Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (II)

Par **Sikazô Kodama**

(Reçu en Avril 15. 1939)

---

1. Nous allons considérer, avec M. Carleman, un procédé du calcul effectif d'une fonction quasi-analytique de deux variables dans la classe donnée par sa valeur et celles de ses dérivées partielles successives en un point du domaine d'existence.

Étant donnée une suite double $\{M_{m,n}\}\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ de quantités positives, désignons par C_M une classe de fonctions $f(x, y)$ indéfiniment dérivables dans le domaine $\begin{pmatrix} 0\leqslant x\leqslant a \\ 0\leqslant y\leqslant b \end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions :

$$(1.1) \qquad |f^{(m+n)}(x, y)| \leqslant k^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0\leqslant x\leqslant a\,;\ m=0, 1, 2, \dots \\ 0\leqslant y\leqslant b\,;\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

où k est une constante dépendant seulement du choix de la fonction $f(x, y)$.

On sait, en vertu du théorème énoncé au n°22 de mon mémoire précédent, que la condition nécessaire et suffisante pour que cette classe C_M soit quasi-analytique est que la série double

$$(1.2) \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{m,n}^{*}}$$

où $\{\beta_{m,n}^{*}\}$ est la minorante de M. Faber de la suite double donnée $\{\beta_{m,n}=\sqrt[m+n]{M_{m,n}}\}$, ou l'intégrale double

$$(1.3) \qquad \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}, \quad \left[\text{où } T(R, r)=\max_{m,n\geq 0}\frac{R^m r^n}{M_{m,n}}\right],$$

soit divergente. Nous allons affirmer que si $f(x, y)$ est une fonction quasi-analytique de la classe donnée C_M, et si $\{c_{m,n}\}\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ est une suite double de quantités données satisfaisant aux relations

$$(1.4) \qquad f^{(m+n)}(0, 0)=m\,!\,n\,!\,c_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

alors on peut calculer cette fonction $f(x, y)$ par les quantités $c_{m,n}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$; en autres termes, nous allons résoudre les deux problèmes suivants :

Premier problème : Calcul effectif d'une fonction $f(x, y)$ au moyen des quantités données $c_{m,n}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ satisfaisant aux relations (1.4);

Deuxième problème: Recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction quasi-analytique $f(x, y)$ de la classe donnée C_M, vérifiant les relations (1.4).

§ 1. Certaines équations intégrales

2. Étant donnée une suite double finie des quantités positives:

$$(2.1) \qquad \gamma_{p,q} \qquad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \dots, m-1, m \\ q=0, 1, 2, \dots, n-1, n \end{pmatrix},$$

nous allons d'abord trouver le minimum de l'expression

$$(2.2) \qquad I_{m,n}(f)=I=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\gamma_{p,q}\int_0^1\int_0^1[f^{(p+q)}(x,y)]^2dxdy$$

d'une fonction $f(x, y)$ variable dans le domaine $\begin{pmatrix} 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0\leqslant y\leqslant 1 \end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(2.3) \qquad f^{(p+q)}(0, 0)=p!\,q!\,c_{p,q}$$
$$\begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \dots, m-1, m \\ q=0, 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \dots, m-1 \\ q=n \end{pmatrix}.$$

La première variation de l'expression I peut s'écrire

$$\delta I=2\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\gamma_{p,q}\int_0^1\int_0^1 f^{(p+q)}(x, y)\delta f^{(p+q)}(x, y)dxdy,$$

or on a, d'autre part,

$$\delta f^{(p+n)}(x, y)=\int_0^x\frac{(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}\delta f^{(m+n)}(u, y)du + \sum_{\lambda=0}^{m-p-1}\frac{x^\lambda}{\lambda!}\delta f^{\{(p+\lambda)+n\}}(0, y) \qquad (p=0, 1, 2, \dots, m-1),$$

$$\delta f^{(m+q)}(x, y)=\int_0^y\frac{(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}\delta f^{(m+n)}(x, v)dv + \sum_{\mu=0}^{n-q-1}\frac{y^\mu}{\mu!}\delta f^{\{m+(q+\mu)\}}(x, 0) \qquad (q=0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\delta f^{(p+q)}(x, y)=\int_0^x\int_0^y\frac{(x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1}}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!}\delta f^{(m+n)}(u, v)dudv + \sum_{\lambda=0}^{m-p-1}\frac{x^\lambda}{\lambda!}\delta f^{\{(p+\lambda)+q\}}(0, y)+\sum_{\mu=0}^{n-q-1}\frac{y^\mu}{\mu!}\delta f^{\{p+(q+\mu)\}}(x, 0)$$
$$(p=0, 1, 2, \dots, m-1;\ q=0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\delta f^{(p+q)}(0, y)=\int_0^y\frac{(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}\delta f^{(p+n)}(0, v)dv$$
$$(p=0, 1, 2, \dots, m-1;\ q=0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\delta f^{(p+q)}(x, 0) = \int_0^x \frac{(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}\delta f^{(m+q)}(u, 0)du$$
$$(p=0, 1, 2, \ldots, m-1\;;\; q=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

En substituant ces relations dans l'expression de δI, il vient, après un changement de l'ordre d'intégration,

$$\begin{aligned}\delta I = 2\int_0^1\int_0^1\Big\{&\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\int_u^1\int_v^1 \frac{(x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1}}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!}f^{(p+q)}(x, y)dxdy \\ &+\sum_{p=0}^{m-1}\gamma_{p,n}\int_u^1\frac{(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}f^{(p+n)}(x, v)dx \\ &+\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{m,q}\int_v^1\frac{(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}f^{(m+q)}(u, y)dy \\ &+\gamma_{m,n}f^{(m+n)}(u, v)\Big\}\delta f^{(m+n)}(u, v)dudv \\ +2\sum_{p=0}^{m-1}\int_0^1\int_0^1\Big\{&\sum_{q=0}^{n-1}\int_v^1\Big[\sum_{\lambda=0}^{p}\gamma_{p-\lambda,q}\frac{x^\lambda}{\lambda!}f^{\{(p-\lambda)+q\}}(u, y)\Big]\frac{(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}dy \\ &+\sum_{\lambda=0}^{p}\gamma_{p-\lambda,n}\frac{x^\lambda}{\lambda!}f^{\{(p-\lambda)+n\}}(u, v)\Big\}\delta f^{(p+n)}(0, v)dudv \\ +2\sum_{q=0}^{n-1}\int_0^1\int_0^1\Big\{&\sum_{p=0}^{m-1}\int_u^1\Big[\sum_{\mu=0}^{q}\gamma_{p,q-\mu}\frac{y^\mu}{\mu!}f^{\{p+(q-\mu)\}}(x, v)\Big]\frac{(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}dx \\ &+\sum_{\mu=0}^{q}\gamma_{m,q-\mu}\frac{y^\mu}{\mu!}f^{\{m+(q-\mu)\}}(u, v)\Big\}\delta f^{(m+q)}(u, 0)dudv.\end{aligned}$$

