, et si les inégalités (9.1) ont lieu, alors la fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle. On voit aussi que l'intégrale double (10.4) converge ou diverge en même temps que l'intégrale double (9.2).

11. Supposons ensuite que l'intégrale double (9.2) converge. Nous allons démontrer qu'il existe une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans les cercles C_x, C_y, non identiquement nulle et vérifiant les inégalités (9.1).

Puisque, par hypothèse, l'intégrale double (9.2) converge, l'intégrale double (10.4) converge aussi, en vertu de ce qu'on a remarqué plus haut, et ceci quelles que soient les valeurs de ξ, η. Posons alors $\xi = \eta = 1$. En prenant $X = Re^{i\theta}$ $(R < 1)$, $Y = re^{i\phi} (r < 1)$, la convergence de

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}, \frac{1}{2\left|\cos\frac{\beta}{2}\right|} \right) d\alpha d\beta$$

entraine celle de l'intégrale double

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}, \frac{1}{2\left|\cos\frac{\beta}{2}\right|} \right)$$

$$\times \frac{1 - R^2}{1 - 2R\cos(\alpha - \theta) + R^2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\beta - \phi) + r^2} d\alpha d\beta$$

$$= F_1(X, Y),$$

qui est une fonction harmonique des points X, Y, c'est-à-dire une fonction égale à la partie réelle d'une fonction régulière de deux variables X, Y.

En posant $x = 1 + X$, $y = 1 + Y$, on voit que x est à l'intérieur du cercle C_x et que y est à l'intérieur du cercle C_y. Posons ensuite

$$f(x, y) = e^{F_2(x, y) + iF_3(x, y)},$$

où $F_2(x, y) = F_1(x - 1, y - 1) = F_1(X, Y)$, et où $F_3(x, y)$ est la fonction harmonique conjuguée de $F_2(x, y)$. En remarquant alors

$$\log|x| = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|1 + e^{i\alpha}| \frac{1 - R^2}{1 - 2R\cos(\alpha - \theta) + R^2}$$

$$\times \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\beta - \phi) + r^2} d\alpha d\beta,$$

$$\log|y| = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|1 + e^{i\beta}| \frac{1 - R^2}{1 - 2R\cos(\alpha - \theta) + R^2}$$

$$\times \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\beta-\phi)+r^2}d\alpha d\beta,$$

on peut écrire

$$\log\frac{|f(x,y)|}{|x|^m|y|^n}=\frac{-1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left\{(|1+e^{i\alpha}|)^m(|1+e^{i\beta}|)^n\right.$$
$$\left.\times T\left(\frac{1}{|1+e^{i\alpha}|},\ \frac{1}{|1+e^{i\beta}|}\right)\right\}\frac{1-R^2}{1-2R\cos(\alpha-\theta)+R^2}$$
$$\times\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\beta-\phi)+r^2}d\alpha d\beta.$$

Or on a, d'après la définition même de la fonction $T(R, r)$,

$$T\left(\frac{1}{|1+e^{i\alpha}|},\ \frac{1}{|1+e^{i\beta}|}\right)\geqslant\frac{1}{M_{m,n}}\left(\frac{1}{|1+e^{i\alpha}|}\right)^m\left(\frac{1}{|1+e^{i\beta}|}\right)^n,$$

d'où l'on tire

$$-\log\left\{(|1+e^{i\alpha}|)^m(|1+e^{i\beta}|)^n T\left(\frac{1}{|1+e^{i\alpha}|},\ \frac{1}{|1+e^{i\beta}|}\right)\right\}\leqslant\log M_{m,n}.$$

On en déduit

$$\log\frac{|f(x,y)|}{|x|^m|y|^n}\leqslant\log M_{m,n}\qquad\begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\ \dots\\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$|f(x,y)|\leqslant M_{m,n}|x|^m|y|^n\qquad\begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\ \dots\\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots\end{pmatrix}.$$

Ces relations ne sont que (9.1); et l'on sait d'ailleurs, en vertu de la manière même dont on a construit la fonction $f(x, y)$, c'est-à-dire

$$\log|f(x,y)|=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log T\left(\frac{1}{|1+e^{i\alpha}|},\ \frac{1}{|1+e^{i\beta}|}\right)$$
$$\times\frac{1-R^2}{1-2R\cos(\alpha-\theta)+R^2}\ \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\beta-\phi)+r^2}d\alpha d\beta,$$

qu'elle ne s'annule pas dans les cercles C_x, C_y.

Notre théorème énoncé au n°9 est ainsi complètement démontré.

On voit en plus que si l'intégrale double (9.2) converge, on peut construire la fonction $f(x, y)$, répondant à la question, c'est-à-dire holomorphe dans les cercles C_x, C_y, ne s'annulant pas dans ces cercles et satisfaisant aux inégalités (9.1).

12. Il est bien connu, en posant $\boldsymbol{x}=\frac{1}{x}$, $\boldsymbol{y}=\frac{1}{y}$, que lorsque x, y varient respectivement dans les cercles C_x, C_y, les variables $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ varient respectivement dans les demi-plans $\Re(\boldsymbol{x})>\frac{1}{2}$, $\Re(\boldsymbol{y})>\frac{1}{2}$. En écrivant alors

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(x,y),$$

on peut déduire le théorème suivant :

Si $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *est une fonction holomorphe dans les demi-plans* $\Re(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{2}$, $\Re(\boldsymbol{y}) > \frac{1}{2}$, *non identiquement nulle, et vérifiant les inégalités*

$$(12.1) \qquad |F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant \frac{M_{m,n}}{|\boldsymbol{x}|^m |\boldsymbol{y}|^n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

alors l'intégrale double (9.2) *converge. Réciproquement, si cette intégrale double* (9.2) *converge, alors on peut construire une fonction* $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *holomorphe dans les demi-plans* $\Re(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{2}$, $\Re(\boldsymbol{y}) > \frac{1}{2}$, *non identiquement nulle (et même ne s'annulant pas du tout lorsque* $\Re(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{2}$, $\Re(\boldsymbol{y}) > \frac{1}{2}$*), et satisfaisant aux conditions* (12.1).

§ 6. Transformation de Laplace

13. Considérons maintenant la transformation de Laplace dans le cas le plus simple, qui nous suffira pour ce qui suit.

Si $f(x, y)$ est une fonction continue et vérifiant l'inégalité :

$$|f(x, y)| < ke^{\lambda x + \mu y} \qquad (x, y \geqslant 0),$$

où k, λ et μ sont des constantes, il est aisé de voir que la fonction

$$(13.1) \qquad F(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux - vy} f(x, y) dx dy$$

est holomorphe pour $\Re(u) > \lambda$, $\Re(v) > \mu$. Cette fonction $F(u, v)$ s'appelle *la transformée de Laplace de* $f(x, y)$.

On peut démontrer le théorème suivant :

Si $F(u, v)$ *est une fonction holomorphe dans les demi-plans* $\Re(u) \geqslant \lambda$, $\Re(v) \geqslant \mu$, *et vérifiant l'inégalité*

$$(13.2) \qquad |F(u, v)| < k(|u|)^{-1-\delta_1}(|v|)^{-1-\delta_2} \qquad (\delta_1, \delta_2 > 0),$$

alors l'intégrale double

$$(13.3) \qquad f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{ux + vy} F(u, v) du dv$$

représente une fonction continue pour $x, y \geqslant 0$, *et lorsque* $\Re(u) > \lambda$, $\Re(v) > \mu$, *l'égalité suivante a lieu* :

$$(13.1) \qquad F(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux - vy} f(x, y) dx dy.$$

Désignons, en effet, par L_1 la courbe fermée composée du segment de la droite $\Re(u) = \lambda$ et de l'arc de circonférence (L_1) :

$$|u| = R, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg u \leqslant \frac{\pi}{2},$$

et par L_2 la courbe fermée composée du segment de la droite $\Re(v) = \mu$ et de l'arc de circonférence (L_2) :

$$|v|=r, \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant \arg v \leqslant \frac{\pi}{2};$$

et il est supposé que R et r peuvent tendre vers l'infini.

On a, d'après la formule classique de Cauchy, pour $\Re(u)>\lambda$, $\Re(v)>\mu$,

$$F(u, v)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{F(\xi, \eta)}{(\xi-u)(\eta-v)}d\xi d\eta;$$

or on a, par hypothèse

$$|F(u, v)|<k(|u|)^{-1-\delta_1}(|v|)^{-1-\delta_2} \qquad (\delta_1, \delta_2>0);$$

on en déduit, en supposant que $|\xi-u|>1$ et $|\eta-v|>1$,

$$\left|\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(L_1)}\int_{(L_2)}\frac{F(\xi, \eta)}{(\xi-u)(\eta-v)}d\xi d\eta\right|$$

$$<\frac{k}{4\pi^2}\int_{(L_1)}\int_{(L_2)}\frac{d|\xi|d|\eta|}{(|\xi|)^{1+\delta_1}|\xi-u|(|\eta|)^{1+\delta_2}|\eta-v|}$$

$$<\frac{k}{4\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Rr}{R^{1+\delta_1}r^{1+\delta_2}}d\alpha d\beta=\frac{k}{4R^{\delta_1}r^{\delta_2}},$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{Rr}$. On a donc

$$F(u, v)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{F(\xi, \eta)}{(u-\xi)(v-\eta)}d\xi d\eta.$$

Or on a, lorsque $\Re(u-\xi)>0$, $\Re(v-\eta)>0$,

$$\frac{1}{u-\xi}=\int_0^\infty e^{-(u-\xi)x}dx, \qquad \frac{1}{v-\eta}=\int_0^\infty e^{-(v-\eta)y}dy;$$

et par suite

$$F(u, v)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}F(\xi, \eta)$$
$$\times\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u-\xi)x-(v-\eta)y}dxdy\right\}d\xi d\eta.$$

En remarquant que la fonction

$$\phi(x, y;\ \xi, \eta)=F(\xi, \eta)e^{-(u-\xi)x-(v-\eta)y},$$

u et v étant fixes telles qu'on ait $\Re(u-\xi)>0$ et $\Re(v-\eta)>0$, est continue dans un domaine fini de (x, y, ξ, η), on a

$$\int_0^k\int_0^l dxdy\int_{\lambda-ip}^{\lambda+ip}\int_{\mu-iq}^{\mu+iq}\phi(x, y;\ \xi, \eta)d\xi d\eta$$
$$=\int_{\lambda-ip}^{\lambda+ip}\int_{\mu-iq}^{\mu+iq}d\xi d\eta\int_0^k\int_0^l\phi(x, y;\ \xi, \eta)dxdy.$$

Or il existe une constante finie A, telle qu'on ait dans le domaine $\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant k\\ 0\leqslant y\leqslant l\end{pmatrix}$,

$$|e^{-(u-\xi)x-(v-\eta)y}|<A;$$

d'où l'on tire

$$|\phi(x, y; \xi, \eta)| \leqslant \frac{B}{|\xi|^{1+\delta_1}\,|\eta|^{1+\delta_2}}$$

(B étant une constante finie), dont le second membre converge uniformément dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant k \\ 0 \leqslant y \leqslant l \end{pmatrix}$. Par conséquent

