Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (III)

Par **Sikazô Kodama**

(Reçu en Juin 17. 1939)

---

§ 1. La classe C_M^*

1. Considérons, ainsi que le fait M. Wiener dans sa collaboration[1] avec Paley, aussi dans le cas où nous nous plaçons, une famille des fonctions $f(x,y)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $f(x,y)$ est définie et indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B \end{pmatrix}$; 2° Pour une suite double donnée de quantités positives $\{M_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix}$, on a

$$(1.1) \qquad \int_a^A\int_b^B |f^{(m+n)}(x,y)|^2 dxdy \leqslant k^{m+n} M_{m,n}^2 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix},$$

où k est une constante positive dépendant seulement du choix de la fonction $f(x,y)$. On désigne, pour abréger, cette classe par C_M^*.

On connaît d'autre part la classe C_M des fonctions $g(x,y)$, définies et indéfiniment dérivables dans le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B \end{pmatrix}$, et y vérifiant les inégalités

$$(1.2) \qquad |g^{(m+n)}(x,y)| \leqslant k^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A\ ;\ m=0, 1, 2,\dots \\ b\leqslant y\leqslant B\ ;\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix},$$

où k est une constante positive dépendant de $g(x,y)$. On voit que $C_M \subset C_M^*$.

Si, au contraire, la fonction $f(x,y)$ définie et indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B \end{pmatrix}$ et y vérifiant les inégalités

$$(1.3) \qquad \int_a^A\int_b^B |f^{(m+n)}(x,y)|^2 dxdy \leqslant k^{m+n} N_{m,n}^2 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix},$$

satisfait, en plus, aux conditions

$$(1.4) \qquad f^{(m+n)}(\xi,\eta)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2,\dots \\ n=0, 1, 2,\dots \end{pmatrix},$$

---

1. Paley and Wiener : Notes on the theory and applications of Fourier transforms. Note I, On quasi-analytic functions (Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 35 (1933), pp. 348-353).

en un point fixe mais quelconque (ξ, η) dans le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B\end{pmatrix}$; alors on a, pour un point quelconque (x, y) dans ce domaine,

$$\begin{aligned} &|f^{(m+n)}(x, y)-f^{(m+n)}(x, \eta)-f^{(m+n)}(\xi, y)|^2 \\ &\qquad =\left|\int_\xi^x\int_\eta^y f^{\{(m+1)+(n+1)\}}(u, v)du dv\right|^2, \\ &|f^{(m+n)}(x, y)|^2\leqslant N\int_a^A\int_b^B |f^{\{(m+1)+(n+1)\}}(u, v)|^2 du dv \\ &\qquad \leqslant Nk^{m+n+2}N^2_{m+1,\, n+1}, \end{aligned}$$

où N est une constante positive finie. Il en résulte que

$$|f^{(m+n)}(x, y)|\leqslant k_1^{m+n}N_{m+1,\, n+1} \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix},$$

où k_1 est aussi une constante positive finie. Si l'on prend, par conséquent,

$$(1.5) \qquad N_{m+1,\, n+1}=M_{m,\, n} \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix};$$

on voit que $C^*_M\subset C_M$, tant que nous considérons seulement des fonctions s'annulant avec toutes ses dérivées en un point fixe mais quelconque dans son domaine d'existence.

On voit que la classe C^*_M est liée étroitement avec C_M. Nous allons donc trouver dans la suite une condition pour la quasi-analyticité de la classe C^*_M afin de donner une autre démonstration du théorème extensif de MM. Denjoy-Carleman pour celle de C_M.

2. Commençons par la démonstration de la proposition suivante:

Si la fonction $f(x, y)$ appartenant à la classe $C_M\begin{pmatrix} -1,\ 1 \\ -1,\ 1\end{pmatrix}$ s'annule dans le domaine sauf que la partie $\begin{pmatrix} 0,\ 1 \\ 0,\ 1\end{pmatrix}$ et satisfait aux conditions

$$(2.1) \qquad f^{(m+n)}(0, 0)=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,\ 1,\ 2,\dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\dots\end{pmatrix},$$

et si, en plus,

$$(2.2) \qquad F(u, v)=\begin{cases} e^{-u-v}f(1-e^{-u},\ 1-e^{-v}) & \begin{pmatrix} u\geqslant 0 \\ v\geqslant 0\end{pmatrix}, \\ 0 & (\textit{ailleurs}),\end{cases}$$

alors on a

$$(2.3) \qquad F(u, v)\subset C^*_M\begin{pmatrix} -\infty,\ \infty \\ -\infty,\ \infty\end{pmatrix}.$$