Comme $\delta I=0$ a lieu pour le minimum de l'expression I, on a

$$(2.4)\qquad \begin{aligned}\gamma_{m,n}f^{(m+n)}(u,v) &+ \sum_{p=0}^{m-1}\int_u^1\gamma_{p,n}\frac{(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}f^{(p+n)}(x, v)dx \\ &+\sum_{q=0}^{n-1}\int_v^1\gamma_{m,q}\frac{(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}f^{(m+q)}(u, y)dy \\ &+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\int_u^1\int_v^1\gamma_{p,q}\frac{(x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1}}{(m-p-1)!(n-q-1)!}f^{(p+q)}(x, y)dxdy=0,\end{aligned}$$

$$(2.5_1)\qquad \sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\int_v^1\frac{(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}f^{(p+q)}(u, y)dy+\gamma_{p,n}f^{(p+n)}(u, v)=0$$
$$(p=0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$(2.5_2)\qquad \sum_{p=0}^{m-1}\gamma_{p,q}\int_u^1\frac{(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}f^{(p+q)}(x, v)dx+\gamma_{m,q}f^{(m+q)}(u, v)=0$$
$$(q=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on considère simultanément (2.4) et (2.5_1), on a $m+1$ équations ($p=0, 1, 2, \ldots, m$) déjà considérées par M. Carleman[1]. Il en est de même

1. T. Carleman: Les fonctions quasi analytiques, (1926) p. 66.

lorsqu'on considère simultanément (2.4) et (2.5$_2$). Il suffit donc de considérer seulement (2.4). Si l'on introduit ici les substitutions suivantes :

$$f^{(p+n)}(x,v)=\frac{1}{(m-p-1)!}\int_0^x (x-u)^{m-p-1} f^{(m+n)}(u,v)\,du+P_1^{(p+n)}(x,v)$$
$$(p=0,1,2,\ldots,m-1),$$

$$f^{(m+q)}(u,y)=\frac{1}{(n-q-1)!}\int_0^y (y-v)^{n-q-1} f^{(m+n)}(u,v)\,dv+P_2^{(m+q)}(u,y)$$
$$(q=0,1,2,\ldots,n-1),$$

$$\begin{aligned} f^{(p+q)}(x,y)=&\frac{1}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!}\\ &\times\int_0^x\!\!\int_0^y (x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1} f^{(m+n)}(u,v)\,du\,dv+P_3^{(p+q)}(x,v)\\ &+P_3^{(p+q)}(u,y) \qquad \begin{pmatrix} p=0,1,2,\ldots,m-1\\ q=0,1,2,\ldots,n-1\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$P_1(x,y)=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n} c_{p,q}x^p y^q, \quad P_2(x,y)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n-1} c_{p,q}x^p y^q,$$
$$P_3(x,y)=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} c_{p,q}x^p y^q,$$

on voit que l'égalité (2.4) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\gamma_{m,n}f^{(m+n)}(u,v)+\int_u^1\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\gamma_{p,n}(x-u)^{m-p-1}}{\{(m-p-1)!\}^2}\left\{\int_0^x (x-t)^{m-p-1}f^{(m+n)}(t,v)\,dt\right\}dx\\ &\quad+\int_v^1\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\gamma_{m,q}(y-v)^{n-q-1}}{\{(n-q-1)!\}^2}\left\{\int_0^y (y-s)^{n-q-1}f^{(m+n)}(u,s)\,ds\right\}dy\\ &\quad+\int_u^1\!\!\int_v^1\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\gamma_{p,q}(x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1}}{\{(m-p-1)!\,(n-q-1)!\}^2}\\ (2.6)&\qquad\times\left\{\int_0^x\!\!\int_0^y (x-t)^{m-p-1}(y-s)^{n-q-1}f^{(m+n)}(t,s)\,dt\,ds\right\}dx\,dy\\ &=-\int_u^1\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\gamma_{p,n}(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}P_1^{(p+n)}(x,v)\,dx\\ &\quad-\int_v^1\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\gamma_{m,q}(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}P_2^{(m+q)}(u,y)\,dy\\ &\quad-\int_u^1\!\!\int_v^1\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\gamma_{p,q}(x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1}}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!}\\ &\qquad\times\{P_3^{(p+q)}(x,v)+P_3^{(p+q)}(u,y)\}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Considérons encore un changement de l'ordre d'intégration dans chacune des trois intégrales du premier membre de l'égalité (2.6). Comme on a

$$\int_u^1 dx\int_0^x dt=\int_0^u dt\int_u^1 dx+\int_u^1 dt\int_t^1 dx,$$

on voit, en posant

$$K_1(u, t)=\int_u^1 (x-u)^\lambda (x-t)^\lambda dx \qquad (t\leqslant u), \qquad [\text{où } \lambda=m-p-1],$$

$$=(1-u)^{\lambda+1}\left\{\frac{1}{2\lambda+1}(1-u)^\lambda+\frac{1}{2\lambda}\binom{\lambda}{1}(u-t)(1-u)^{\lambda-1}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{1}{\lambda+1}\binom{\lambda}{\lambda}(u-t)^\lambda\right\},$$

$$K_1(t, u)=\int_t^1 (x-u)^\lambda (x-t)^\lambda dx \qquad (u\leqslant t),$$

$$=(1-t)^{\lambda+1}\left\{\frac{1}{2\lambda+1}(1-t)^\lambda+\frac{1}{2\lambda}\binom{\lambda}{1}(t-u)(1-t)^{\lambda-1}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{1}{\lambda+1}\binom{\lambda}{\lambda}(t-u)^\lambda\right\},$$

et en désignant par $\Gamma_1(u\,;\,t)$ la fonction définie de la manière suivante :

$$\Gamma_1(u\,;\,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{p=0}^{m-1}\gamma_{p,n}\frac{K_1(u, t)}{\{(m-p-1)\,!\}^2} & (0\leqslant t\leqslant u),\\ \displaystyle\sum_{p=0}^{m-1}\gamma_{p,n}\frac{K_1(t, u)}{\{(m-p-1)\,!\}^2} & (u\leqslant t\leqslant 1),\end{cases}$$

qui est continue dans le domaine $0\leqslant {u \atop t}\leqslant 1$, que la première intégrale écrite dans le premier membre de l'égalité (2.6) peut s'écrire

$$\int_0^1 \Gamma_1(u\,;\,t) f^{(m+n)}(t,\, v)dt.$$

On voit de même, en posant

$$K_2(v, s)=\int_v^1 (y-v)^\mu (y-s)^\mu dy \qquad (s\leqslant v), \qquad [\text{où } \mu=n-q-1],$$

$$=(1-v)^{\mu+1}\left\{\frac{1}{2\mu+1}(1-v)^\mu+\frac{1}{2\mu}\binom{\mu}{1}(v-s)(1-v)^{\mu-1}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{1}{\mu+1}\binom{\mu}{\mu}(v-s)^\mu\right\},$$

$$K_2(s, v)=\int_s^1 (y-v)^\mu (y-s)^\mu dy \qquad (v\leqq s),$$

$$=(1-s)^{\mu+1}\left\{\frac{1}{2\mu+1}(1-s)^\mu+\frac{1}{2\mu}\binom{\mu}{1}(s-v)(1-s)^{\mu-1}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{1}{\mu+1}\binom{\mu}{\mu}(s-v)^\mu\right\},$$

et en désignant par $\Gamma_2(v\,;\,s)$ la fonction définie de la manière suivante :