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} \Phi(x, y; p, q) = \lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} \int_{\lambda-ip}^{\lambda+ip}\int_{\mu-iq}^{\mu+iq} \phi(x, y; \xi, \eta)d\xi d\eta$$

converge aussi uniformément dans le même domaine, et

$$= \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \phi(x, y; \xi, \eta)d\xi d\eta;$$

qui est une fonction continue de x, y. En supposant donc p et q comme paramètres, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} \int_0^k\int_0^l \Phi(x, y; p, q)dxdy \\ &\quad = \int_0^k\int_0^l \lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} \Phi(x, y; p, q)dxdy \\ &\quad = \int_0^k\int_0^l dxdy \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \phi(x, y; \xi, \eta)d\xi d\eta. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\int_0^k\int_0^l dxdy \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \phi(x, y; \xi, \eta)d\xi d\eta \\ &\quad = \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} d\xi d\eta \int_0^k\int_0^l \phi(x, y; \xi, \eta)dxdy. \end{aligned}$$

On peut, d'ailleurs, détermine un nombre G par ε donné à l'avance, tel qu'on ait simultanément, pour $k, l \geqslant G$,

$$\left|\int_k^\infty\int_l^\infty \phi(x, y; \xi, \eta)dxdy\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\xi|^{1+\delta_1}\,|\eta|^{1+\delta_2}},$$

$$\left|\int_k^\infty\int_0^l \phi(x, y; \xi, \eta)dxdy\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\xi|^{1+\delta_1}\,|\eta|^{1+\delta_2}},$$

$$\left|\int_0^k\int_l^\infty \phi(x, y; \xi, \eta)dxdy\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\xi|^{1+\delta_1}\,|\eta|^{1+\delta_2}};$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^k\int_0^l dxdy \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \phi d\xi d\eta - \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} d\xi d\eta \int_0^\infty\int_0^\infty \phi dxdy\right| \\ &\quad \leqslant \varepsilon' \qquad (k, l \geqslant G). \end{aligned}$$

On voit donc que

$$\int_0^\infty\int_0^\infty dxdy \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \phi d\xi d\eta = \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} d\xi d\eta \int_0^\infty\int_0^\infty \phi dxdy;$$

et par conséquent

$$F(u, v)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux-vy}\left\{\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}F(\xi, \eta)e^{\xi x+\eta y}d\xi d\eta\right\}dxdy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux-vy}f(x, y)dxdy.$$

Notre théorème est ainsi démontré.

§ 7. Un Lemme

14. *Soit $\psi(x, y)$ une fonction indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{pmatrix}$, non identiquement nulle et vérifiant les conditions*

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\psi(x, y)}{\partial x^m\partial y^n}\right|\leqslant M_{m, n}\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\ ;\ m=0,\ 1,\ 2,\dots\\ 0\leqslant y\leqslant 1\ ;\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix},$$

$$\psi^{(m+n)}(0, 0)=0\qquad \begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\dots\\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix};$$

alors on peut construire une fonction $\varphi(x, y)$, non identiquement nulle, non négative et indéfiniment dérivable dans le même domaine, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\varphi^{(m+n)}(0, 0)=\varphi^{(m+n)}(0, 1)=\varphi^{(m+n)}(1, 0)$$

$$=\varphi^{(m+n)}(1, 1)=0\qquad \begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\dots\\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix},$$

$$\varphi(x, y)=\varphi(1-x,\ 1-y)\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{pmatrix},$$

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(x, y)}{\partial x^m\partial y^n}\right|<3\,2^{m+n}M_{m, n}\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\ ;\ m=0,\ 1,\ 2,\dots\\ 0\leqslant y\leqslant 1\ ;\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix}.$$

Posons d'abord

$$\psi_1(x, y)=\int_0^x du\int_0^y dv\int_0^u\int_0^v\psi(\tau, \rho)d\tau d\rho\ ;$$

on a évidemment

$$(14.1)\qquad \left|\frac{\partial^{m+n}\psi_1(x, y)}{\partial x^m\partial y^n}\right|<M'_{m, n}\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\ ;\ m=0,\ 1,\ 2,\dots\\ 0\leqslant y\leqslant 1\ ;\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix},$$

$$\psi_1^{(m+n)}(0, 0)=0\qquad \begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\dots\\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix},$$

où $M'_{m, n}=M_{m-2,\ n-2}$ pour $m, n\geqslant 2$.

Posons ensuite

$$\psi_2(x, y)=\psi_1\{4x(1-x),\ 4y(1-y)\}\ ;$$

il est aisé de voir que

$$\psi_2^{(m+n)}(0, 0)=\psi_2^{(m+n)}(0, 1)=\psi_2^{(m+n)}(1, 0)$$

$$=\psi_2^{(m+n)}(1, 1)=0\qquad \begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\dots\\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix},$$

$$\psi_2(x, y)=\psi_2(1-x,\ 1-y)\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant affirmer que la fonction $\psi_2(x, y)$ satisfait aussi aux condition suivantes :

$$(14.2) \qquad \left| \frac{\partial^{m+n}\psi_2(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \right| < 3.16^{m+n} M'_{m,n} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \ ; \ m=0, 1, 2, \dots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \ ; \ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose

$$X = X(x) = 4x(1-x), \quad Y = Y(y) = 4y(1-y),$$

alors on a

$$X(x+x_1) = X + X_1 = X + 4x_1(1-2x-x_1),$$
$$Y(y+y_1) = Y + Y_1 = Y + 4y_1(1-2y-y_1) ;$$

et l'égalité $\psi_2(x+x_1, y+y_1) = \psi_1(X+X_1, Y+Y_1)$ peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \frac{\psi_2^{(p+q)}(x, y)}{p!\ q!} x_1^p y_1^q + \text{reste } R_2$$
$$= \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \frac{\psi_1^{(p+q)}(X, Y)}{p!\ q!} X_1^p Y_1^q + \text{reste } R_1 ;$$

et l'on constate facilement que l'expression $\dfrac{\psi_2^{(m+n)}(x, y)}{m!\ n!}$ qui est le coefficient du terme $x_1^m y_1^n$ du premier membre de l'égalité dernière est égale à la somme des coefficients de $x_1^m y_1^n$ intervenant dans le second membre, lorsqu'on développe chaque terme $X_1^p Y_1^q$ en puissances de x_1, y_1 ; or $x_1^m y_1^n$ n'intervient dans $X_1^p Y_1^q$ que lorsque

$$\frac{m}{2} \leqslant p \leqslant m \quad \text{et} \quad \frac{n}{2} \leqslant q \leqslant n.$$

On voit, en remarquant $|1-2x| \leqslant 1$ et $|1-2y| \leqslant 1$ $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$, que les coefficients de différentes puissances de x_1, y_1 dans le développement de $X_1^p Y_1^q$ sont non supérieurs à ceux qui correspondent à la même puissance de x_1, y_1, dans le développement de l'expression $\{4x_1(1+x_1)\}^p\{4y_1(1+y_1)\}^q$. Or le coefficient de $x_1^m y_1^n$ dans ce dernier développement est égal à $4^{p+q} C_p^{m-p} C_q^{n-q}$. On voit par conséquent qu'en désignant par $\mathfrak{M}_{p,q}$ le maximum du module de $\psi_1^{(p+q)}(x, y)$ dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$, on a

$$(14.3) \qquad |\psi_2^{(m+n)}(x, y)| < m!\, n! \sum_{\frac{m}{2} \leq p \leq m,} \ \sum_{\frac{n}{2} \leq q \leq n} 4^{p+q} \mathfrak{M}_{p,q} \frac{C_p^{m-p}}{p!} \frac{C_q^{n-q}}{q!}$$
$$= \sum_{\frac{m}{2} \leq p \leq m,} \ \sum_{\frac{n}{2} \leq q \leq n} 4^{p+q} \mathfrak{M}_{p,q} \frac{m!\, n!}{(m-p)!(2p-m)!(n-q)!(2q-n)!}.$$

Or on a vu plus haut que

$$\psi_1^{(m+n)}(0, 0) = 0 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

et par suite, on a, par l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
&\psi_1^{(p+q)}(x, y) \qquad\qquad \begin{pmatrix} p<m \\ q<n \end{pmatrix} \\
&=\int_0^x \psi_1^{\{(p+1)+q\}}(\tau, y)d\tau+\psi_1^{(p+q)}(0, y) \\
&=\int_0^x (x-\tau)\psi_1^{\{(p+2)+q\}}(\tau, y)d\tau+\psi_1^{(p+q)}(0, y)+x\psi_1^{\{(p+1)+q\}}(0, y) \\
&=\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&=\frac{1}{(m-p-1)!}\int_0^x (x-\tau)^{m-p-1}\psi_1^{(m+q)}(\tau, y)d\tau \\
&\qquad\qquad +\sum_{s=0}^{m-p-1}\frac{x^s}{s!}\psi_1^{\{(p+s)+q\}}(0, y) \\
&=\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&=\frac{1}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!}\int_0^x\int_0^y (x-\tau)^{m-p-1}(y-\rho)^{n-q-1} \\
&\qquad\qquad \times\psi_1^{(m+n)}(\tau, \rho)d\tau d\rho \\
&\quad +\sum_{s=0}^{m-p-1}\frac{x^s}{s!}\psi_1^{\{(p+s)+q\}}(0, y)+\sum_{t=0}^{n-q-1}\frac{y^t}{t!}\psi_1^{\{p+(q+t)\}}(x, 0),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{M}_{p, q}<\frac{1+2^{m-p}+2^{n-q}}{(m-p)!\,(n-q)!}M'_{m, n} \qquad \begin{pmatrix} p<m \\ q<n \end{pmatrix}.$$

Introduisons ces inégalités dans la relation (14.3); on peut alors écrire l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&|\psi_2^{(m+n)}(x, y)| \\
&<M'_{m, n}\Bigg\{\Bigg(\sum_{\frac{m}{2}\le p\le m}\frac{4^p m!}{\{(m-p)!\}^2(2p-m)!}\Bigg)\Bigg(\sum_{\frac{n}{2}\le q\le n}\frac{4^q n!}{\{(n-q)!\}^2(2q-n)!}\Bigg) \\
&\quad +\Bigg(\sum_{\frac{m}{2}\le p\le m}\frac{2^{m+p} m!}{\{(m-p)!\}^2(2p-m)!}\Bigg)\Bigg(\sum_{\frac{n}{2}\le q\le n}\frac{4^q n!}{\{(n-q)!\}^2(2q-n)!}\Bigg) \\
&\quad +\Bigg(\sum_{\frac{m}{2}\le p\le m}\frac{4^p m!}{\{(m-p)!\}^2(2p-m)!}\Bigg)\Bigg(\sum_{\frac{n}{2}\le q\le n}\frac{2^{n+q} n!}{\{(n-q)!\}^2(2q-n)!}\Bigg)\Bigg\} \\
&=M'_{m, n}\Bigg\{\sum_{\frac{m}{2}\le p\le m}\left(4^p C_{2(m-p)}^{m-p} C_m^{2(m-p)}\right)\sum_{\frac{n}{2}\le q\le n}\left(4^q C_{2(n-q)}^{n-q} C_n^{2(n-q)}\right) \\
&\quad +\sum_{\frac{m}{2}\le p\le m}\left(2^{m+p} C_{2(m-p)}^{m-p} C_m^{2(m-p)}\right)\sum_{\frac{n}{2}\le q\le n}\left(4^q C_{2(n-q)}^{n-q} C_n^{2(n-q)}\right) \\
&\quad +\sum_{\frac{m}{2}\le p\le m}\left(4^p C_{2(m-p)}^{m-p} C_m^{2(m-p)}\right)\sum_{\frac{n}{2}\le q\le n}\left(2^{n+q} C_{2(n-q)}^{n-q} C_n^{2(n-q)}\right)\Bigg\} \\
&<M'_{m, n}(8^m\cdot 8^n+16^m\cdot 8^n+8^m\cdot 16^n),
\end{aligned}$$

et par suite

$$|\psi_2^{(m+n)}(x, y)|<3.16^{m+n}M'_{m, n} \qquad \begin{pmatrix} 0\leqslant x\leqslant 1\,;\ m=0, 1, 2, \dots \\ 0\leqslant y\leqslant 1\,;\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Les inégalités (14.2) sont ainsi démontrées.