On a, en effet, dans le domaine $\begin{pmatrix} u\geqslant 0 \\ v\geqslant 0\end{pmatrix}$, $F(u, v)=e^{-u-v}f(1-e^{-u},\ 1-e^{-v})$ par hypothèse. D'où l'on a, d'après la différentiation, les relations formelles suivantes, quelles que soient les valeurs entières non négatives de m, n,

$$(2.4)\quad \begin{cases} F^{(m+n)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} a_{p,q}e^{-(m+1-p)u-(n+1-q)v}f^{\{(m-p)+(n-q)\}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{où } a_{0,0}=1], \\ F^{\{(m+1)+n\}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{m+1}\sum_{q=0}^{n} b_{p,q}e^{-(m+2-p)u-(n+1-q)v}f^{\{(m+1-p)+(n-q)\}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{où } b_{0,0}=1], \\ F^{\{m+(n+1)\}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n+1} c_{p,q}e^{-(m+1-p)u-(n+2-q)v}f^{\{(m-p)+(n+1-q)\}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{où } c_{0,0}=1]; \end{cases}$$

et les coefficients a, b, c sont liés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} b_{p,q} = -(m+2-p)a_{p-1,q} + a_{p,q} \qquad \begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1 \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{où } a_{-1,q}=a_{p,n+1}=0], \\ c_{p,q} = -(n+2-q)a_{p,q-1} + a_{p,q} \qquad \begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n+1 \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{où } a_{p,-1}=a_{m+1,q}=0]; \end{cases}$$

d'où l'on tire les inégalités

$$(2.5)\quad \begin{cases} |b_{p,q}| \leqslant (m+1)|a_{p-1,q}| + |a_{p,q}| \qquad \begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1 \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}, \\ |c_{p,q}| \leqslant (n+1)|a_{p,q-1}| + |a_{p,q}| \qquad \begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n+1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Supposons que

$$(2.6)\qquad |a_{p,q}| \leqslant 2^{m+n}\frac{m^{2p}n^{2q}}{p!\ q!} \qquad \begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix},$$

qui est valable pour $m=n=0$. On peut alors tirer de (2.5) les suivantes :

$$\begin{aligned} |b_{p,q}| &\leqslant 2^{m+n}\left\{(m+1)\frac{m^{2p-2}}{(p-1)!} + \frac{m^{2p}}{p!}\right\}\frac{n^{2q}}{q!} \\ &< 2^{(m+1)+n}\frac{(m+1)^{2p}n^{2q}}{p!\ q!} \qquad \begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1 \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}, \\ |c_{p,q}| &\leqslant 2^{m+n}\left\{(n+1)\frac{n^{2q-2}}{(q-1)!} + \frac{n^{2q}}{q!}\right\}\frac{m^{2p}}{p!} \\ &< 2^{m+(n+1)}\frac{m^{2p}(n+1)^{2q}}{p!\ q!} \qquad \begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n+1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

et l'on voit, par conséquent, que les inégalités (2.5) ont lieu pour toutes les valeurs entières non négatives de m, n.

On a donc, pour $\begin{pmatrix} u\geqslant 0 \\ v\geqslant 0 \end{pmatrix}$,

$$(2.7)\quad \begin{aligned} |F^{(m+n)}| \leqslant 2^{m+n}\Bigg\{&\sum_{p=0}^{m} e^{-(p+1)u-(n+1)v}|f^{(p+n)}|\frac{m^{2(m-p)}}{(m-p)!} \\ &+ \frac{n^2}{1\ !}\sum_{p=0}^{m} e^{-(p+1)u-nv}|f^{\{p+(n-1)\}}|\frac{m^{2(m-p)}}{(m-p)!} \end{aligned}$$

$$+\cdots+\frac{n^{2n}}{n!}\sum_{p=0}^{m}e^{-(p+1)u-v}|f^{(p+0)}|\frac{m^{2(m-p)}}{(m-p)!}\Big\}.$$