$$\Gamma_2(v\,;\,s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{m,q}\frac{K_2(v,s)}{\{(n-q-1)!\}^2} & (0\leqq s\leqq v),\\ \displaystyle\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{m,q}\frac{K_2(s,v)}{\{(n-q-1)!\}^2} & (v\leqq s\leqq 1),\end{cases}$$

qui est continue dans le domaine $0\leqq {v \atop s}\leqq 1$, que la deuxième intégrale écrite dans le premier membre de l'égalité (2.6) peut s'écrire

$$\int_0^1\Gamma_2(v\,;\,s)f^{(m+n)}(u,s)ds.$$

On voit ensuite, en désignant par $\Gamma(u,v\,;\,t,s)$ la fonction continue définie de la manière suivante :

$$\Gamma(u,v\,;\,t,s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\frac{K_1(u,t)\,K_2(v,s)}{\{(m-p-1)!\,(n-q-1)!\}^2} & \begin{pmatrix}0\leqq t\leqq u\\ 0\leqq s\leqq v\end{pmatrix},\\ \displaystyle\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\frac{K_1(u,t)\,K_2(s,v)}{\{(m-p-1)!\,(n-q-1)!\}^2} & \begin{pmatrix}0\leqq t\leqq u\\ v\leqq s\leqq 1\end{pmatrix},\\ \displaystyle\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\frac{K_1(t,u)\,K_2(v,s)}{\{(m-p-1)!\,(n-q-1)!\}^2} & \begin{pmatrix}u\leqq t\leqq 1\\ 0\leqq s\leqq v\end{pmatrix},\\ \displaystyle\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\frac{K_1(t,u)\,K_2(s,v)}{\{(m-p-1)!\,(n-q-1)!\}^2} & \begin{pmatrix}u\leqq t\leqq 1\\ v\leqq s\leqq 1\end{pmatrix},\end{cases}$$

que la troisième intégrale du premier membre de l'égalité (2.6) peut s'écrire

$$\int_0^1\!\!\int_0^1\Gamma(u,v\,;\,t,s)f^{(m+n)}(t,s)dtds.$$

En résumé, on voit que l'égalité (2.6) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\gamma_{m,n}f^{(m+n)}(u,v)&+\int_0^1\Gamma_1(u\,;\,t)f^{(m+n)}(t,v)dt\\ &+\int_0^1\Gamma_2(v\,;\,s)f^{(m+n)}(u,s)ds\\ &+\int_0^1\!\!\int_0^1\Gamma(u,v\,;\,t,s)f^{(m+n)}(t,s)dtds\\ &=-\int_u^1\sum_{p=0}^{m-1}\gamma_{p,n}\frac{(x-u)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}P_1^{(p+n)}(x,v)dx\\ &\quad-\int_v^1\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{m,q}\frac{(y-v)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}P_2^{(m+q)}(u,y)dy\\ &\quad-\int_u^1\!\!\int_v^1\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\frac{(x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1}}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!}\\ &\qquad\times\{P_3^{(p+q)}(x,v)+P_3^{(p+q)}(u,y)\}dxdy.\end{aligned}\tag{2.7}$$

3. Supposons que les conditions

$$f^{(p+q)}(0,0)=0$$

$$\begin{pmatrix}p=0,1,2\ldots,m-1,m\\ q=0,1,2\ldots,n-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}p=0,1,2,\ldots,m-1\\ q=n\end{pmatrix}$$

sont satisfaites. Si l'on désigne, pour abréger, par $L[f^{(m+n)}(u, v)]$ le premier membre de l'égalité (2.7), alors on a

$$
\begin{aligned}
L[f^{(m+n)}(u, v)] = \gamma_{m,n} f^{(m+n)}(u, v) & \\
& + \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\gamma_{p,n}}{(m-p-1)!} \int_u^1 (x-u)^{m-p-1} f^{(p+n)}(x, v) dx \\
& + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\gamma_{m,q}}{(n-q-1)!} \int_v^1 (y-v)^{n-q-1} f^{(m+q)}(u, y) dy \qquad (3.1) \\
& + \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\gamma_{p,q}}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!} \\
& \quad \times \int_u^1 \int_v^1 (x-u)^{m-p-1} (y-v)^{n-q-1} f^{(p+q)}(x, y) dx dy.
\end{aligned}
$$

Si $g(x, y)$, $h(x, y)$ sont donc tous les deux des fonctions dérivables m fois par rapport *à* x et n fois par rapport *à* y, et satisfaisant aux conditions :

$$
g^{(p+q)}(0, 0) = h^{(p+q)}(0, 0) = 0
$$

$$
\begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots, m-1, m \\ q = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ q = n \end{pmatrix},
$$

alors on a l'identité suivante :

$$
\begin{aligned}
(3.2) \qquad & \int_0^1 \int_0^1 g^{(m+n)}(u, v) L[h^{(m+n)}(u, v)] du dv \\
& = \sum_{q=0}^{m} \sum_{p=0}^{n} \gamma_{p,q} \int_0^1 \int_0^1 g^{(p+q)}(u, v) h^{(p+q)}(u, v) du dv ;
\end{aligned}
$$

car, le premier membre de cette égalité peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 g^{(m+n)}(u, v) \Big\{ & \gamma_{m,n} h^{(m+n)}(u, v) \\
& + \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\gamma_{p,n}}{(m-p-1)!} \int_u^1 (x-u)^{m-p-1} h^{(p+n)}(x, v) dx \\
& + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\gamma_{m,q}}{(n-q-1)!} \int_v^1 (y-v)^{n-q-1} h^{(m+q)}(u, y) dy \\
& + \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\gamma_{p,q}}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!} \\
& \quad \times \int_u^1 \int_v^1 (x-u)^{m-p-1} (y-v)^{n-q-1} h^{(p+q)}(x, y) dx dy \Big\} du dv \\
= \gamma_{m,n} & \int_0^1 \int_0^1 g^{(m+n)}(u, v) h^{(m+n)}(u, v) du dv \\
& + \sum_{p=0}^{m-1} \gamma_{p,n} \int_0^1 \Big\{ \frac{1}{(m-p-1)!} \int_0^1 h^{(p+n)}(x, v) dx \\
& \quad \times \int_0^x (x-u)^{m-p-1} g^{(m+n)}(u, v) du \Big\} dv \\
& + \sum_{q=0}^{n-1} \gamma_{m,q} \int_0^1 \Big\{ \frac{1}{(n-q-1)!} \int_0^1 h^{(m+q)}(u, y) dy
\end{aligned}
$$

$$\times \int_0^y (y-v)^{n-q-1} g^{(m+n)}(u, v)dv\Big\}du$$

$$+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\gamma_{p,q}}{(m-p-1)!\,(n-q-)!}\int_0^1\int_0^1 h^{(p+q)}(x, y)dxdy$$

$$\times\int_0^x\int_0^y (x-u)^{m-p-1}(y-v)^{n-q-1}g^{(m+n)}(u, v)dudv$$

$$=\gamma_{m,n}\int_0^1\int_0^1 g^{(m+n)}(u, v)h^{(m+n)}(u, v)dudv$$

$$+\sum_{p=0}^{m-1}\gamma_{p,n}\int_0^1\int_0^1 g^{(p+n)}(x, v)h^{(p+n)}(x, v)dxdv$$

$$+\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{m,q}\int_0^1\int_0^1 g^{(m+q)}(u, y)h^{(m+q)}(u, y)dudy$$

$$+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\gamma_{p,q}\int_0^1\int_0^1 h^{(p+q)}(x, y)g^{(p+q)}(x, y)dxdy$$

$$=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\gamma_{p,q}\int_0^1\int_0^1 g^{(p+q)}(u, v)h^{(p+q)}(u, v)dudv\,;$$

ce qui prouve notre affirmation.