15. Afin de trouver la fonction $\varphi(x, y)$ énoncée au début du dernier numéro, nous allons évaluer l'ordre de grandeur de $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}[\psi_2(x, y)]^2$.

Comme la fonction $\psi_2(x, y)$ est paire par rapport à chacune des variables, on peut poser cette fonction sous la forme

$$\psi_2(x, y)=\frac{1}{4}a_{00}+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}a_{\lambda 0}\cos 2\pi\lambda x+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}a_{0\mu}\cos 2\pi\mu y$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}a_{\lambda\mu}\cos 2\pi\lambda x\cos 2\pi\mu y$$
$$\begin{pmatrix} 0\leqslant x\leqslant 1\ ;\ \lambda=1, 2, 3,\dots \\ 0\leqslant y\leqslant 1\ ;\ \mu=1, 2, 3,\dots \end{pmatrix}.$$

Alors on a, d'une part,

$$\frac{\partial^p\psi_2}{\partial x^p}=\pm(2\pi)^p\left\{\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}a_{\lambda 0}\,\lambda^p\,\begin{matrix}\cos 2\pi\lambda x\\ \sin 2\pi\lambda x\end{matrix}\right.$$
$$\left.+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}a_{\lambda\mu}\lambda^p\,\begin{matrix}\cos 2\pi\lambda x\\ \sin 2\pi\lambda x\end{matrix}\,\cos 2\pi\mu y\right\}\qquad (p>0),$$
$$\frac{\partial^q\psi_2}{\partial y^q}=\pm(2\pi)^q\left\{\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}a_{0\mu}\,\mu^q\,\begin{matrix}\cos 2\pi\mu y\\ \sin 2\pi\mu y\end{matrix}\right.$$
$$\left.+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}a_{\lambda\mu}\,\mu^q\cos 2\pi\lambda x\,\begin{matrix}\cos 2\pi\mu y\\ \sin 2\pi\mu y\end{matrix}\right\}\qquad (q>0),$$
$$\frac{\partial^{p+q}\psi_2}{\partial x^p\partial y^q}=\pm(2\pi)^{p+q}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}a_{\lambda\mu}\,\lambda^p\mu^q\,\begin{matrix}\cos 2\pi\lambda x\cos 2\pi\mu y\\ \sin 2\pi\lambda x\ \sin 2\pi\mu y\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}p>0\\ q>0\end{pmatrix};$$

et d'autre part, quels que soient les entiers $\lambda, \mu>1$ donnés,

$$(2\pi\lambda)^p a_{\lambda 0}=\pm 2\int_0^1\psi_2^{(p+0)}(x, y)\,\begin{matrix}\cos 2\pi\lambda x\\ \sin 2\pi\lambda x\end{matrix}\,dx,$$
$$(2\pi\mu)^q a_{0\mu}=\pm 2\int_0^1\psi_2^{(0+q)}(x, y)\,\begin{matrix}\cos 2\pi\mu y\\ \sin 2\pi\mu y\end{matrix}\,dy,$$
$$(2\pi\lambda)^p(2\pi\mu)^q a_{\lambda\mu}=\pm 4\int_0^1\int_0^1\psi_2^{(p+q)}(x, y)\,\begin{matrix}\cos 2\pi\lambda x\cos 2\pi\mu y\\ \sin 2\pi\lambda x\ \sin 2\pi\mu y\end{matrix}\,dxdy\ ;$$

d'où l'on tire, en vertu de (14.2),

$$(2\pi\lambda)^p|a_{\lambda 0}|<6.16^p M'_{p,0},\qquad (2\pi\mu)^q|a_{0\mu}|<6.16^q M'_{0,q},$$
$$(2\pi\lambda)^p(2\pi\mu)^q|a_{\lambda\mu}|<12.16^{p+q}M'_{p,q}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}[\psi_2(x, y)]^2=\{[\psi_2(x, y)]^2\}^{(m+n)}$$
$$=\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}\psi_2^{(0+q)}\psi_2^{\{m+(n-q)\}}+\binom{m}{1}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}\psi_2^{(1+q)}\psi_2^{\{(m-1)+(n-q)\}}$$
$$+\dots\dots\dots+\binom{m}{m}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}\psi_2^{(m+q)}\psi_2^{\{0+(n-q)\}}$$

d'où l'on tire, en écrivant par K l'expression

$$\frac{1}{4}|a_{0,0}|+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}|a_{\lambda 0}|+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{0\mu}|+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|,$$

qui converge,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{m+n}}\left|\{[\psi_2(x,y)]^2\}^{(m+n)}\right| \\
&\quad<K\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^n\Big) \\
&\quad+\binom{n}{1}\Big(\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{0\mu}|\mu+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu\Big)\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^{n-1}\Big) \\
&\quad+\binom{n}{2}\Big(\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{0\mu}|\mu^2+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^2\Big)\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^{n-2}\Big)+\ldots \\
&\quad+\binom{n}{n}\Big(\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{0\mu}|\mu^n+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^n\Big) \\
&\qquad\times\Big(\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}|a_{\lambda 0}|\lambda^m+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\Big) \\
&\quad+\binom{m}{1}\Big\{\Big(\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}|a_{\lambda 0}|\lambda+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda\Big)\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-1}\mu^n\Big) \\
&\quad+\binom{n}{1}\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda\mu\Big)\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-1}\mu^{n-1}\Big) \\
(15.1)\qquad&\quad+\binom{n}{2}\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda\mu^2\Big)\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-1}\mu^{n-2}\Big)+\ldots \\
&\quad+\binom{n}{n}\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda\mu^n\Big)\Big(\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}|a_{\lambda 0}|\lambda^{m-1}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-1}\Big)\Big\} \\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\quad+\ldots\ldots\ldots \\
&\quad+\binom{m}{m}\Big\{\Big(\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}|a_{\lambda 0}|\lambda^m+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\Big) \\
&\qquad\times\Big(\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{0\mu}|\mu^n+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^n\Big) \\
&\quad+\binom{n}{1}\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu\Big)\Big(\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{0\mu}|\mu^{n-1}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^{n-1}\Big) \\
&\quad+\binom{n}{2}\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^2\Big)\Big(\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{0\mu}|\mu^{n-2}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^{n-2}\Big) \\
&\quad+\ldots\ldots\ldots+\binom{n}{n}\Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^n\Big)K\Big\}.
\end{aligned}$$

Pour abréger, nous posons

$$g_1=\sum_{\lambda=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^p,\quad g_2=\sum_{\lambda=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-p},\quad g_3=\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^n,\quad g_4=\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|.$$

Alors on a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^p\mu^q\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-p}\mu^{n-q}\right) \qquad \begin{pmatrix} p<m \\ q<n \end{pmatrix}$$
$$\leqslant\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}g_1\mu^n\right)^{\frac{q}{n}}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}g_1\right)^{1-\frac{q}{n}}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}g_2\mu^n\right)^{1-\frac{q}{n}}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}g_2\right)^{\frac{q}{n}}$$
$$=\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-p}\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^p\mu^n\right)\right\}^{\frac{q}{n}}$$
$$\times\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^p\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-p}\mu^n\right)\right\}^{\frac{n-q}{n}}$$
$$=\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\lambda^{m-p}\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\lambda^p\right)\right\}^{\frac{q}{n}}\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\lambda^p\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\lambda^{m-p}\right)\right\}^{\frac{n-q}{n}}$$
$$\leqslant\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\lambda^m\right)^{1-\frac{p}{m}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\right)^{\frac{p}{m}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\lambda^m\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\right)^{1-\frac{p}{m}}\right\}^{\frac{q}{n}}$$
$$\times\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\lambda^m\right)^{\frac{p}{m}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\right)^{1-\frac{p}{m}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\lambda^m\right)^{1-\frac{p}{m}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\right)^{\frac{p}{m}}\right\}^{\frac{n-q}{n}}$$
$$=\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\right)^{\frac{pq+(m-p)(n-q)}{mn}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\lambda^m\right)^{\frac{pq+(m-p)(n-q)}{mn}}$$
$$\times\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_4\lambda^m\right)^{\frac{q(m-p)+p(n-q)}{mn}}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_3\right)^{\frac{q(m-p)+p(n-q)}{mn}}$$
$$=\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^n\right)\right\}^{\frac{pq+(m-p)(n-q)}{mn}}$$
$$\times\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^n\right)\right\}^{1-\frac{pq+(m-p)(n-q)}{mn}}.$$

En remarquant que $\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|$ converge, on peut trouver une constante positive finie k_1, telle que l'on ait, quelles que soient les valeurs de m, n,

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\mu^n\right)$$
$$\leqslant k_1\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^n\right).$$

Il existe donc une constante positive finie k_2 pour $\begin{pmatrix} p<m \\ q<n \end{pmatrix}$, telle que l'on ait

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^p\mu^q\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^{m-p}\mu^{n-q}\right)$$
$$\leqslant k_2\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^n\right).$$

On peut calculer de même pour les autres produits écrits dans le second membre de l'inégalité (15.1). On voit donc, en désignant par k_3, k_4 des constantes convenables, que

$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}[\psi_2(x,y)]^2\right|$$
$$\leqslant(2\pi)^{m+n}k_3\,2^{m+n}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_{\lambda\mu}|\lambda^m\mu^n\right) \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\ldots \\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots \end{pmatrix}$$

$$= 2^{m+n}(2\pi)^{m+n} k_3 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(|a_{\lambda\mu}| \lambda^{m+2} \mu^{n+2} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right)$$

$$< \frac{2^{m+n} k_3}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(12.16^{m+n+4} M_{m,n} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right)$$

$$= 32^{m+n} k_4 M_{m,n}.$$

Posons $\varphi(x, y) = \frac{1}{k_4} [\psi_3(x, y)]^2$; alors cette fonction $\varphi(x, y)$ satisfait aux conditions

$$|\varphi^{(m+n)}(x, y)| < 32^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

La fonction $\varphi(x, y)$ énoncée au n°14 est ainsi trouvée.

§ 8. Théorèmes fondamentaux dans les quasi-analyses

16. Nous allons maintenant prouver deux théorèmes fondamentaux dans les quasi-analyses de fonctions de deux variables.

Premier théorème fondamental: *Si la fonction $f(x, y)$, indéfiniment dérivable dans le domaine* $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$ *satisfait aux conditions*

$$|f^{(m+n)}(x, y)| < M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1\ ;\ m=0, 1, 2, \ldots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$f^{(m+n)}(0, 0) = 0 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et si l'intégrale double

$$(16.1) \qquad \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \log T(R, r) \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2}, \qquad \left[\text{où } T(R, r) = \max_{m,n \geq 1} \frac{R^m r^n}{M_{m,n}} \right],$$

diverge, alors la fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle.