Or, grâce à (2.1), on a

$$\begin{aligned}
&f^{\{(m-p)+(n-q)\}}(x, y) \\
&\quad=\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\int_0^x\int_0^y(x-\xi)^{p-1}(y-\eta)^{q-1}f^{(m+n)}(\xi, \eta)d\xi d\eta \\
&\quad\quad+\sum_{s=0}^{p-1}\frac{x^s}{s!}f^{\{(m-p+s)+(n-q)\}}(0, y) \\
&\quad\quad+\sum_{t=0}^{q-1}\frac{y^t}{t!}f^{\{(m-p)+(n-q+t)\}}(x, 0) \qquad \begin{pmatrix}p\leqslant m\\ q\leqslant n\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$|f^{\{(m-p)+(n-q)\}}(x, y)|\leqslant\frac{k_1^{m+n}}{(p-1)!\,(q-1)!}\max_{\substack{-1\le\xi\le1\\-1\le\eta\le1}}|f^{(m+n)}(\xi, \eta)| \qquad \begin{pmatrix}p>0\\ q>0\end{pmatrix},$$

où k_1 est une constante positive finie. Comme $f(x, y)\in C_M\begin{pmatrix}-1, 1\\-1, 1\end{pmatrix}$ par hypothèse, on a $\max\limits_{\substack{-1\le\xi\le1\\-1\le\eta\le1}}|f^{(m+n)}(\xi, \eta)|\leqslant k^{m+n}M_{m, n}$ $\begin{pmatrix}m=0, 1, 2, \dots\\ n=0, 1, 2, \dots\end{pmatrix}$, d'où il résulte que

$$|f^{\{(m-p)+(n-q)\}}|\leqslant\frac{k_2^{m+n}M_{m, n}}{(p-1)!\,(q-1)!},$$

où k_2 est une constante positive finie.

Par conséquent, l'inégalité (2.7) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
|F^{(m+n)}|&\leqslant e^{-u-v}(2k_2)^{m+n}M_{m, n}\Big(\sum_{p=0}^{m}\frac{m^{2p}}{p!\,(p-1)!}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n}\frac{n^{2q}}{q!(q-1)!}\Big) \\
&<e^{-u-v}(2k_2)^{m+n}M_{m, n}mn\Big(\sum_{p=0}^{m}\frac{m^{2p}}{(p!)^2}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n}\frac{n^{2q}}{(q!)^2}\Big) \\
&<e^{-u-v}(2k_2)^{m+n}M_{m, n}mne^{2m+2n} \\
&<e^{-u-v}(2k_2e^3)^{m+n}M_{m, n},
\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$|F^{(m+n)}|<e^{-u-v}k^{m+n}M_{m, n} \qquad \begin{pmatrix}u\geqslant0\,;\ m=0, 1, 2, \dots\\ v\geqslant0\,;\ n=0, 1, 2, \dots\end{pmatrix},$$

où k_3 est une constante positive finie. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m\partial v^n}F(u, v)\Big|^2dudv&<k_3^{2m+2n}M_{m, n}^2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-2u-2v}dudv \\
&<k_3^{2m+2n}M_{m, n}^2 \qquad \begin{pmatrix}m=0, 1, 2, \dots\\ n=0, 1, 2, \dots\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $F(u, v)\in C_M^*\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\-\infty, \infty\end{pmatrix}$. Notre proposition est ainsi démontrée.

3. Il est à remarquer ici la propriété simple suivante :

Si $f(x,y)$ est une fonction définie dans le domaine $\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(3.1)\quad \begin{array}{ll} \int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y)|^2 dxdy<\infty, & \int_0^\infty\int_0^\infty |f^{(1+0)}(x,y)|^2 dxdy<\infty, \\ \int_0^\infty\int_0^\infty |f^{(0+1)}(x,y)|^2 dxdy<\infty, & \int_0^\infty\int_0^\infty |f^{(1+1)}(x,y)|^2 dxdy<\infty, \end{array}$$

et si, en plus, $f^{(1+0)}$, $f^{(0+1)}$, $f^{(1+1)}$ sont toutes continues dans $\begin{pmatrix}x>x_0\geqslant 0\\ y>y_0\geqslant 0\end{pmatrix}$, on a

$$(3.2)\qquad \lim_{x,\,y\to\infty} f(x,y)=0.$$

Prenons, en effet, une fonction $\phi(x,y)$, telle que $\phi^{(1+0)}$, $\phi^{(0+1)}$, $\phi^{(1+1)}$ soient toutes continues dans le domaine $\begin{pmatrix}x>x_0\geqslant 0\\ y>y_0\geqslant 0\end{pmatrix}$, et, en plus, que

$$\begin{array}{ll} \int_0^\infty\int_0^\infty |\phi(x,y)|\, dxdy<\infty, & \int_0^\infty\int_0^\infty |\phi^{(1+0)}(x,y)|\, dxdy<\infty, \\ \int_0^\infty\int_0^\infty |\phi^{(0+1)}(x,y)|\, dxdy<\infty, & \int_0^\infty\int_0^\infty |\phi^{(1+1)}(x,y)|\, dxdy<\infty. \end{array}$$