4. Soit, en particulier,

$$g^{(m+n)}(x, y)=h^{(m+n)}(x, y)=\varphi(x, y),$$

où l'on suppose que $\varphi(x, y)$ est une fonction quelconque à carré intégrable, alors on peut déduire de l'identité (3.2) une autre suivante :

$$\int_0^1\int_0^1\varphi(u, v)L[\varphi(u, v)]\,dudv=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\gamma_{p,q}\int_0^1\int_0^1[\Phi_{p,q}(u, v)]^2dudv,$$

où

$$\Phi_{p,q}(u, v)=\int_0^u\int_0^v\frac{(u-x)^{m-p-1}(v-y)^{n-q-1}}{(m-p-1)!\,(n-q-1)!}\varphi(x, y)dxdy$$

$$(p=0, 1, 2, \ldots, m-1\,;\ q=0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\Phi_{m,q}(u, v)=\int_0^v\frac{(v-y)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}\varphi(u, y)dy \qquad (q=0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\Phi_{p,n}(u, v)=\int_0^u\frac{(u-x)^{m-p-1}}{(m-p-1)!}\varphi(x, v)dx \qquad (p=0, 1, 2, \ldots, m-1)\,;$$

d'où l'on tire :

$$(4.1)\qquad \int_0^1\int_0^1\varphi(u, v)L[\varphi(u, v)]dudv$$

$$=\gamma_{m,n}\int_0^1\int_0^1\{\varphi(u, v)\}^2dudv$$

$$+\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\gamma_{p,n}}{\{(m-p-1)!\}^2}\int_0^1\int_0^1\Big\{\int_0^u(u-x)^{m-p-1}\varphi(x, v)dx\Big\}^2dudv$$

$$+\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\gamma_{m,q}}{\{(n-q-1)!\}^2}\int_0^1\!\!\int_0^1\left\{\int_0^v(v-y)^{n-q-1}\varphi(u,y)dy\right\}^2dudv$$
$$+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\gamma_{p,q}}{\{(m-p-1)!(n-q-1)!\}^2}$$
$$\times\int_0^1\!\!\int_0^1\left\{\int_0^u\!\!\int_0^v(u-x)^{m-p-1}(v-y)^{n-q-1}\varphi(x,y)dxdy\right\}^2dudv.$$

Or on peut affirmer facilement que l'équation intégrale homogène

$$L[\varphi(u,v)]=\gamma_{m,n}\varphi(u,v)+\int_0^1\Gamma_1(u\,;\,t)\varphi(t,v)dt+\int_0^1\Gamma_2(v\,;\,s)\varphi(u,s)ds$$
$$+\int_0^1\!\!\int_0^1\Gamma(u,v\,;\,t,s)\varphi(t,s)dtds=0$$

n'admet pas de solution non nulle. En effet, pour une solution de l'équation

$$L[\varphi(u,v)]=0,$$

on devrait avoir

$$\int_0^1\!\!\int_0^1\varphi(u,v)L[\varphi(u,v)]dudv=0,$$

d'où il résulte que le second membre de l'égalité (4.1) devrait aussi être égal á zéro. Mais ce membre est une somme des termes non négatifs en nombre fini. On en déduit que

$$\int_0^1\!\!\int_0^1\{\varphi(u,v)\}^2dudv=0,$$

ce qui prouve notre affirmation.

On voit donc que l'équation (2.7) admet une et une seule solution $f^{(m+n)}(u,v)$. Si l'on désigne, pour abréger, par $G(u,v)$ le second membre de l'équation (2.7), on peut écrire sa solution $f^{(m+n)}(u,v)$ sous la forme

$$f^{(m+n)}(u,v)=\frac{1}{\gamma_{m,n}}G(u,v)+\int_0^1H_1(u\,;\,t)G(t,v)dt+\int_0^1H_2(v\,;\,s)G(u,s)ds$$
$$+\int_0^1\!\!\int_0^1H(u,v\,;\,t,s)G(t,s)dtds,$$

où les fonctions $H_1(u\,;\,t)$, $H_2(v\,;\,s)$, $H(u,v\,;\,t,s)$ ne dépendent que de ses variables et des constantes (2.1). Or il est évident que la fonction $G(u,v)$ est une expression linéaire par rapport à

$$(4.2)\qquad\begin{array}{llllll}
c_{0,0}, & c_{0,1}, & c_{0,2}, & \ldots\ldots, & c_{0,n-1}, & c_{0,n},\\
c_{1,0}, & c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots\ldots, & c_{1,n-1}, & c_{1,n},\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots,\\
c_{m-1,0}, & c_{m-1,1}, & c_{m-1,2}, & \ldots\ldots, & c_{m-1,n-1}, & c_{m-1,n},\\
c_{m,0}, & c_{m,1}, & c_{m,2}, & \ldots\ldots, & c_{m,n-1}, &
\end{array}$$

et par suite, on voit que la solution $f^{(m+n)}(u, v)$ est aussi linéaire par rapport à (4.2). En remarquant alors la relation

$$
(4.3) \qquad f(x, y)=\int_0^x\int_0^y \frac{(x-u)^{m-1}(y-v)^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!}f^{(m+n)}(u, v)\,du\,dv + P_3(x, v)+P_3(u, y),
$$

on peut écrire la fonction $f(x, y)$ sous la forme suivante:

$$
(4.4) \qquad f(x, y)=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}c_{p,q}\omega_{p,q}(x, y) + \sum_{p=0}^{m-1}c_{p,n}\omega_{p,n}(x, y)+\sum_{q=0}^{n-1}c_{m,q}\omega_{m,q}(x, y),
$$

où $\omega_{p,q}(x, y)$, $\omega_{p,n}(x, y)$, $\omega_{m,q}(x, y)$ sont indépendants des constantes (4.2).