Il suffit, pour affirmer ce théorème, qu'on démontre que si la fonction $f(x, y)$ n'est pas identiquement nulle, alors l'intégrale double (16.1) converge. Dans le cas où nous nous plaçons, on peut construire, en vertu du n°14, une fonction $\varphi(x, y)$ non identiquement nulle, indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$, non négative et satisfaisant dans ce domaine aux conditions suivantes:

$$(16.2) \qquad \varphi^{(m+n)}(0, 0) = \varphi^{(m+n)}(0, 1) = \varphi^{(m+n)}(1, 0)$$
$$= \varphi^{(m+n)}(1, 1) = 0 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$(16.3) \qquad |\varphi^{(m+n)}(x, y)| < 32^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1\ ;\ m=0, 1, 2, \ldots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Désignons par $\theta(x, y)$ la fonction définie dans le domaine $\begin{pmatrix} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{pmatrix}$ de la manière suivante:

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{(ailleurs)}; \end{cases}$$

et considérons la transformée de Laplace, $\Theta(u, v)$, de cette fonction

$$\Theta(u, v)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux-vy}\theta(x, y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 e^{-ux-vy}\varphi(x, y)dxdy,$$

qui est holomorphe dans les demi-plans $\Re(u)>0$, $\Re(v)>0$. En intégrant cette fonction par parties, m fois par rapport à x et n fois à y, il vient, en vertu des égalités (16.2),

$$\Theta(u, v)=\frac{1}{u^m v^n}\int_0^1\int_0^1 e^{-ux-vy}\varphi^{(m+n)}(x, y)dxdy\,;$$

et par conséquent, on a pour $\Re(u)>\frac{1}{2}$, $\Re(v)>\frac{1}{2}$,

$$|\Theta(u, v)|<\frac{1}{|u|^m|v|^n}\int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}32^{m+n}M_{m,n}\,dxdy<\frac{32^{m+n}M_{m,n}}{|u|^m|v|^n}.$$

Or la fonction $\Theta(u, v)$ n'est pas identiquement nulle dans les demi-plans $\Re(u)>0$, $\Re(v)>0$, car pour u, v réels, l'expression $e^{-ux-vy}\varphi(x, y)$ est non négative et non identiquement nulle dans le domaine $\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{pmatrix}$.

Si l'on pose donc $T_1(R, r)=\max\limits_{m,\,n\geq 1}\dfrac{R^m r^n}{32^{m+n}M_{m,n}}=T\left(\dfrac{R}{32}, \dfrac{r}{32}\right)$, l'intégrale double

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log T_1(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

converge. Or cette intégrale converge ou diverge en même temps que (16.1).

On voit donc que si l'intégrale double (16.1) diverge, alors la fonction $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions énoncées est identiquement nulle.

17. Second théorème fondamental: *Si l'intégrale double* (16.1) *converge, on peut construire une fonction $f(x, y)$ non identiquement nulle, indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{pmatrix}$, non négative et satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$f^{(m+n)}(0, 0)=f^{(m+n)}(0, 1)=f^{(m+n)}(1, 0)$$
$$=f^{(m+n)}(1, 1)=0 \qquad \begin{pmatrix}m=0, 1, 2,\dots\\ n=0, 1, 2,\dots\end{pmatrix},$$
$$|f^{(m+n)}(x, y)|<M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\,;\ m=0, 1, 2,\dots\\ 0\leqslant y\leqslant 1\,;\ n=0, 1, 2,\dots\end{pmatrix}.$$

Ce théorème est évidemment la réciproque du théorème précédent. Si l'on pose

$$T_1(R, r)=\max_{m,\,n\geq 1}\frac{32^{m+n}R^m r^n}{M_{m,n}}=T(32R, 32r),$$

la convergence de l'intégrale double (16.1) entraîne celle de l'intégrale double

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \log T_1(R, r) \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2};$$

et par conséquent, on peut, en vertu du n°12, trouver une fonction $\Theta(u, v)$ holomorphe dans les demi-plans $\Re(u) > \frac{1}{2}$, $\Re(v) > \frac{1}{2}$, non identiquement nulle et vérifiant dans ces demi-plans les relations suivantes :

$$|\Theta(u, v)| < \frac{M_{m,n}}{3\,2^{m+n}|u|^m|v|^n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Désignons alors par $\theta(x, y)$ une fonction définie de la manière suivante

$$\theta(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{(u-1)x+(v-1)y} \frac{\Theta(u, v)}{u^2 v^2} du dv;$$

qui est continue pour toutes les valeurs réelles de x, y, et indéfiniment dérivable. Ces dérivées peuvent être données par

$$\theta^{(m+n)}(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{(u-1)x+(v-1)y} (u-1)^m (v-1)^n \frac{\Theta(u, v)}{u^2 v^2} du dv,$$

d'où l'on tire, en posant $u = 1 + i\xi$, $v = 1 + i\eta$,

$$|\theta^{(m+n)}(x, y)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (|u-1|)^m (|v-1|)^n \left| \frac{\Theta(u, v)}{u^2 v^2} \right| d\xi d\eta$$

$$< \frac{M_{m,n}}{4\pi^2 3\,2^{m+n}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{u-1}{u} \right| \right)^m \left(\left| \frac{v-1}{v} \right| \right)^n \frac{d\xi d\eta}{(|u|)^2 (|v|)^2};$$

et par suite, en vertu de $\left| \frac{u-1}{u} \right| < 1$ et $\left| \frac{v-1}{v} \right| < 1$,

$$|\theta^{(m+n)}(x, y)| < \frac{M_{m,n}}{4\pi^2 3\,2^{m+n}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^2)(1+\eta^2)} = \frac{M_{m,n}}{4.3\,2^{m+n}}.$$

Remarquons maintenant que, quelles que soient les quantités $a, b \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{(u-1)x+(v-1)y} \frac{\Theta(u, v)}{u^2 v^2} du dv$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left\{ \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} + \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \right.$$

$$\left. - \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \right\} e^{(u-1)x+(v-1)y} \frac{\Theta(u, v)}{u^2 v^2} du dv;$$

car, lorsqu'on désigne par L_U, L_V les périmètres des rectangles dont les côtés sont formés par les droites :

$$\Re(u) = 1, \quad \Re(u) = a, \quad \Im(u) = X, \quad \Im(u) = -X,$$
$$\Re(v) = 1, \quad \Re(v) = b, \quad \Im(v) = Y, \quad \Im(v) = -Y,$$

on a, d'après l'intégrale double de Cauchy,

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_U}\int_{L_V} e^{(u-1)x+(v-1)y}\frac{\Theta(u,v)}{u^2 v^2}du\,dv=0,$$

et les intégrales étendues suivant les segments parallèles aux axes réels tendent vers zéro avec $\frac{1}{XY}$, comme il est aisé de voir qu'on a, par exemple, en posant $\lambda\pm iX=u$, $\mu\pm iY=v$,

$$\left|\int_1^a\int_1^b e^{(\lambda\pm iX-1)x+(\mu\pm iY-1)y}\frac{\Theta(\lambda\pm iX,\mu\pm iY)}{(\lambda\pm iX)^2(\mu\pm iY)^2}d\lambda d\mu\right|$$
$$\leqslant\int_1^a\int_1^b e^{(\lambda-1)x+(\mu-1)y}\frac{M_{m,n}}{32^{m+n}|\lambda\pm iX|^2|\mu\pm iY|^2}d\lambda d\mu$$
$$\leqslant e^{(a-1)x+(b-1)y}\frac{M_{m,n}}{32^{m+n}}\int_1^a\int_1^b\frac{1}{(\lambda^2+X^2)(\mu^2+Y^2)}d\lambda d\mu,$$

qui tend évidemment vers zéro, lorsque X ou Y tend vers l'infini.

Or, lorsque $x, y<0$, on a, en posant $a+i\xi=u$, $b+i\eta=v$,

$$\left|\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{(u-1)x+(v-1)y}\frac{\Theta(u,v)}{u^2v^2}du\,dv\right|$$
$$\leqslant e^{(a-1)x+(b-1)y}\frac{M_{m,n}}{32^{m+n}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|u|^{m+2}|v|^{n+2}}d\xi d\eta$$
$$=e^{(a-1)x+(b-1)y}\frac{M_{m,n}}{32^{m+n}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi d\eta}{(\xi^2+a^2)^{1+\frac{m}{2}}(\eta^2+b^2)^{1+\frac{n}{2}}}$$
$$<e^{(a-1)x+(b-1)y}\frac{M_{m,n}}{32^{m+n}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi^{m+2}\eta^{n+2}}d\xi d\eta,$$

qui tend vers zéro, lorsque a ou b tend vers l'infini. On voit de même, que les deux intégrales doubles

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}e^{(u-1)x+(v-1)y}\frac{\Theta(u,v)}{u^2v^2}du\,dv,$$
$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{(u-1)x+(v-1)y}\frac{\Theta(u,v)}{u^2v^2}du\,dv$$

tendent vers zéro, lorsque a ou b tend vers l'infini.

On a par conséquent, lorsque $x, y<0$,

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}e^{(u-1)x+(v-1)y}\frac{\Theta(u,v)}{u^2v^2}du\,dv$$
$$=\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{(2\pi i)^2}\left\{\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}+\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\right.$$
$$\left.-\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\right\}e^{(u-1)x+(v-1)y}\frac{\Theta(u,v)}{u^2v^2}du\,dv$$
$$=0,$$

et par suite

$$\theta(x,y)=0\qquad\begin{pmatrix}x<0\\ y<0\end{pmatrix}.$$

Or on sait que, lorsque $x, y \geqslant 0$, cette fonction $\theta(x, y)$ n'est pas identiquement nulle ; car, on a, en vertu du n°13,

$$\frac{\Theta(u, v)}{u^2 v^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u-1)x-(v-1)y}\, \theta(x, y) dx dy,$$

et si $\theta(x, y)$ était identiquement nulle, la fonction $\Theta(u, v)$ le serait aussi, ce qui n'est pas le cas.

Il existe donc des valeurs positives finies des x, y, telles que $\theta(x, y)$ n'est pas nulle. Désignons par ξ_1, η_1 les bornes supérieures respectivement des valeurs ξ, η, telles que

$$\theta(x, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \leqslant \xi \\ y \leqslant \eta \end{pmatrix};$$

ces valeurs ξ_1, η_1 sont toutes les deux certainement positives finies.

On voit ainsi que la fonction $\theta(x, y)$ n'est certainement pas identiquement nulle dans le domaine $\begin{pmatrix} \xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_1 + 1 \\ \eta_1 \leqslant y \leqslant \eta_1 + 1 \end{pmatrix}$, et satisfait aux conditions :

$$\theta^{(m+n)}(\xi_1, \eta_1) = 0 \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$|\theta^{(m+n)}(x, y)| \leqslant \frac{M_{m,n}}{3\,2^{m+n}} \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_1 + 1\,;\; m = 0, 1, 2, \ldots \\ \eta_1 \leqslant y \leqslant \eta_1 + 1\,;\; n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix};$$

et par conséquent, la fonction $\varphi(x, y) = \theta(x + \xi_1, y + \eta_1)$ n'est pas identiquement nulle dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$, et satisfait aux conditions

$$\varphi^{(m+n)}(0, 0) = 0 \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$|\varphi^{(m+n)}(x, y)| \leqslant \frac{M_{m,n}}{3\,2^{m+n}} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1\,;\; m = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\,;\; n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

On peut donc, d'après le théorème du n°14, construire une fonction $f(x, y)$, non identiquement nulle, non négative et indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$f^{(m+n)}(0, 0) = f^{(m+n)}(0, 1) = f^{(m+n)}(1, 0)$$
$$= f^{(m+n)}(1, 1) = 0 \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$|f^{(m+n)}(x, y)| < M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1;\; m = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1;\; n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

On voit aussi que cette fonction $f(x, y)$ peut être formée telle que

$$f(x, y) = f(1 - x, 1 - y).$$

Notre théorème est ainsi démontré.