Alors on a, pour $\begin{matrix}A>a\geqslant x_0\\ B>b\geqslant y_0\end{matrix}$,

$$\begin{aligned} &|\phi(A,B)-\phi(a,b)| \\ &\quad=\left|\int_a^A\int_b^B \phi^{(1+1)}(x,y)dxdy+\int_a^A \phi^{(1+0)}(x,b)dx+\int_b^B \phi^{(0+1)}(a,y)dy\right| \\ &\quad\leqslant \int_a^A\int_b^B |\phi^{(1+1)}(x,y)|\, dxdy+\int_a^A |\phi^{(1+0)}(x,b)|\, dx+\int_b^B |\phi^{(0+1)}(a,y)|\, dy, \end{aligned}$$

dont le dernier membre tend vers zéro lorsque $\begin{matrix}a, A\\ b, B\end{matrix}$ tendent vers l'infini. Il est donc possible de trouver deux suites simples $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$ telles qu'on ait $\phi(x_j, y_j)\to 0$ lorsque x_j, y_j tendent vers l'infini ; ce qui donne $\lim_{x,\,y\to\infty}\phi(x,y)=0$. Posons, donc, $\phi(x,y)=[f(x,y)]^2$. Alors on a, grâce à (3.1),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty\int_0^\infty |\{[f(x,y)]^2\}^{(1+0)}|\, dxdy &= 2\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y)f^{(1+0)}(x,y)|\, dxdy \\ &\leqslant 2\left(\int_0^\infty\int_0^\infty |f|^2 dxdy\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty |f^{(1+0)}|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}<\infty. \end{aligned}$$

On a, de même

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\{[f(x,y)]^2\}^{(0+1)}|\, dxdy<\infty,$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty\int_0^\infty |\{[f(x,y)]^2\}^{(1+1)}|\, dxdy &= 2\int_0^\infty\int_0^\infty |ff^{(1+1)}+f^{(1+0)}f^{(0+1)}|\, dxdy \\ &\leqslant 2\left\{\left(\int_0^\infty\int_0^\infty |f|^2 dxdy\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty |f^{(1+1)}|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\right. \end{aligned}$$

$$+\left(\int_0^\infty\int_0^\infty |f^{(1+0)}|^2 dxdy\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty |f^{(0+1)}|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\Big\}<\infty.$$

Ces trois relations donnent (3.2). Notre proposition est ainsi démontrée.

§ 2. Le théorème fondamental dans la classe C_M^*

4. Le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A\\ b\leqslant y\leqslant B\end{pmatrix}$ est manifestement transformé au domaine $\begin{pmatrix} -\infty\leqslant X\leqslant\infty\\ -\infty\leqslant Y\leqslant\infty\end{pmatrix}$ par

$$(4.1)\qquad X=\tan\left\{\frac{\pi}{2}\,\frac{2x-(A+a)}{A-a}\right\},\quad Y=\tan\left\{\frac{\pi}{2}\,\frac{2y-(B+b)}{B-b}\right\}.$$

Si, donc, la fonction $f(x, y)$ appartient à la classe $L_2\begin{pmatrix} a, A\\ b, B\end{pmatrix}$, alors on en peut déduire une fonction $F(X, Y)$ appartenant à la classe $L_2\begin{pmatrix} -\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$, et les inégalités (1.1) utilisées pour définir la classe C_M^* peuvent être mises sous la forme

$$(4.2)\qquad \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |f^{(m+n)}(x, y)|^2 dxdy\leqslant k^{m+n}M_{m,n}^2\qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots\\ n=0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental suivant:

Soit $\phi(x, y)$ une fonction appartenant à la classe $L_2\begin{pmatrix} -\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ non négative et non équivalente à nul. Pour qu'il existe dans le domaine $\begin{pmatrix} -\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ une fonction réelle ou complexe $F(x, y)$ s'annulant dans le domaine sauf que la partie $\begin{pmatrix} x\geqslant x_0\\ y\geqslant y_0\end{pmatrix}$, et satisfaisant à la relation $|G(x, y)|=\phi(x, y)$, où $G(x, y)$ est la transformée de Fourier de la fonction $F(x, y)$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(4.3)\qquad \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |\log\phi(x, y)|\frac{dx}{1+x^2}\,\frac{dy}{1+y^2}<\infty.$$

Supposons, en effet, d'abord que l'intégrale double (4.3) converge. En écrivant $u=x+ix'$, $v=y+iy'\begin{pmatrix} x'>0\\ y'>0\end{pmatrix}$, considérons la fonction

$$\lambda(u, v)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{x'y'\log\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\{(\boldsymbol{x}-x)^2+x'^2\}\{(\boldsymbol{y}-y)^2+y'^2\}}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\log\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big\{\frac{1}{(\boldsymbol{x}-u)(\boldsymbol{y}-v)}-\frac{1}{(\boldsymbol{x}-\bar{u})(\boldsymbol{y}-v)}$$

$$-\frac{1}{(\boldsymbol{x}-u)(\boldsymbol{y}-\bar{v})}+\frac{1}{(\boldsymbol{x}-\bar{u})(\boldsymbol{y}-\bar{v})}\Big\}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y},$$

qui est une fonction harmonique bornée dans les demi-plans $x'>0$, $y'>0$. On a donc, en vertu du théorème de M. Fatou[1],

$$\lim_{x', y'\to+0}\lambda(x+ix', y+iy')=\log\phi(x, y)$$

pour presque partout des valeurs de x, y. En désignant par $\mu(u, v)$ la conjuguée de $\lambda(u, v)$, posons

$$h(u, v)=\exp\{\lambda(u, v)+i\mu(u, v)\}.$$

Alors on a

$$(4.4)\qquad \lim_{x', y'\to+0}|h(u, v)|=\phi(x, y)\qquad \text{presque partout.}$$

Or, comme on a

$$\begin{aligned}|h(u,v)|&=e^{\lambda(u, v)}\\ &\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x'y'\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\{(\boldsymbol{x}-x)^2+x'^2\}\{(\boldsymbol{y}-y)^2+y'^2\}}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y},\end{aligned}$$

il est aisé de voir que

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h(x+ix', y+iy')|^2dxdy\\ &\leqslant\frac{1}{\pi^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x'y'\{\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}^2}{\{\ ,,\ \}\{\ ,,\ \}}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x'y'}{\{\ ,,\ \}\{\ ,,\ \}}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\\ &=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}^2d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x'y'}{\{\ ,,\ \}\{\ ,,\ \}}dxdy\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}^2d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\,;\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en vertu du théorème de Cauchy, pour $\begin{matrix}x'>x'_0>0\\ y'>y'_0>0\end{matrix}$,

$$\begin{aligned}&h(x+ix', y+iy')\\ (4.5)\quad &=\frac{-1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\boldsymbol{x}+ix'_0, \boldsymbol{y}+iy'_0)}{\{(\boldsymbol{x}-x)+i(x'_0-x')\}\{(\boldsymbol{y}-y)+i(y'_0-y')\}}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

En désignant par $H_{x', y'}(\xi, \eta)$ la transformée de Fourier de la fonction $h(x+ix', y+iy')$:

$$H_{x', y'}(\xi, \eta)=\underset{A, B\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-B}^{B}h(x+ix', y+iy')e^{i(x\xi+y\eta)}dxdy,$$

et en remarquant que la transformée de Fourier de la fonction

$$\frac{-1}{4\pi^2}\frac{1}{\{x+i(x'-x_0')\}\{y+i(y'-y_0')\}}$$

est

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}e^{(x'-x_0')\xi+(y'-y_0')\eta} & \begin{pmatrix}\xi\leqslant0\\ \eta\leqslant0\end{pmatrix},\\ 0 & (\text{ailleurs}),\end{cases}$$