§ 2. Un lemme

5. *Si* $\{\beta_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ *est une suite double de quantités positives, tendant vers l'infini avec* m, n, *et si l'intégrale double*

$$
(5.1) \qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2} \quad \left[\text{où } T(R, r)=\max_{m,n\geq 0}\frac{R^m r^n}{(\beta_{m,n})^{m+n}}\right],
$$

diverge, alors on peut toujours trouver une suite double $\{\alpha_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ *de quantités positives satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$
(5.2) \qquad \lim_{m,n\to\infty}\frac{\beta_{m,n}}{\alpha_{m,n}}=0,
$$

$$
(5.3) \qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \log T_1(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}=\infty,
$$

$$
\left[\text{où } T_1(R, r)=\max_{m,n\geq 0}\frac{R^m r^n}{(\alpha_{m,n})^{m+n}}\right].
$$

Considérons, en effet, une suite simple $\{k_\lambda\}$ ($\lambda=0, 1, 2, \dots$) de quantités positives croissantes, tendant vers l'infini avec λ. Comme, par hypothèse, l'intégrale double (5.1) diverge, on voit, quel que soit l'entier positif (incl. zéro) donné λ, que l'intégrale double

$$
\int_1^\infty\int_1^\infty \log T\left(\frac{R}{k_\lambda}, \frac{r}{k_\lambda}\right)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}
$$

diverge aussi. Mais on sait que la somme des indices m, n dans l'expression $T(R, r)$ est une fonction croissante, tendant vers l'infini avec ses variables, et que d'ailleurs la fonction $T(R, r)$ même est continue, croissante, et tend vers l'infini avec ses variables. Par conséquent, on peut trouver une suite partielle $\{m_\lambda+n_\lambda\}$, telle qu'on ait

$$(5.4)\quad \int_1^\infty\int_1^\infty \log\left\{\max_{m_\lambda+n_\lambda+1\leqslant m+n\leqslant m_{\lambda+1}+n_{\lambda+1}} \frac{R^m r^n}{(k_\lambda\beta_{m,n})^{m+n}}\right\}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}>\lambda.$$

Il est évident, bien entendu, que telle suite partielle $\{m_\lambda+n_\lambda\}$ tend, en croissant, vers l'infini avec λ. En utilisant la suite partielle $\{m_\lambda+n_\lambda\}$ ainsi trouvée, posons

$$a_{m,n}=k_\lambda\beta_{m,n}\qquad (m_\lambda+n_\lambda+1\leqslant m+n\leqslant m_{\lambda+1}+n_{\lambda+1})\,;$$

alors l'intégrale double (5.4) peut s'écrire sous la forme

$$(5.5)\quad \int_1^\infty\int_1^\infty \log\left\{\max_{m_\lambda+n_\lambda+1\leqslant m+n\leqslant m_{\lambda+1}+n_{\lambda+1}} \frac{R^m r^n}{(a_{m,n})^{m+n}}\right\}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}>\lambda\,;$$

d'où il résulte tout facilement que cette suite double $\{a_{m,n}\}$ satisfait aux conditions écrites plus haut (5.2), (5.3), ce qui démontre notre lemme.

6. Si l'on remarque que l'intégrale double

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R,r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

converge ou diverge en même temps que la série double

$$\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\beta^*_{m,n}},$$

où $\{\beta^*_{m,n}\}$ est, bien entendu, la minorante de M. Faber de la suite double donnée $\{\beta_{m,n}\}$, alors on peut encore énoncer ce lemme de la manière suivante :

Si la suite double $\{\beta^*_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots\\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}$ *est la minorante de M. Faber de la suite double* $\{\beta_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots\\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}$ *de quantités positives données, telle que la série double*

$$(6.1)\qquad \sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\beta^*_{m,n}}$$

diverge, alors on peut toujours trouver une suite double $\{a_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots\\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix}$ *de quantités positives satisfaisant aux conditions*

$$(6.2)\qquad \lim_{m,n\to\infty}\frac{\beta_{m,n}}{a_{m,n}}=0,$$

$$(6.3)\qquad \sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{a^*_{m,n}}=\infty,$$

la suite double $\{a^*_{m,n}\}$ *étant la minorante de M. Faber de la suite double trouvée* $\{a_{m,n}\}$.

§ 3. Le premier problème

7. En supposant qu'il existe une fonction $F(x, y)$ de la classe quasi-analytique C_M dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$, satisfaisant aux conditions :

$$|F^{(m+n)}(x, y)| \leqslant k^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \;;\; m=0, 1, 2, \dots \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \;;\; n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

$$F^{(m+n)}(0, 0) = m!\, n!\, c_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

nous allons calculer effectivement cette fonction $F(x, y)$. Posons, pour cela, comme plus haut,

$$\beta_{m,n} = \sqrt[m+n]{M_{m,n}} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

et désignons par $\{\beta^*_{m,n}\}$ la minorante de M. Faber de $\{\beta_{m,n}\}$. Parce que la classe C_M est, par hypothèse, quasi-analytique, la série double

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^*_{m,n}}$$

diverge. On peut donc, en vertu du lemme énoncé au dernier numéro, trouver une suite double $\{a_{m,n}\}$, de quantités positives, dont la minorante de M. Faber est bien entendu désignée par $\{a^*_{m,n}\}$, satisfaisant aux conditions :

$$(6.2) \qquad \lim_{m,n\to\infty} \frac{\beta_{m,n}}{a_{m,n}} = 0,$$

$$(6.3) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^*_{m,n}} = \infty.$$

Si l'on pose $M'_{m,n} = (a_{m,n})^{m+n}$, il est aisé de voir que $C_{M'}$ est une classe quasi-analytique contenant la classe donnée C_M.

Posons maintenant

$$(a_{p,q})^{-2p-2q} = \gamma_{p,q} \qquad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \dots, m \\ q=0, 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

dans l'expression

$$(2.2) \qquad I_{m,n}(f) = \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} \gamma_{p,q} \int_0^1\!\!\int_0^1 [f^{(p+q)}(x, y)]^2 dx dy\,;$$

et désignons par $f_{m,n}(x, y)$ la fonction

$$(7.1) \qquad \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} c_{p,q}\, \omega^{m,n}_{p,q}(x, y) + \sum_{p=0}^{m-1} c_{p,n}\, \omega^{m,n}_{p,n}(x, y) + \sum_{q=0}^{n-1} c_{m,q}\, \omega^{m,n}_{m,q}(x, y),$$

qui est la valeur minimum $I_{m,n}$ de l'intégrale $I_{m,n}(f)$. Alors il est aisé de vérifier les inégalités suivantes :

$$I_{p,q} \leqslant I_{p+1,q}, \quad I_{p,q} \leqslant I_{p,q+1} \qquad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \dots \\ q=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Or la suite double $\{I_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ est certainement bornée.

Comme, en effet, $F(x, y)$ est une fonction de la classe donnée C_M par hypothèse, on a

$$|F^{(p+q)}(x, y)| \leqslant (k\beta_{p,q})^{p+q} \qquad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \dots \\ q=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

et, par conséquent,

$$I_{m,n} \leqslant I_{m,n}(F) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{k\beta_{p,q}}{a_{p,q}}\right)^{2p+2q} = S,$$

où S est un nombre positif fini, car la dernière série double converge en vertu de la relation (5.2).