18. En s'appuyant sur les remarques simples, on peut énoncer ces deux théorèmes fondamentaux sous des autres formes.

En effet, si la fonction $\varphi(x, y)$ satisfait aux conditions

$$|\varphi^{(m+n)}(x, y)| < M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A\,; & m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ b \leqslant y \leqslant B\,; & n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{(m+n)}(0, 0)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

alors la fonction $f(x, y)=\varphi[\{(A-a)x+a\},\ \{(B-b)y+b\}]$ vérifie les relations

$$f^{(m+n)}(0, 0)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

$$|f^{(m+n)}(x, y)| < (A-a)^m (B-b)^n M_{m,n} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1\,; & m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\,; & n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix}.$$

Si, au contraire, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfait aux conditions

$$|\varphi^{(m+n)}(x, y)| < M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1\,; & m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\,; & n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{(m+n)}(0, 0)=\varphi^{(m+n)}(0, 1)=\varphi^{(m+n)}(1, 0)$$
$$=\varphi^{(m+n)}(1, 1)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

alors la fonction $f(x, y)=\varphi\left(\dfrac{x-a}{A-a},\ \dfrac{y-b}{B-b}\right)$ vérifie les relations

$$f^{(m+n)}(a, b)=f^{(m+n)}(a, B)=f^{(m+n)}(A, b)$$
$$=f^{(m+n)}(A, B)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

$$|f^{(m+n)}(x, y)| < \frac{M_{m,n}}{(A-a)^m (B-b)^n} \quad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A\,; & m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ b \leqslant y \leqslant B\,; & n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix}.$$

On sait, d'autre part, qu'en posant $T_1(R, r)=\max\limits_{m,n\geq 1}\dfrac{h^{m+n}R^m r^n}{M_{m,n}}=$ $T(hR, hr)$, h étant un nombre quelconque (>0), les deux intégrales

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log\, T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}, \quad \int_1^\infty\int_1^\infty \log\, T_1(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

convergent ou divergent en même temps.

On peut donc énoncer les deux théorèmes fondamentaux dans les quasi-analyses sous les autres formes de la manière suivante :

Si la fonction $f(x, y)$, indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A \\ b \leqslant y \leqslant B \end{pmatrix}$, *satisfait aux conditions*

$$|f^{(m+n)}(x, y)| < M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A\,; & m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ b \leqslant y \leqslant B\,; & n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

$$f^{(m+n)}(a, b)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{pmatrix},$$

et si l'intégrale double

$$(16.1) \qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \log\, T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

diverge, alors la fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle.

Si, au contraire, l'intégrale double (16.1) *converge, alors on peut construire une fonction* $f(x,y)$, *non identiquement nulle, indéfiniment dérivable dans le domaine* $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B\end{pmatrix}$, *non négative et vérifiant les relations*

$$\begin{aligned} &f^{(m+n)}(a,b)=f^{(m+n)}(a,B)=f^{(m+n)}(A,b) \\ &\qquad =f^{(m+n)}(A,B)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}, \\ &|f^{(m+n)}(x,y)|<M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A;\ m=0,1,2,\dots \\ b\leqslant y\leqslant B;\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut en plus choisir cette fonction $f(x,y)$ *de sorte que*

$$f(a+x,\,b+y)=f(A-x,\,B-y).$$

§ 9. Autre forme de la condition

19. Il est évident que la convergence ou divergence de l'intégrale double (16.1) dépend du comportement de la suite double $\{M_{m,n}\}$, mais il est important de pouvoir caractériser cette suite double d'une manière plus directe. Nous avons déjà rencontré cette considération dans le cas de fonctions d'une variable. En autres termes, M. Carleman a introduit cette idée[1] lorsqu'il a démontré son théorème donnant la condition nécessaire et suffisante pour la classe quasi-analytique de fonctions d'une variable. Nous allons donc expliquer avec lui une condition pouvant définir directement sur la suite double $\{M_{m,n}\}$ et équivalente à celle donnée par l'intégrale double (16.1). Nous allons à cet effet introduire la notion étendue de *la minorante de M. Faber* d'une suite double donnée.

Soit $\{a_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}$ une suite double de quantités positives tendant vers l'infini avec m, n. On appelle la suite double

$$\{a^*_{m,n}\} \qquad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix},$$

dont les termes sont définis par les expressions

$$a^*_{m,n}=\min_{m'+n'\geqq m+n} a_{m',n'},$$

la minorante de M. Faber de la suite double donnée $\{a_{m,n}\}$; ces minima existent certainement du fait que $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{m,n}=+\infty$.

Remplacer la suite double $\{a_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}$ par sa minorante de M. Faber $\{a^*_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}$ revient à substituer géométrique-

1. T. Carleman: Les fonctions quasi analytiques (1926) pp. 60-64.

ment aux points $P_{m,n}$ de l'éspace, dont les coordonnées sont $(m, n, a_{m,n})$, les points $Q_{m,n}$ dont les coordonnées $(m, n, a^*_{m,n})$ satisfont aux conditions suivantes : $a^*_{m_1,n_1}$ étant la plus petite valeur de tous les $a_{m,n}$ les z-coordonnées des points $Q_{m,n}$ $(0 \leqslant m+n \leqslant m_1+n_1)$ sont toutes $a^*_{m_1,n_1}$; $a^*_{m_2,n_2}$ étant la plus petite valeur des $a_{m,n}$ dont la somme des indices est supérieure à m_1+n_1, les z-coordonnées des points $Q_{m,n}$ $(m_1+n_1 < m+n \leqslant m_2+n_2)$ sont toutes $a^*_{m_2,n_2}$; et ainsi de suite. Par conséquent, les points $Q_{m,n}$ $(0 \leqslant m+n \leqslant m_1+n_1)$ sont tous situés sur le même plan horizontal π_{m_1,n_1}, dont la z-coordonnée est égale à $a^*_{m_1,n_1}$, et généralement les points $Q_{m,n}$ $(m_{i-1}+n_{i-1} < m+n \leqslant m_i+n_i)$ $(i=1, 2, 3,\ldots)$ sont tous situés sur le même plan horizontal π_{m_i,n_i} dont la z-coordonnée est égale à $a^*_{m_i,n_i}$ $(i=1, 2, 3,\ldots)$. On voit donc que ces plans horizontaux vont successivement en haut avec i, et tendent vers l'infini. Si ces plans horizontaux sont coupés verticalement par les plans parallèles aux yz-plan ou xz-plan passant respectivement par les points $(m, 0, 0)$ ou $(0, n, 0)$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\ldots \\ n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix}$, alors on peut construire sur les sections les figures géométriques analogues à celles pour des suites simples.

On voit ainsi que la suite double $\{a^*_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\ldots \\ n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix}$ est non-décroissante par rapport à chacun des indices, et tend vers l'infini avec lui.

20. Soit $f(x, y)$ une fonction indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$|f^{(m+n)}(x, y)| < M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1\ ;\ m=0, 1, 2,\ldots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix},$$

$$f^{(m+n)}(0, 0)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\ldots \\ n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix}.$$

Considérons, en posant

$$\sqrt[mn]{M_{m,n}}=\beta_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\ldots \\ n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix},$$

la suite double $\{\beta_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\ldots \\ n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix}$, et sa minorante de M. Faber $\{\beta^*_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\ldots \\ n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix}$ définie plus haut, et posons $T(R, r)=\max\limits_{m,n\geq 0}\dfrac{R^m r^n}{M_{m,n}}$ comme nous en avons souvent l'usage. Alors on a le théorème suivant, qui est une extension du théorème de M. Carleman pour des fonctions d'une variable.

La série double

$$(20.1) \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^*_{m,n}}$$

converge ou diverge en même temps que l'intégrale double

$$(20.2)\qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}.$$

Comme on a déjà remarqué dans le n°9, on sait que dans le cas où $\beta_{m,n}$ ne tend pas vers l'infini avec $m+n$, ce théorème est évident; car, il est aisé de voir que dans ce cas l'intégrale double (20.2) diverge et la série double (20.1) diverge aussi.

Nous allons donc considérer seulement le cas où $\beta_{m,n}$ tend vers l'infini avec $m+n$. On sait que la suite double $\{\beta^*_{m,n}\}$ est non décroissante par rapport à chacun des indices m, n, et peut tendre vers l'infini avec lui, c'est-à-dire, quels que soient les entiers positifs (incl. zéro) m, n,

$$\beta^*_{m,0}\leqslant\beta^*_{m,1}\leqslant\beta^*_{m,2}\leqslant\ldots\ldots\ldots, \qquad \beta^*_{0,n}\leqslant\beta^*_{1,n}\leqslant\beta^*_{2,n}\leqslant\ldots\ldots\ldots.$$

Désignons donc par $\{m^{(n)}_p\}$ $(p=1, 2, 3,\ldots)$, $\{n^{(m)}_q\}$ $(q=1, 2, 3,\ldots)$ les suites simples d'entiers positifs définis par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}&\beta^*_{0,n}=\beta^*_{1,n}=\ldots=\beta^*_{m_1^{(n)},n}<\beta^*_{m_1^{(n)}+1,n}=\ldots=\beta^*_{m_2^{(n)},n}<\ldots\ldots\\&\qquad<\beta^*_{m^{(n)}_{p-1}+1,n}=\ldots=\beta^*_{m^{(n)}_p,n}<\beta^*_{m^{(n)}_p+1,n}=\ldots=\beta^*_{m^{(n)}_{p+1},n}<\ldots\ldots,\\&\beta^*_{m,0}=\beta^*_{m,1}=\ldots=\beta^*_{m,n_1^{(m)}}<\beta^*_{m,n_1^{(m)}+1}=\ldots=\beta^*_{m,n_2^{(m)}}<\ldots\ldots\\&\qquad<\beta^*_{m,n^{(m)}_{q-1}+1}=\ldots=\beta^*_{m,n^{(m)}_q}<\beta^*_{m,n^{(m)}_q+1}=\ldots=\beta^*_{m,n^{(m)}_{q+1}}<\ldots\ldots;\end{aligned}$$

et posons

$$\begin{aligned}&\xi_{p,n}=\beta^*_{m^{(n)}_p,n},\qquad m_n(\xi_{p,n})=m^{(n)}_p\qquad(p=1, 2, 3,\ldots),\\&m_n(\xi)=m^{(n)}_p,\quad\text{si}\quad\beta^*_{m^{(n)}_p,n}\leqslant\xi<\beta^*_{m^{(n)}_{p+1},n};\\&\eta_{m,q}=\beta^*_{m,n^{(m)}_q},\qquad n_m(\eta_{m,q})=n^{(m)}_q\qquad(q=1, 2, 3,\ldots),\\&n_m(\eta)=n^{(m)}_q,\quad\text{si}\quad\beta^*_{m,n^{(m)}_q}\leqslant\eta<\beta^*_{m,n^{(m)}_{q+1}};\end{aligned}$$

et lorsque les indices n, m ne sont pas fixes, nous écrivons $m_n(\xi)$, $n_m(\eta)$ par $m(\xi)$, $n(\eta)$ d'après la suppression des indices. On voit alors que $m_n(\xi)+1$ désigne le nombre des $\beta^*_{m,n}$ (n étant fixe) non supérieurs à ξ, et que $n_m(\eta)+1$ désigne le nombre des $\beta^*_{m,n}$ (m étant fixe) non supérieurs à η; d'où l'on conclut, en vertu du résultat dans le cas d'une variable,[1] que $\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{\beta^*_{m,n}}$ converge ou diverge en même temps que $\int_1^\infty m_n(\xi)\frac{d\xi}{\xi^2}$, et que $\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\beta^*_{m,n}}$ converge ou diverge en même temps que $\int_1^\infty n_m(\eta)\frac{d\eta}{\eta^2}$. Il en résulte que la série double

1. Voir S. Mandelbrojt: Série de Fourier et Classes quasi-analytiques de Fonctions (1935), pp. 41-45; pp. 70-71. Et voir aussi A. Ostrowski: Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen, (Acta Math., B. 53 (1929), p. 201.)