---

1. B. E. Laurence: The summability of Double power series (Proc. Lond. Math. Soc. vol. 40 (1935), pp. 321-335).

on voit, en vertu du théorème extensif de Parseval[1] et de (4.5), que

$$H_{x',y'}(\xi,\eta)=\begin{cases}2\pi H_{x'_0,y'_0}(\xi,\eta)\cdot\frac{1}{2\pi}e^{(x'-x_0')\xi+(y'-y_0')\eta} & \begin{pmatrix}\xi\leqslant 0\\ \eta\leqslant 0\end{pmatrix},\\ 0 & \text{(ailleurs)};\end{cases}$$

d'où l'on tire

$$H_{x_0',y_0'}(\xi,\eta)=\begin{cases}H_{x',y'}(\xi,\eta)\,e^{(x_0'-x')\xi+(y_0'-y')\eta} & \begin{pmatrix}\xi\leqslant 0\\ \eta\leqslant 0\end{pmatrix},\\ 0 & \text{(ailleurs)}.\end{cases}$$

Lorsque $x_0', y_0'\to+0$ (x' et y' étant laissés fixes), on voit que

$$(4.6)\qquad \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}|H_{x',y'}(\xi,\eta)e^{(x_0'-x')\xi+(y_0'-y')\eta}|^2d\xi d\eta<\infty,$$

parce que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h(x+ix_0',y+iy_0')|^2dxdy<\infty;$$

et, en plus, que l'intégrale double (4.6) varie en croissante avec chacune des $\frac{1}{x_0'}$, $\frac{1}{y_0'}$. On voit donc que l'intégrale double (4.6) tend vers une limite finie, et que la fonction $H_{x',y'}(\xi,\eta)e^{(x_0'-x')\xi+(y_0'-y')\eta}$ tend, en moyenne d'ordre 2, vers la fonction

$$(4.7)\qquad H_{x',y'}(\xi,\eta)e^{-x'\xi-y'\eta}$$
$$=\underset{A,B\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-B}^{B}h(x+ix',y+iy')e^{i\{(x+ix')\xi+(y+iy')\eta\}}dxdy.$$

Autrement dit, la transformée de Fourier de la fonction

$$\begin{cases}H_{x',y'}(\xi,\eta)\,e^{(x_0'-x')\xi+(y_0'-y')\eta} & \begin{pmatrix}\xi\leqslant 0\\ \eta\leqslant 0\end{pmatrix},\\ 0 & \text{(ailleurs)}\end{cases}$$

est la fonction $h(x+ix_0',y+iy_0')$ ayant les propriétés suivantes : 1° Elle tend, en moyenne d'ordre 2, vers la fonction $G(x,y)$ lorsque $x_0', y_0'\to+0$; 2° La transformée de Fourier de cette fonction $h(x+ix_0',y+iy_0')$ [x_0', y_0' étant fixes et positives] est nulle dans le domaine sauf que la partie $\begin{pmatrix}\xi\leqslant 0\\ \eta\leqslant 0\end{pmatrix}$.

On a, par conséquent,

$$(4.8)\qquad h(x+ix',y+iy')$$
$$=\underset{A,B\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{0}\int_{-B}^{0}F(\xi,\eta)e^{-i\{(x+ix')\xi+(y+iy')\eta\}}d\xi d\eta,$$

---

1. Soit $f(x,y)\in L_2\begin{pmatrix}-\infty,\infty\\ -\infty,\infty\end{pmatrix}$, et $g(x,y)\in L_2\begin{pmatrix}-\infty,\infty\\ -\infty,\infty\end{pmatrix}$; et soit respectivement $F(u,v)$, $G(u,v)$ ses transformées de Fourier. Alors on a l'égalité $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)G(u,v)dudv$ $=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)g(-x,-y)dxdy$.

où $F(\xi, \eta)$ est nulle dans le domaine sauf que la partie $\begin{pmatrix}\xi\leqslant 0\\ \eta\leqslant 0\end{pmatrix}$ et appartient à la classe $L_2\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$. Il en résulte, en plus, que

$$\underset{x', y'\to+0}{\text{l. i. m.}}\, h(x+ix', y+iy')$$
$$=\underset{A, B\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{0}\int_{-B}^{0}F(\xi, \eta)e^{-i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta;$$

ce qui donne, grâce à (4.4) et à la définition de $G(x, y)$,

$$|G(x, y)|=\phi(x, y) \qquad \text{presque partout.}$$

5. Étant, ensuite, donnée la fonction $G(x, y)$ dans notre théorème, nous allons maintenant démontrer que l'intégrale double (4.3) converge. On peut supposer, sans perdre la généralité, que la fonction $F(x, y)$ est nulle dans le domaine sauf que la partie $\begin{pmatrix}x\leqslant 0\\ y\leqslant 0\end{pmatrix}$. Écrivons alors