On a donc l'inégalité suivante :

$$\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} (a_{p,q})^{-2p-2q} \int_0^1 \int_0^1 [f_{m,n}^{(p+q)}(x, y)]^2 dxdy \leqslant S,$$

et, en particulier,

$$\int_0^1 \int_0^1 [f_{m,n}^{(p+q)}(x, y)]^2 dxdy \leqslant S \cdot (a_{p,q})^{2p+2q} \qquad \begin{pmatrix} p \leqslant m \\ q \leqslant n \end{pmatrix}.$$

Si l'on remarque la relation

$$\text{(7.2)} \qquad f_{m,n}^{(p+q)}(x, y) = -p\,!\,q\,!\,c_{p,q} + f_{m,n}^{(p+q)}(x, 0) + f_{m,n}^{(p+q)}(0, y) + \int_0^x \int_0^y f_{m,n}^{\{(p+1)+(q+1)\}}(u, v)dudv \qquad \begin{pmatrix} p+1 \leqslant m \\ q+1 \leqslant n \end{pmatrix},$$

alors on peut, en vertu de l'inégalité de Schwarz, écrire, pour $\begin{matrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} &| f_{m,n}^{(p+q)}(x_1, y_1) - f_{m,n}^{(p+q)}(x_2, y_2) | \\ &\leqslant 4(k\beta_{p,q})^{p+q} + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [f_{m,n}^{\{(p+1)+(q+1)\}}(u, v)]^2 dudv \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 4\sqrt{S} \cdot (a_{p,q})^{p+q} + \sqrt{S} \cdot (a_{p+1,q+1})^{p+q+2} \leqslant k'\sqrt{S} \cdot (a_{p+1,q+1})^{p+q+2}, \end{aligned}$$

k' étant une constante positive finie. On voit donc que la suite des fonctions :

$$\{f_{m,n}\} : \quad f_{0,0}(x, y),\ f_{1,0}(x, y),\ f_{0,1}(x, y),\ \dots\dots,$$
$$f_{m,0}(x, y),\ f_{m-1,1}(x, y),\ \dots,\ f_{0,m}(x, y),\ \dots\dots,$$

ainsi que toutes les suites de leurs dérivées partielles successives :

$$\{f_{m,n}^{(1+0)}\} : \quad f_{0,0}^{(1+0)}(x, y),\ f_{1,0}^{(1+0)}(x, y),\ f_{0,1}^{(1+0)}(x, y),\ \dots\dots,$$
$$f_{m,0}^{(1+0)}(x, y),\ f_{m-1,1}^{(1+0)}(x, y),\ \dots,\ f_{0,m}^{(1+0)}(x, y),\ \dots\dots,$$
$$\{f_{m,n}^{(0+1)}\} : \quad f_{0,0}^{(0+1)}(x, y),\ f_{1,0}^{(0+1)}(x, y),\ f_{0,1}^{(0+1)}(x, y),\ \dots\dots,$$
$$f_{m,0}^{(0+1)}(x, y),\ f_{m-1,1}^{(0+1)}(x, y),\ \dots,\ f_{0,m}^{(0+1)}(x, y),\ \dots\dots,$$

... .

....,

$$\{f_{m,n}^{(p+q)}\} : \quad f_{0,0}^{(p+q)}(x, y),\ f_{1,0}^{(p+q)}(x, y),\ f_{0,1}^{(p+q)}(x, y),\ \dots\dots,$$

$$f^{(p+q)}_{m,0}(x, y),\ f^{(p+q)}_{m-1,1}(x, y),\ \ldots,\ f^{(p+q)}_{0,m}(x, y),\ \ldots\ldots,$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots,$$

sont bornées dans leur ensemble et également continues. On peut donc, d'après un théorème bien connu, trouver une suite croissante d'indices $\{m_\mu + n_\mu\}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que la suite des fonctions $\{f_{m_\mu, n_\mu}\}$ converge uniformément dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$ ainsi que toutes les suites de leurs dérivées partielles successives $\{f^{(p+q)}_{m_\mu, n_\mu}\}$ $\begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$. Si l'on désigne

$$f(x, y) = \lim_{\mu \to \infty} f_{m_\mu, n_\mu}(x, y),$$

on voit que cette fonction est indéfiniment dérivable, et que

$$(7.3) \qquad f^{(p+q)}(x, y) = \lim_{\mu \to \infty} f^{(p+q)}_{m_\mu, n_\mu}(x, y) \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et par suite, en vertu de (7.2), que

$$f^{(p+q)}(0, 0) = p\,!\, q\,!\, c_{p,q} \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

En posant

$$\varphi(x, y) = F(x, y) - f(x, y),$$

on a

$$\begin{aligned}(7.4) \qquad \varphi^{(p+q)}(0, 0) &= F^{(p+q)}(0, 0) - f^{(p+q)}(0, 0) \\ &= p\,!\, q\,!\, c_{p,q} - p\,!\, q\,!\, c_{p,q} \\ &= 0 \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\varphi^{(p+q)}(x, y)| &= \Big| \int_0^x \int_0^y \{F^{\{(p+1)+(q+1)\}}(u, v) - f^{\{(p+1)+(q+1)\}}(u, v)\} du dv \\ &\quad + F^{(p+q)}(x, 0) + F^{(p+q)}(0, y) - f^{(p+q)}(x, 0) - f^{(p+q)}(0, y) \Big| \\ &\leqslant \int_0^x \int_0^y |F^{\{(p+1)+(q+1)\}}(u, v)| du dv \\ &\quad + \int_0^x \int_0^y |f^{\{(p+1)+(q+1)\}}(u, v)| du dv \\ &\quad + 2(k\beta_{p,q})^{p+q} + 2\sqrt{S} \cdot (\alpha_{p,q})^{p+q} \\ &\leqslant (k\beta_{p+1,q+1})^{p+q+2} + \sqrt{S} \cdot (\alpha_{p+1,q+1})^{p+q+2} \\ &\quad + 2(k\beta_{p,q})^{p+q} + 2\sqrt{S} \cdot (\alpha_{p,q})^{p+q},\end{aligned}$$

d'où il résulte, en vertu de (5.2), que

$$|\varphi^{(p+q)}(x, y)| \leqslant k''^{p+q} M'_{p+1,q+1} \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où k'' est une constante positive, convenablement choisie. Or il est aisé de voir que la classe $C_{M''}$ définie par la suite double $\{M''_{p,q} = M'_{p+1,q+1}\}$ est quasi-analytique en même temps que la classe $C_{M'}$ définie par la suite double $\{M'_{p,q}\}$. $\varphi(x, y)$ est donc une fonction de la classe quasi-analytique $C_{M'}$. En remarquant (7.4), on voit facilement, d'après le premier théorème fondamental[1] dans les quasi-analyses, que la fonction $\varphi(x, y)$ est identiquement nulle dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que

$$F(x, y) = f(x, y) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}.$$

La fonction $F(x, y)$ de la classe C_M est ainsi calculée effectivement.

Il est à remarquer ici que la relation

$$\lim_{\mu \to \infty} f_{m_\mu, n_\mu}(x, y) = F(x, y)$$

peut être remplacée par la suivante

$$(7.5) \qquad \lim_{m, n \to \infty} f_{m, n}(x, y) = F(x, y).$$

Supposons, en effet, que l'égalité (7.5) n'avait pas lieu. Alors on pourrait trouver une suite partielle croissante d'indices $\{m_\nu + n_\nu\}$, telle qu'on aurait uniformément dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$ les égalités suivantes :

$$(7.6) \qquad \lim_{\nu \to \infty} f^{(p+q)}_{m_\nu, n_\nu}(x, y) = g^{(p+q)}(x, y) \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où la fonction $g(x, y)$ est supposée différente de $f(x, y)$. Mais lorsqu'on opère le même raisonnement que plus haut, on voit que la fonction $g(x, y)$ doit être égale à $F(x, y)$ et par conséquent à la fonction $f(x, y)$, ce qui est absurde. Il faut donc que la relation (7.5) ait lieu.