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{m,n}^{*}}$$

converge ou diverge en même temps que l'intégrale double

$$\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\{m(\xi)+n(\eta)\}\frac{d\xi}{\xi^2}\frac{d\eta}{\eta^2}.$$

Si l'on prend, d'autre part, une quantité R non inférieure à $\beta_{1,n}^{*}$, on peut déterminer un indice $m_p^{(n)}$ tel que

$$\beta_{m_p^{(n)},n}^{*}\leqslant R<\beta_{m_{p+1}^{(n)},n}^{*}\qquad [m_p^{(n)}=m_n(R)],$$

et, dans le produit

$$\frac{R^m}{\beta_{1,n}^{*}\beta_{2,n}^{*}\ldots\beta_{m,n}^{*}}=\frac{R^{m_1^{(n)}}}{\beta_{m_1^{(n)},n}^{*m_1^{(n)}}}\frac{R^{m_2^{(n)}-m_1^{(n)}}}{\beta_{m_2^{(n)},n}^{*\;m_2^{(n)}-m_1^{(n)}}}\cdots$$
$$\cdots\frac{R^{m_h^{(n)}-m_{h-1}^{(n)}}}{\beta_{m_h^{(n)},n}^{*\;m_h^{(n)}-m_{h-1}^{(n)}}}\frac{R^{m-m_h^{(n)}}}{\beta_{m_{h+1}^{(n)},n}^{*}\ldots\beta_{m,n}^{*}},$$

où $m>m_h^{(n)}>m_n(R)$, les $m_p^{(n)}$ premiers facteurs du premier membre de cette égalité sont supérieurs ou égaux à un, les autres facteurs sont, au contraire, inférieurs à un ; on voit donc qu'en posant

$$T^{(1)}(R)=\max_{m\geq 1}\frac{R^m}{\beta_{1,n}^{*}\beta_{2,n}^{*}\ldots\beta_{m,n}^{*}},$$

on a, pour $R\geqslant\beta_{1,n}^{*}$,

$$T^{(1)}(R)=\frac{R^m}{\beta_{1,n}^{*}\beta_{2,n}^{*}\ldots\beta_{m_n(R),n}^{*}},$$

et

$$V_1(R)=\log T^{(1)}(R)=\int_{\beta_{1,n}^{*}}^{R}\frac{m_n(\xi)}{\xi}d\xi\quad [R\geqslant\beta_{1,n}^{*},\ V_1(\beta_{1,n}^{*})=0].$$

En posant

$$T^{(2)}(r)=\max_{n\geq 1}\frac{r^n}{\beta_{m,1}^{*}\beta_{m,2}^{*}\ldots\beta_{m,n}^{*}}\qquad (r\geqslant\beta_{m,1}^{*}),$$

on a, de même,

$$V_2(r)=\log T^{(2)}(r)=\int_{\beta_{m,1}^{*}}^{r}\frac{n_m(\eta)}{\eta}d\eta\quad [r\geqslant\beta_{m,1}^{*},\ V_2(\beta_{m,1}^{*})=0].$$

Or, on a

$$\frac{R^m r^n}{M_{m,n}}=\frac{R^m r^n}{\beta_{m,n}^{m+n}}\leqslant\frac{R^m r^n}{\beta_{m,n}^{*m+n}}$$
$$\leqslant\frac{R^m}{\beta_{1,n}^{*}\beta_{2,n}^{*}\ldots\beta_{m,n}^{*}}\frac{r^n}{\beta_{m,1}^{*}\beta_{m,2}^{*}\ldots\beta_{m,n}^{*}},$$

d'où l'on tire :

$$T(R,r)\leqslant T^{(1)}(R)\,T^{(2)}(r),$$

$$V(R, r)=V_1(R)+V_2(r)=\int_{\beta_{1,n}^*}^{R}\frac{m_n(\xi)}{\xi}d\xi+\int_{\beta_{m,1}^*}^{r}\frac{n_m(\eta)}{\eta}d\eta$$
$$\geqslant \log T(R, r) \qquad \begin{pmatrix} R\geqslant \beta_{1,n}^* \\ r\geqslant \beta_{m,1}^* \end{pmatrix};$$

et par suite, sauf en des points isolés n'influant pas ce qui suit,

$$\frac{\partial V}{\partial R}=\frac{d}{dR}V_1(R)=\frac{m_n(R)}{R}, \quad \frac{\partial V}{\partial r}=\frac{d}{dr}V_2(r)=\frac{n_m(r)}{r}.$$

On a, donc,

$$\int_{\beta_{1,n}^*}^{R}\frac{m_n(\xi)}{\xi^2}d\xi=\int_{\beta_{1,n}^*}^{R}\frac{V_1'(\xi)}{\xi}d\xi$$
$$=\int_{\beta_{1,n}^*}^{R}\frac{V_1(\xi)}{\xi^2}d\xi+\frac{V_1(R)}{R} \qquad (R\geqslant\beta_{1,n}^*),$$
$$\int_{\beta_{m,1}^*}^{r}\frac{n_m(\eta)}{\eta^2}d\eta=\int_{\beta_{m,1}^*}^{r}\frac{V_2'(\eta)}{\eta}d\eta$$
$$=\int_{\beta_{m,1}^*}^{r}\frac{V_2(\eta)}{\eta^2}d\eta+\frac{V_2(r)}{r} \qquad (r\geqslant\beta_{m,1}^*).$$

Si l'on désigne maintenant par M, N les plus grands des entiers tels que $\beta^*_{m_n\left(\frac{R}{e}\right), n}=\beta^*_{M, n}$, $\beta^*_{m, n_m\left(\frac{r}{e}\right)}=\beta^*_{m, N}$, on a

$$T(R, r)\geqslant\left(\frac{R}{\beta^*_{M,n}}\right)^M\left(\frac{r}{\beta^*_{m,N}}\right)^N\geqslant\left(\frac{R}{\beta^*_{m\left(\frac{R}{e}\right), n}}\right)^{m\left(\frac{R}{e}\right)}\left(\frac{r}{\beta^*_{m, n\left(\frac{r}{e}\right)}}\right)^{n\left(\frac{r}{e}\right)},$$

d'où l'on tire

$$\log T(R, r)\geqslant m\left(\frac{R}{e}\right)+n\left(\frac{r}{e}\right),$$

en vertu du fait que $\frac{R}{e}\geqslant\beta^*_{m\left(\frac{R}{e}\right), n}$, $\frac{r}{e}\geqslant\beta^*_{m, n\left(\frac{r}{e}\right)}$.

On a, par conséquent,

$$\int_1^\infty\int_1^\infty\{m(R)+n(r)\}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$
$$=\int_1^\infty\int_1^\infty\left\{\frac{V_1'(R)}{Rr^2}+\frac{V_2'(r)}{R^2r}\right\}dRdr$$
$$\geqslant\int_1^\infty\int_1^\infty\{V_1(R)+V_2(r)\}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$
$$\geqslant\int_1^\infty\int_1^\infty\log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$
$$\geqslant\int_1^\infty\int_1^\infty\left\{m\left(\frac{R}{e}\right)+n\left(\frac{r}{e}\right)\right\}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$
$$=\frac{1}{e^2}\int_{e^{-1}}^\infty\int_{e^{-1}}^\infty\{m(R)+n(r)\}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}.$$

On voit donc que les deux intégrales doubles

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \log T(R, r) \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2}, \quad \int_1^\infty \int_1^\infty \{m(R)+n(r)\} \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2}$$

convergent ou divergent en même temps.

Or, on sait, d'après ce que nous avons vu plus haut, que la dernière intégrale double converge ou diverge en même temps que la série double $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_{m,n}^*}$. On en conclut que la série double (20.1) converge ou diverge en même temps que l'intégrale double (20.2). Le théorème énoncé au début de ce numéro est ainsi démontré.

§ 10. Une classe quasi-analytique

21. $\{M_{m,n}\}$ étant une suite double de quantités positives données, nous désignerons par C_M l'ensemble des fonctions $f(x, y)$ indéfiniment dérivables dans le domaine $\begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A \\ b \leqslant y \leqslant B \end{pmatrix}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(21.1) \qquad |f^{(m+n)}(x, y)| \leqslant k^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A\,; & m=0, 1, 2, \ldots \\ b \leqslant y \leqslant B\,; & n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où k est une constante positive dépendant seulement du choix de la fonction $f(x, y)$.

Étant données deux fonctions quelconques $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ appartenant à la même classe C_M, telles que

$$(21.2) \qquad \begin{aligned} |f_1^{(m+n)}(x, y)| &\leqslant k_1^{m+n} M_{m,n} \\ |f_2^{(m+n)}(x, y)| &\leqslant k_2^{m+n} M_{m,n} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A\,; & m=0, 1, 2, \ldots \\ b \leqslant y \leqslant B\,; & n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et, en posant $g(x, y)=f_1(x, y) \pm f_2(x, y)$, on a

$$(21.3) \qquad \begin{aligned} |g^{(m+n)}(x, y)| &\leqslant |f_1^{(m+n)}(x, y)| + |f_2^{(m+n)}(x, y)| \\ &\leqslant (k_1^{m+n} + k_2^{m+n}) M_{m,n} \\ &\leqslant (k_1+k_2)^{m+n} M_{m,n} \quad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A\,; & m=0, 1, 2, \ldots \\ b \leqslant y \leqslant B\,; & n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la somme et la différence de deux fonctions d'une classe C_M appartiennent à cette même classe. On peut donc vérifier que la somme algébrique de fonctions en nombre fini d'une classe C_M appartient à cette même classe.

Il est aisé de voir que le produit d'une fonction quelconque d'une classe C_M par une constante finie arbitraire appartient aussi à cette même classe.