8. En partant du résultat obtenu dans le dernier numéro on peut trouver une autre représentation analytique plus simple en apparence et plus complète de fonctions quasi-analytiques. Soit $f(x, y)$ une fonction quasi-analytique de la classe C_M dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix}$, indéfiniment dérivable, et satisfaisant aux conditions :

$$f^{(p+q)}(0, 0) = p!\, q!\, c_{p,q} \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Prenant alors deux nombres quelconques x, y tels qu'on ait

$$0 < x < a, \qquad 0 < y < b,$$

considérons la fonction $F(u, v) = f(xu, yv)$, qui est indéfiniment dérivable, et l'on a

$$F^{(p+q)}(0, 0) = p!\, q!\, c_{p,q} x^p y^q \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

$F(u, v)$, considérée comme fonction de u, v, est donc une fonction quasi-

1. S. Kodama: Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (I) n° 16.

analytique à laquelle on peut appliquer la formule (7.5), ce qui donne

$$F(u, v)=f(xu, yv)=\lim_{m,n\to\infty}\Big\{\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\omega_{p,q}^{m,n}(u, v)c_{p,q}x^py^q + \sum_{p=0}^{m-1}\omega_{p,n}^{m,n}(u, v)c_{p,n}x^py^n+\sum_{q=0}^{n-1}\omega_{m,q}^{m,n}(u, v)c_{m,q}x^my^q\Big\},$$

d'où l'on tire, en posant $u=v=1$,

$$(8.1)\qquad f(x, y)=\lim_{m,n\to\infty}\Big\{\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\omega_{p,q}^{m,n}(1, 1)c_{p,q}x^py^q+\sum_{p=0}^{m-1}\omega_{p,n}^{m,n}(1, 1)c_{p,n}x^py^n + \sum_{q=0}^{n-1}\omega_{m,q}^{m,n}(1, 1)c_{m,q}x^my^q.\Big\},$$

qui peut encore s'écrire, en supposant convenablement que $\omega_{m,n}^{m,n}(1,1)=0$,

$$(8.2)\qquad f(x, y)=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\omega_{p,q}^{m,n}c_{p,q}x^py^q,\qquad [\text{où } \omega_{p,q}^{m,n}=\omega_{p,q}^{m,n}(1,1)].$$

Or, quelles que soient les valeurs de quantités a_1, b_1 dans le domaine $\begin{pmatrix}0\leqslant a_1<a\\0\leqslant b_1<b\end{pmatrix}$, pour une fonction $f(x, y)$ de la classe quasi-analytique C_M, satisfaisant aux conditions :

$$|f^{(p+q)}(x, y)|\leqslant k^{p+q}M_{p,q}\qquad \begin{pmatrix}a_1\leqslant x\leqslant a\,;\ p=0,1,2,\dots\\ b_1\leqslant y\leqslant b\,;\ q=0,1,2,\dots\end{pmatrix},$$

on peut déterminer deux entiers positifs N_1, N_2 et une quantité positive δ, telles que les inégalités

$$|f^{(p+q)}(a_1, b_1)|<\delta\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant p\leqslant N_1\\0\leqslant q\leqslant N_2\end{pmatrix}$$

entrainent la relation

$$|f(x, y)|<\varepsilon\qquad \begin{pmatrix}a_1\leqslant x\leqslant a\\b_1\leqslant y\leqslant b\end{pmatrix},$$

où ε est un nombre positif donné, et δ ne dépend que de ε, k et $\{M_{m,n}\}$. On voit donc que la fonction $f(x, y)$ donnée par la formule (8.2) converge uniformément dans le domaine $\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b\end{pmatrix}$.

On peut, par conséquent, énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une classe quasi-analytique C_M de fonctions de deux variables définie par la suite double $\{M_{m,n}\}$ de quantités positives données, on peut trouver des quantités $\omega_{p,q}^{m,n}$(où l'on pose convenablement $\omega_{m,n}^{m,n}=0$), ne dépendant que de la suite double $\{M_{m,n}\}$, telles que chaque fonction $f(x, y)$ de la classe C_M peut s'écrire

$$(8.3)\qquad f(x, y)=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\omega_{p,q}^{m,n}\frac{f^{(p+q)}(0, 0)}{p\,!\,q\,!}x^py^q\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b\end{pmatrix},$$

qui converge uniformément dans ce domaine.

§ 4. Le deuxième problème

9. En vertu de ce que nous avons vu plus haut, on peut aussi affirmer la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe, dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix}$, une fonction quasi-analytique $f(x, y)$ de la classe donnée C_M, vérifiant les relations

$$f^{(m+n)}(0, 0) = m!\, n!\, c_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

$\{c_{m,n}\}$ étant, comme plus haut, une suite double donnée. Nous considérons, pour cela, la valeur minimum $I_{m,n}$, donnée par (7.1), de l'expression

$$I_{m,n}(f) = \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} (a_{p,q})^{-2p-2q} \int_0^1 \int_0^1 [f^{(p+q)}(x, y)]^2 dx dy.$$

Cette valeur minimum $I_{m,n}$ est une forme quadratique de (4.2), et par suite, elle peut s'écrire sous la forme

$$I_{m,n} = \sum_{p, p'=0}^{m} \sum_{q, q'=0}^{n} \lambda^{(m), (n)}_{p, p'; q, q'} c_{p,q} c_{p',q'},$$

où $\lambda^{(m), (n)}_{p, p'; q, q'}$ sont indépendantes des $c_{p,q}$, en posant convenablement

$$\lambda^{(m), (n)}_{m, p'; n, q'} = \lambda^{(m), (n)}_{p, m; q, n} = 0.$$

On sait que la suite double $\{I_{m,n}\}$ est bornée, et que s'il existe, dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix}$, une fonction quasi-analytique $f(x, y)$ de la classe C_M, cette fonction peut être donnée par la formule (8.3). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'il existe, dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix}$, *une fonction quasi-analytique* $f(x, y)$ *de la classe* C_M, *satisfaisant aux conditions :*

$$f^{(p+q)}(0, 0) = p!\, q!\, c_{p,q} \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \dots \\ q = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

il faut que la suite double $\{J_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$, *où*

$$J_{m,n} = \sum_{p, p'=0}^{m} \sum_{q, q'=0}^{n} \lambda^{(m), (n)}_{p, p'; q, q'} c_{p,q} c_{p',q'} a^{p+p'} b^{q+q'}, \tag{9.1}$$

$$[\text{où } \lambda^{(m), (n)}_{m, p'; n, q'} = \lambda^{(m), (n)}_{p, m; q, n} = 0],$$

soit bornée.