Étant données deux fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ d'une classe C_M comme plus haut, posons ensuite $h(x, y)=f_1(x, y) f_2(x, y)$. Alors, quels que soient les entiers positifs (incl. zéro) m, n, on a

$$\begin{aligned} h^{(m+n)}(x, y) &= [f_1 \cdot f_2]^{(m+n)} \\ &= f_1^{(m+n)} f_2^{(0+0)} + \binom{n}{1} f_1^{\{m+(n-1)\}} f_2^{(0+1)} + \binom{n}{2} f_1^{\{m+(n-2)\}} f_2^{(0+2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\ldots\ldots+\binom{n}{n} f_1^{(m+0)} f_2^{(0+n)} \\
&+\binom{m}{1}\left\{f_1^{\{(m-1)+n\}} f_2^{(1+0)}+\binom{n}{1} f_1^{\{(m-1)+(n-1)\}} f_2^{(1+1)}\right. \\
&\qquad \left.+\ldots\ldots+\binom{n}{n} f_1^{\{(m-1)+0\}} f_2^{(1+n)}\right\} \\
&+\binom{m}{2}\left\{f_1^{\{(m-2)+n\}} f_2^{(2+0)}+\binom{n}{1} f_1^{\{(m-2)+(n-1)\}} f_2^{(2+1)}\right. \\
&\qquad \left.+\ldots\ldots+\binom{n}{n} f_1^{\{(m-2)+0\}} f_2^{(2+n)}\right\} \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\binom{m}{m}\left\{f_1^{(0+n)} f_2^{(m+0)}+\binom{n}{1} f_1^{\{0+(n-1)\}} f_2^{(m+1)}\right. \\
&\qquad \left.+\ldots\ldots+\binom{n}{n} f_1^{(0+0)} f_2^{(m+n)}\right\},
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire :

$$
\begin{aligned}
&|h^{(m+n)}(x, y)| \\
&\quad \leqslant k_1^{m+n} M_{m, n} M_{0, 0}+\binom{n}{1} k_1^{m+n-1} M_{m, n-1} k_2 M_{0, 1} \\
&\qquad +\ldots\ldots+\binom{n}{n} k_1^m M_{m, 0} k_2^n M_{0, n} \\
&\quad +\binom{m}{1}\left\{k_1^{m+n-1} M_{m-1, n} k_2 M_{1, 0}+\binom{n}{1} k_1^{m+n-2} M_{m-1, n-1} k_2^2 M_{1,1}\right. \\
&\qquad \left.+\ldots\ldots+\binom{n}{n} k_1^{m-1} M_{m-1, 0} k_2^{n+1} M_{1, n}\right\} \\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad +\binom{m}{m}\left\{k_1^n M_{0, n} k_2^m M_{m, 0}+\binom{n}{1} k_1^{n-1} M_{0, n-1} k_2^{m+1} M_{m, 1}\right. \\
&\qquad \left.+\ldots\ldots+\binom{n}{n} M_{0, 0} k_2^{m+n} M_{m, n}\right\}.
\end{aligned}
$$

Dans le cas où la suite double $\{\beta_{m, n}=\sqrt[m+n]{M_{m, n}}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ est non décroissante par rapport à chacun des indices m, n, on a

$$
\beta_{m-p, n-q}^{m-p+n-q}\, \beta_{p, q}^{p+q} \leqslant \beta_{m, n}^{m+n} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant p \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant n \end{pmatrix},
$$

c'est-à-dire

$$
M_{m-p, n-q} M_{p, q} \leqslant M_{m, n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant p \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant n \end{pmatrix},
$$

et par suite, on a, dans ce cas,

$$
(21.4) \qquad |h^{(m+n)}(x, y)| \leqslant (k_1+k_2)^{m+n} M_{m, n} \quad \begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant A\,; & m=0, 1, 2, \ldots \\ b \leqslant y \leqslant B\,; & n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},
$$

ce qui prouve que le produit de deux fonctions quelconques d'une classe C_M appartient aussi à cette même classe. On peut donc vérifier dans le cas où nous nous plaçons, que le produit de fonctions en nombre fini d'une classe C_M appartient à cette même classe.

22. Lorsque deux fonctions de deux variables, ainsi que leurs dérivées partielles successives, coïncident en un point dans le domaine d'existence, il est évident que leur différence, ainsi que celles de leurs dérivées, s'annulent en ce point. On peut donc, en remarquant les deux théorèmes fondamentaux dans la quasi-analyse, énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la classe C_M de fonctions de deux variables soit quasi-analytique est que la série double

$$(22.1) \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{m,n}^{*}}$$

ou l'intégrale double

$$(22.2) \qquad \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

soit divergente.

Nous verrons dans le mémoire suivant, le fait qu'une fonction quasi-analytique de la classe donnée C_M est complètement déterminée dans le domaine d'existence lorsque sa valeur, ainsi que celles de toutes ses dérivées partielles successives, en un point du domaine sont données.

§ 11. Un Problème de M. Carleman

23. Dans le cas de fonction dé deux variables, le problème notable, suggéré par M. Carleman, dans son livre remarquable : *Les fonctions quasi-analytiques*, p. 76 peut s'énoncer de la manière suivante :

Soit $f(x, y)$ une fonctions indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B\end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions :

$$|f^{(m+n)}(x, y)| \leqslant M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A\,;\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots \\ b\leqslant y\leqslant B\,;\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots\end{pmatrix}.$$

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir la suite double $\{M_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\ldots \\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots\end{pmatrix}$ pour que la fonction $f(x, y)$ soit analytique dans ce domaine.

On peut répondre à ce problème par le théorème suivant :

Soit $f(x, y)$ une fonction comme plus haut. La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x, y)$ soit analytique dans ce domaine est que

$$(23.1) \qquad \overline{\lim_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{m\,!\,n\,!}} < +\infty.$$

Nous allons d'abord démontrer que la condition est nécessaire. En vertu de l'hypothèse sur la fonction $f(x, y)$, on peut affirmer qu'il existe deux domaines D_x, D_y vérifiant les propriétes suivantes : 1° Ces deux domaines sont respectivement limités par des courbes Γ_x, Γ_y, simples fermées rectifiables de Jordan ; 2° L'intervalle $(a \leqslant x \leqslant A)$ est à l'intérieur de D_x, et l'intervalle $(b \leqslant y \leqslant B)$ à l'intérieur de D_y ; 3° La fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans D_x, D_y et sur les contours fermés Γ_x, Γ_y.

Si l'on désigne par d_x la distance la plus courte entre Γ_x et le segment (a, A), et par d_y celle entre Γ_y et le segment (b, B), il est évident que $d_x > 0$ et $d_y > 0$. Comme, en vertu du théorème classique de Cauchy, on a, pour toutes les valeurs de x, y, satisfaisant aux conditions $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$,

$$(23.2) \qquad f^{(m+n)}(x, y) = \frac{m!\,n!}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} \frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)^{m+1}(\eta - y)^{n+1}} d\xi\, d\eta \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

on voit que

$$\frac{M_{m,n}}{m!\,n!} \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \frac{G L_x L_y}{d_x^{m+1} d_y^{n+1}} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où $G = \max |f(x, y)|$ sur Γ_x, Γ_y ; L_x = longueur de Γ_x ; L_y = longueur de Γ_y.

On en déduit facilement

$$\overline{\lim_{m+n \to \infty}} \sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{m!\,n!}} \leqslant \frac{k}{\min(d_x, d_y)} < +\infty,$$

où k est une constante positive finie. D'où résulte la condition nécessaire.

Nous allons ensuite démontrer que la condition est suffisante. En prenant respectivement x_μ, y_ν dans les intervalles $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, considérons la série double de Taylor :

$$(23.3) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(x_\mu, y_\nu)}{m!\,n!} (x - x_\mu)^m (y - y_\nu)^n,$$

où l'on suppose que les rayons de convergence sont $\rho_x(x_\mu)$, $\rho_y(y_\nu)$. La quantité $\sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{m!\,n!}}$ est finie, en vertu de l'hypothèse, et l'on peut, par conséquent, trouver des quantités λ_x, λ_y telles que $\rho_x(x_\mu) \geqslant \lambda_x$, $\rho_y(y_\nu) \geqslant \lambda_y$. Il existe donc deux suites finies :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{h_x} = A, \quad b = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots\ldots < y_{h_y} = B,$$

telles que le cercle $C_\mu^{(x)}$ de centre x_μ et rayon $\rho_x(x_\mu)$ a une portion commune avec le cercle $C_{\mu+1}^{(x)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, h_x - 1)$, et telles que le cercle $C_\nu^{(y)}$ de centre y_ν et rayon $\rho_y(y_\nu)$ a une portion commune avec le cercle $C_{\nu+1}^{(y)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, h_y - 1)$. Puisque la série double (23.3) pour $x=x_\mu$, $y=y_\nu$ est holomorphe dans les cercles fermés $C_\mu^{(x)}$, $C_\nu^{(y)}$, on peut poser, pour abréger,

$$(23.4) \qquad f_{\mu,\nu}(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(m+n)}(x_\mu, y_\nu)}{m!\,n!}(x-x_\mu)^m(y-y_\nu)^n$$

$$\begin{pmatrix}\mu=0,\ 1,\ 2,\dots,\ h_x\\ \nu=0,\ 1,\ 2,\dots,\ h_y\end{pmatrix}.$$

Considérons alors, par exemple, les deux fonctions $f_{0,0}(x, y)$, $f_{1,1}(x, y)$, dont la première est holomorphe dans $C_0^{(x)}$, $C_0^{(y)}$, et la seconde dans $C_1^{(x)}$, $C_1^{(y)}$. Si l'on désigne par $Q^{(x)}$, $Q^{(y)}$, $P^{(x)}$, $P^{(y)}$ les points où les cercles $C_0^{(x)}$, $C_0^{(y)}$, $C_1^{(x)}$, $C_1^{(y)}$ coupent respectivement les segments (a, A), (b, B), (a, A), (b, B) ; alors on a

$$a< Q^{(x)}, \qquad P^{(x)}< Q^{(x)}, \qquad P^{(x)}<x_1,$$
$$b< Q^{(y)}, \qquad P^{(y)}< Q^{(y)}, \qquad P^{(y)}<y_1.$$

Comme la fonction $f_{0,0}(x, y)$ est holomorphe dans les cercles $C_0^{(x)}$, $C_0^{(y)}$, on a, en vertu de ce que nous avons dit plus haut,

$$\overline{\lim_{m+n\to\infty}}\sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}^{(0,0)}}{m!\,n!}}<+\infty,$$

où $\qquad M_{m,n}^{(0,0)}=\max|f_{0,0}^{(m+n)}(x, y)|$ dans $\begin{pmatrix}a\leqslant x\leqslant Q^{(x)}\\ b\leqslant y\leqslant Q^{(y)}\end{pmatrix}.$

Posons alors

$$g(x, y)=f_{0,0}(x, y)-f(x, y),$$
$$G_{m,n}=\max|g^{(m+n)}(x, y)| \text{ dans } \begin{pmatrix}a\leqslant x\leqslant Q^{(x)}\\ b\leqslant y\leqslant Q^{(y)}\end{pmatrix};$$

on voit, en remarquant que la quantité $\sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{m!\,n!}}$ est bornée, que la quantité $\sqrt[m+n]{\frac{G_{m,n}}{m!\,n!}}$ est bornée. D'où l'on tire

$$\frac{1}{\sqrt[m+n]{G_{m,n}}}>\frac{k}{m+n},$$

où k est une quantité positive, indépendante de m et de n. Si l'on désigne, par conséquent, par $\{\beta_{m,n}^*\}$ la minorante de M. Faber de la suite double $\{\sqrt[m+n]{G_{m,n}}\}$, on peut écrire

$$\frac{1}{\beta_{m,n}^*}>\frac{k}{m+n};$$

donc, la série double $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{m,n}^*}$ diverge. On en conclut que la fonction $g(x, y)$ est quasi-analytique dans le domaine $\begin{pmatrix}a\leqslant x\leqslant Q^{(x)}\\ b\leqslant y\leqslant Q^{(y)}\end{pmatrix}$.

Or on sait, en vertu de la définition même de la fonction $g(x, y)$, que

$$g^{(m+n)}(a, b)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix},$$

et par suite, d'après le premier théorème fondamental énoncé au n°16, $g(x, y)$ est identiquement nulle dans le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant Q^{(x)} \\ b\leqslant y\leqslant Q^{(y)} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire,

$$f_{0,0}(x, y)=f(x, y) \quad \text{dans le domaine } \begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant Q^{(x)} \\ b\leqslant y\leqslant Q^{(y)} \end{pmatrix}.$$

On peut affirmer, de même, que

$$f_{1,1}(x, y)=f(x, y) \quad \text{dans le domaine } \begin{pmatrix} P^{(x)}\leqslant x\leqslant x^{(1)} \\ P^{(y)}\leqslant y\leqslant y^{(1)} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$f_{0,0}(x, y)=f_{1,1}(x, y) \quad \text{dans le domaine } \begin{pmatrix} P^{(x)}\leqslant x\leqslant Q^{(x)} \\ P^{(y)}\leqslant y\leqslant Q^{(y)} \end{pmatrix}.$$

On voit donc que $f_{0,0}(x, y)=f_{1,1}(x, y)$ dans les portions communes à $C_0^{(x)}$ et $C_1^{(x)}$, et à $C_0^{(y)}$ et $C_1^{(y)}$. Si l'on répète cet argument tant qu'on veut, alors on est conduit, après un nombre fini de pas, à une fonction $F(x, y)$, holomorphe dans le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B \end{pmatrix}$, et coïncidant avec la fonction $f(x, y)$ sur $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B \end{pmatrix}$. On voit ainsi que la condition est certainement suffisante.

On voit, par conséquent, que la classe, définie par la suite double $\{m!\,n!\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix}$, est une classe de fonctions analytiques. Nous désignons cette classe par $C_{\{m!\,n!\}}$.

§ 12. Équivalence de deux classes C_M, $C_{M'}$

24. Étant données deux suites doubles $\{M_{m,n}\}$, $\{M'_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix}$ vérifiant la relation suivante :

$$(24.1) \qquad U=\varlimsup_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{M'_{m,n}}}<+\infty,$$

on peut trouver des entiers positifs p, q pour une valeur quelconque mais fixe λ plus grande que U, tels qu'on ait

$$M_{m,n}\leqslant\lambda^{m+n}M'_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m\geqslant p \\ n\geqslant q \end{pmatrix}.$$

Puisque les valeurs de m, n pour lesquelles cette inégalité n'a pas lieu sont seulement en nombre fini, il existe un nombre fini l de la manière :

$$M_{m,n}\leqslant l\lambda^{m+n}M'_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$(24.2)\qquad |f^{(m+n)}(x, y)| \leqslant k^{m+n} M_{m,n} \leqslant l(k\lambda)^{m+n} M'_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que la classe C_M est contenue dans C'_M. Si, au contraire, on a

$$(24.3)\qquad L = \varliminf_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{M'_{m,n}}} > 0,$$

alors on peut affirmer que la classe C_M contient $C_{M'}$. On voit donc que si

$$(24.4)\qquad 0 < \varliminf_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{M'_{m,n}}} \leqslant \varlimsup_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{M'_{m,n}}} < \infty,$$

les deux classes C_M, $C_{M'}$ représentent la même classe quasi-anlytique.

En supposant, par exemple, que la suite double $\{\beta_{m,n} = \sqrt[m+n]{M_{m,n}}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ est non décroissante par rapport à chacun des indices m, n; comparons à la classe C_M, la classe $C_{M'}$, où $M'_{m,n} = M_{m+1,n}$, à laquelle appartiennent les dérivées par rapport à x des fonctions de la première. Comme $M_{m,n} \leqslant M'_{m,n}$ en vertu de l'hypothèse, on a $U \leqslant 1$, d'où il résulte que la classe C_M est contenue dans $C_{M'}$. Il est à remarquer ici que U est exactement égal à un. Prenons, en effet, un nombre λ plus grand que U, on a

$$\frac{1}{M_{m+1,n}} < \frac{\lambda^{m+n}}{M_{m,n}} \qquad \begin{pmatrix} m \geqslant p \\ n \geqslant q \end{pmatrix}.$$

Posons alors

$$\frac{1}{M_{p,q}} = l\lambda^{\{1+2+\cdots+(p-1)\}+\{1+2+\cdots+(q-1)\}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{M_{m,n}} < l\lambda^{\{1+2+\cdots+(m-1)\}+\{1+2+\cdots+(n-1)\}} < l\lambda^{\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)} \qquad \begin{pmatrix} m \geqslant p \\ n \geqslant q \end{pmatrix},$$

et par suite

$$\frac{1}{\sqrt[m+n]{M_{m,n}}} < \sqrt[m+n]{l}\,(\sqrt{\lambda})^{m+n-1} \qquad \begin{pmatrix} m \geqslant p \\ n \geqslant q \end{pmatrix};$$

or le premier membre de cette inégalité est le terme général d'une série double divergente, et $\sqrt[m+n]{l}$ tend vers *un* lorsque m, n tendent vers l'infini. On en conclut que λ et par suite U doivent être $\geqslant 1$. On voit donc que $U = 1$.

Si, de plus, la suite double $\left\{\frac{\beta_{m+1,n}}{\beta_{m,n}}\right\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ est bornée supérieurement, c'est-à-dire si

$$\lim_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{M'_{m,n}}} > 0,$$

alors la classe $C_{M'}$ désigne la même classe quasi-analytique que C_M.

25. Il est bien connu, en vertu de la formule de Stirling, que $m!$ est un infiniment grand équivalent à $m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}$. Or on sait, quel que soit $p>1$, que l'inégalité $\sqrt{2\pi m}<p^m$ a lieu à partir d'une certaine valeur de m. On peut donc affirmer un nombre λ tel qu'on ait $\sqrt{2\pi m}<\lambda p^m$ pour tout entier positif (incl. zéro) m; d'où l'on tire

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m < m! < \lambda\left(\frac{pm}{e}\right)^m.$$

En désignant par q un nombre quelconque >1, et par μ une quantité telle qu'on ait $\sqrt{2\pi n}>\mu q^n$ pour tout entier positif (incl. zéro) n; on a de même

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \mu\left(\frac{qn}{e}\right)^n.$$

Il en résulte que

$$\frac{m^m n^n}{e^{m+n}} < m!\,n! < \lambda\mu\, p^m q^n \frac{m^m n^n}{e^{m+n}},$$

d'où l'on conclut que la classe $C\{m!\,n!\}$ est équivalente à $C\{m^m n^n\}$, c'est-à-dire que la classe des fonctions analytiques est aussi désignée par $C\{m^m n^n\}$. On peut en déduire aussi que toute fonction analytique est certainement contenue dans toute classe quasi-analytique.

26. Supposons, en plus, que les deux suites doubles $\left\{\frac{\beta_{m,n}}{m\beta_{m-1,n}}\right\}$, $\left\{\frac{\beta_{m,n}}{n\beta_{m,n-1}}\right\}$ sont non décroissantes; alors les deux suites doubles $\left\{\frac{\beta_{m,n}}{\beta_{m-1,n}}\right\}$, $\left\{\frac{\beta_{m,n}}{\beta_{m,n-1}}\right\}$ sont croissantes, et $\lim\limits_{m+n\to\infty}\frac{\beta_{m,n}}{m\beta_{m-1,n}}$ et $\lim\limits_{m+n\to\infty}\frac{\beta_{m,n}}{n\beta_{m,n-1}}$ sont des constantes positives ou $+\infty$. Nous pouvons donc, en utilisant ces expressions, comparer la classe C_M considérée à la classe analytigue $C\{m!\,n!\}$. La classe C_M est analytique si les deux limites sont positives finies, et elle contient la classe analytique si l'une des limites est $+\infty$. Lorsque, par exemple, on a $\beta_{m,n}<e^{k(m+n)}$, k étant un nombre positif fini, à partir d'un certain rang, la classe C_M contient la classe analytique, et représente une classe plus étendue que la dernière.

Dans ce cas où nous nous plaçons, on a

$$\frac{1}{m^{m-1+n}}\left(\frac{\beta_{m,n}}{\beta_{m-1,n}}\right)^{m-1+n} < \frac{1}{(m+1)^{m+n}}\left(\frac{\beta_{m+1,n}}{\beta_{m,n}}\right)^{m+n}.$$

En multipliant cette inégalité par $\beta_{m,n}$, et en remarquant

$$\frac{m^{m-2+n}}{(m+1)^{m-1+n}} < \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1+n} < 1,$$

on a

$$\frac{M_{m,n}}{mM_{m-1,n}} < \frac{M_{m+1,n}}{(m+1)M_{m,n}}.$$

On a de même

$$\frac{M_{m,n}}{nM_{m,n-1}} < \frac{M_{m,n+1}}{(n+1)M_{m,n}}.$$

Il en résulte que

$$(26.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{M_{p-1,n}}{(p-1)!\,n!}\cdot\frac{M_{m,n}}{m!\,n!} < \frac{M_{p,n}}{p!\,n!}\cdot\frac{M_{m-1,n}}{(m-1)!\,n!} \qquad (m \geqslant p), \\ &\frac{M_{m,q-1}}{m!\,(q-1)!}\cdot\frac{M_{m,n}}{m!\,n!} < \frac{M_{m,q}}{m!\,q!}\cdot\frac{M_{m,n-1}}{m!\,(n-1)!} \qquad (n \geqslant q). \end{aligned}$$

Prenons maintenant de la classe C_M donnée, les deux sous-classes, représentées par C_{M,k_1}, C_{M,k_2}, composées par des fonctions indéfiniment dérivables et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(26.2)\qquad |f_1^{(m+n)}(x,y)| \leqslant k_1^{m+n} M_{m,n},\quad |f_2^{(m+n)}(x,y)| \leqslant k_2^{m+n} M_{m,n} \qquad \left(\begin{matrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{matrix}\right),$$

et appliquons (26.1) au produit $h(x,y)=f_1(x,y)\,f_2(x,y)$. Alors, on a

$$(26.3)\qquad \begin{aligned} |h^{(m+n)}(x,y)| < {} & (k_1^m + k_1^{m-1}k_2 + \dots + k_2^m) \\ & \times (k_1^n + k_1^{n-1}k_2 + \dots + k_2^n)\ M_{0,0}\ M_{m,n}, \end{aligned}$$

et l'on peut distinguer les deux cas suivants :

Premier cas : $k_1 \neq k_2$, et l'on suppose, pour fixer les idées, que $k_1 > k_2$. Dans ce cas, l'inégalité (26.3) devient

$$\begin{aligned} |h^{(m+n)}(x,y)| &< k_1^{m+n}\left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \dots + \frac{k_2^m}{k_1^m}\right) \\ &\qquad \times \left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \dots + \frac{k_2^n}{k_1^n}\right) M_{0,0}\,M_{m,n} \\ &< k_1^{m+n}\left(\frac{k_1}{k_1-k_2}\right)^2 M_{0,0}\,M_{m,n}. \end{aligned}$$

On voit donc que le produit d'une fonction de la classe C_{M,k_1} par une fonction de la classe C_{M,k_2}, k_2 étant $<k_1$, est une fonction de la première. Si l'on remarque que toute fonction analytique est contenue dans toute classe quasi-analytique, on voit que le produit d'une fonction de la classe quasi-analytique par une fonction analytique est une fonction de cette classe.

Deuxième cas : $k_1 = k_2$. L'inégalité (26.3) devient, dans ce cas,

$$|h^{(m+n)}(x, y)| < (m+1)(n+1)k_1^{m+n} M_{0,0} M_{m,n}.$$

Le produit appartient donc à la classe définie par la suite double

$$\{(m+1)(n+1)M_{m,n}\}.$$

Or il est évident que $\sqrt[mn]{(m+1)(n+1)}$ tend vers 1 lorsque m, n augmentent indéfiniment, d'où l'on conclut que cette classe coïncide avec la classe donnée. C'est-à-dire, le produit de deux fonctions de la classe quasi-analytique appartient aussi à la même classe.

Remarque: Il semble que l'extension, par nos méthodes, de ces résultats aux fonctions de plus de deux variables, ne présentrait d'autre difficulté que des longueurs de rédaction.

Nous tenons à la fin de ce mémoire à remercier M. le professeur Tosizô Matumoto, qui a bien voulu lire notre manuscrit et nous aider par quelques remarques très utiles dont nous avons tiré grand profit.