Il est aisé de voir que cette condition est aussi suffisante pour que la fonction $f(x, y)$ appatienne à la classe $C_{M''}$ définie par la suite double $\{M''_{p,q} = M'_{p+1, q+1}\}$. Si l'on remplace donc $\gamma_{p,q}$ dans l'expression (2.2) par $(\beta_{p,q})^{-2p-2q}$, et si l'on écrit la valeur correspondante de $I_{m,n}$ sous la forme

$$\sum_{p, p'=0}^{m} \sum_{q, q'=0}^{n} \sigma^{(m), (n)}_{p, p'; q, q'} c_{p,q} c_{p',q'}, \qquad [\text{où } \sigma^{(m), (n)}_{m, p'; n, q'} = \sigma^{(m), (n)}_{p, m; q, n} = 0],$$

on peut énoncer le théorème suivant :

Soit $\{\beta_{m,n}\}$ *une suite double croissante par rapport à chacun des indices* m, n, *telle que* $\left\{\dfrac{\beta_{m+1,n}}{\beta_{m,n}}\right\}$ *et* $\left\{\dfrac{\beta_{m,n+1}}{\beta_{m,n}}\right\}$ *restent bornées, et que, en plus, la série double*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{m,n}}$$

diverge. Alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction quasi-analytique $f(x, y)$ de la classe C_M est que, pour a, b suffisamment petits, les nombres

$$(9.2)\qquad K_{m,n}(a, b)=\sum_{p,p'=0}^{m}\sum_{q,q'=0}^{n}\sigma_{p,p';\,q,q'}^{(m),\,(n)}c_{p,q}c_{p',q'}\,a^{p+p'}\,b^{q+q'},$$
$$[\text{où } \sigma_{p,m;\,q,n}^{(m),\,(n)}=\sigma_{m,p';\,n,q'}^{(m),\,(n)}=0],$$

soient tous inférieurs à une constante indépendante de m, n.

10. On sait que toute fonction analytique est contenue dans C_M si

$$\overline{\lim_{m+n\to\infty}}\sqrt[m+n]{\frac{M_{m,n}}{m\,!\,n\,!}}=+\infty.$$

Il est donc, dans ce cas, possible de déterminer les suites partielles d'indices $\{m_\mu,\}$, $\{n_\nu\}$, telles qu'on ait

$$(10.1)\qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty}\left(\frac{M_{m_\mu,\,n_\nu}}{m_\mu\,!\,n_\nu\,!}\right)^{\frac{1}{m_\mu+n_\nu}}=+\infty.$$

Or du fait qu'un polynome quelconque $\sum_{p=0}^{m'}\sum_{q=0}^{n'}c_{p,q}x^py^q$ appartient à C_M, on a une identité suivante :

$$\sum_{p=0}^{m'}\sum_{q=0}^{n'}c_{p,q}x^py^q=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{p=0}^{m'}\sum_{q=0}^{n'}\omega_{p,q}^{m,n}c_{p,q}x^py^q,$$

en vertu de (8.3). On en déduit, pour p, q quelconques mais fixes,

$$(10.2)\qquad \lim_{m,n\to\infty}\omega_{p,q}^{m,n}=1,$$

et par suite, pour $m_{\mu+1}$, $n_{\nu+1}$ suffisamment grands, la valeur absolue de l'expression $\omega_{p,\,q}^{m_{\mu+1},\,n_{\nu+1}}-1$ peut être suffisamment petite. Il est donc possible de trouver deux suites partielles croissantes $\{m_\mu\}$, $\{n_\nu\}$ $\begin{pmatrix}\mu=0,1,2,\dots\\ \nu=0,1,2,\dots\end{pmatrix}$, telles qu'on ait

$$(10.3)\qquad \sum_{p=0}^{m_\mu}\sum_{q=0}^{n_\nu}\left|\,\omega_{p,\,q}^{m_{\mu+1},\,n_{\nu+1}}-1\,\right|\frac{M'_{p,q}}{p\,!\,q\,!}<1.$$

Pour une application de cette propriété, on peut en déduire un théorème présentant certaines analogies avec un théorème bien connu de M. Hadamard sur les séries simples de puissances. Soit, en effet, en particulier, $\{c_{p,q}\}$ une suite double telle que tous ses éléments sont nuls, sauf pour $p=m_\mu$ et $q=n_\nu$, et que, en plus,

$$|m_\mu\,!\,n_\nu\,!\,c_{m_\mu,\,n_\nu}|<k^{m_\mu+n_\nu}M_{m_\mu,\,n_\nu}.$$

Supposons qu'il y a une fonction $f(x, y)$ de la classe quasi-analytique C_M, indéfiniment dérivable et satisfaisant aux conditions :

$$f^{(p+q)}(0,0)=\begin{cases}m_\mu\,!\,n_\nu\,!\,c_{m_\mu,\,n_\nu} & (p=m_\mu,\ q=n_\nu),\\ 0 & (\text{ailleurs}).\end{cases}$$

Alors cette fonctions peut, en vertu de (8.3), s'écrire sous la forme

$$(10.4) \qquad f(x, y)=\lim_{\mu,\nu\to\infty}\left\{\sum_{p=1}^{\mu}\sum_{q=1}^{\nu} c_{m_p, n_q}\, x^{m_p}\, y^{n_q} + \sum_{p=0}^{m_\mu}\sum_{q=0}^{n_\nu}\left(\omega^{m_\mu+1,\, n_\nu+1}_{p,\, q}-1\right) c_{p, q}\, x^p y^q\right\}.$$

Si l'on pose

$$F(x, y)=\max_{p,q\geq 0}\left(\frac{k^{p+q}M_{p,q}}{M'_{p,q}}|x|^p|y|^q\right),$$

on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p=0}^{m_\mu}\sum_{q=0}^{n_\nu}\left(\omega^{m_\mu+1,\, n_\nu+1}_{p,\, q}-1\right) c_{p, q}\, x^p y^q\right| &\leq \sum_{p=0}^{m_\mu}\sum_{q=0}^{n_\nu}\left|\omega^{m_\mu+1,\, n_\nu+1}_{p,\, q}-1\right|\frac{k^{p+q}M_{p,q}}{p!\,q!}|x|^p|y|^q \\ &\leq F(x, y)\sum_{p=0}^{m_\mu}\sum_{q=0}^{n_\nu}\left|\omega^{m_\mu+1,\, n_\nu+1}_{p,\, q}-1\right|\frac{M'_{p,q}}{p!\,q!} \\ &< F(x, y).\end{aligned}$$

On en conclut que les sommes partielles de $f(x, y)$ données par (10.4) sont bornées dans leur ensemble pour les valeurs de x, y dans le domaine d'existence de fonctions de C_M. On voit donc que la série double

$$(10.5) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} c_{m_p, n_q}\, x^{m_p}\, y^{n_q}$$

converge à l'intérieur de tout le domaine où $f(x, y)$ appartient à la classe quasi-analytique C_M. En résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

On peut toujours trouver deux suites d'indices $\{m_\mu\}$, $\{n_\nu\}$ correspondantes à chaque classe quasi-analytique C_M, telles qu'il n'existe pas dans C_M de fonction $f(x, y)$ dont les dérivées partielles successives satisfont aux conditions suivantes :

$$f^{(m+n)}(0, 0)=\begin{cases} m_p!\, n_q!\, C_{m_p, n_q} & (m=m_p,\ n=n_q), \\ 0 & \text{(ailleurs)}, \end{cases}$$

à moins que la série double (10.5) *n'ait des rayons finis de convergence.*

Nous tenons à la fin de ce mémoire à remercier M. le professeur Tosizô Matumoto, qui a bien voulu lire notre manuscrit et nous aider par quelques remarques très utiles dont nous avons tiré grand profit.