$$G(x, y)=\underset{A, B\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{0}\int_{-B}^{0}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})e^{-i(x\boldsymbol{x}+y\boldsymbol{y})}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y},$$

$$\psi(u, v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})e^{-i(u\boldsymbol{x}+v\boldsymbol{y})}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y},\ \Im(u)>0,\ \Im(v)>0,$$

la seconde intégrale double étant prise horizontalement dans chaque plan de u et v. Cette fonction $\psi(u, v)$ est évidemment analytique dans les demi-plans $\Im(u)>0$, $\Im(v)>0$. Si l'on représente le demi-plan $\Im(u)>0$ au cercle $|\alpha|<1$ $(\alpha=Re^{i\Theta})$ par transformation $u=i\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$, et le demi-plan $\Im(v)>0$ au cercle $|\beta|<1 (\beta=re^{i\theta})$ par $v=i\dfrac{\beta+1}{\beta-1}$, les circonférences des cercles $|\alpha|=1$ et $|\beta|=1$ correspondant respectivement aux axes réels ; alors on peut considérer que la fonction $G(x, y)$ est transformée à $\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})$, et que $\psi(u, v)$ à $\gamma(\alpha, \beta)$. Dans ce cas, on a

$$x=\cot\frac{\Theta}{2},\ y=\cot\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{2dx}{1+x^2}=-d\Theta,\ \frac{2dy}{1+y^2}=-d\theta;$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})|^2d\Theta d\theta=4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|G(x, y)|^2\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2},$$

ce qui signifie que $\Gamma\in L_2\begin{pmatrix}-\pi, \pi\\ -\pi, \pi\end{pmatrix}$.

En désignant par $Re^{i\Xi}$ l'image du point $\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{x}'$, et par $re^{i\sigma}$ celle de $\boldsymbol{y}+i\boldsymbol{y}'$ $(\alpha=Re^{i\Xi}, \beta=re^{i\sigma})$, on voit, d'après la computation simple, que l'expression $\dfrac{1-R^2}{1-2R\cos(\Theta-\Xi)+R^2}$ est transformée à $\dfrac{-\boldsymbol{x}'(1+x^2)}{(\boldsymbol{x}-x)^2+\boldsymbol{x}'^2}$, et que l'expression $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\sigma)+r^2}$ à $\dfrac{-\boldsymbol{y}'(1+y^2)}{(\boldsymbol{y}-y)^2+\boldsymbol{y}'^2}$; et l'on a

$$I\equiv\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})\frac{1-R^2}{1-2R\cos(\Theta-\Xi)+R^2}$$
$$\times\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\sigma)+r^2}d\Theta d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x, y)\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'}{\{(\boldsymbol{x}-x)^2+\boldsymbol{x}'^2\}\{(\boldsymbol{y}-y)^2+\boldsymbol{y}'^2\}}dxdy$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'dxdy}{\{(\boldsymbol{x}-x)^2+\boldsymbol{x}'^2\}\{(\boldsymbol{y}-y)^2+\boldsymbol{y}'^2\}}$$
$$\times\underset{A,\,B\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{0}\int_{-B}^{0}F(u, v)e^{-i(xu+yv)}dudv.$$

Or, l'intégrale double par rapport à u, v converge en moyenne vers une limite finie lorsque $A, B\to\infty$. On peut donc changer l'ordre de $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}$ et $\underset{A,\,B\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}$, et l'on a

$$I=\underset{A,\,B\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'dxdy}{\{(\boldsymbol{x}-x)^2+\boldsymbol{x}'^2\}\{(\boldsymbol{y}-y)^2+\boldsymbol{y}'^2\}}$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{0}\int_{-B}^{0}F(u, v)e^{-i(xu+yv)}dudv.$$

On peut aussi changer, par la même raison, l'ordre d'intégration, et l'on a

$$I=\underset{A,\,B\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{0}\int_{-B}^{0}F(u, v)dudv$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'e^{-i(ux+vy)}}{\{(\boldsymbol{x}-x)^2+\boldsymbol{x}'^2\}\{(\boldsymbol{y}-y)^2+\boldsymbol{y}'^2\}}dxdy$$
$$=\underset{A,\,B\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{0}\int_{-B}^{0}F(u, v)e^{-i\{(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{x}')u+(\boldsymbol{y}+i\boldsymbol{y}')v\}}dudv$$
$$=\psi(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}+i\boldsymbol{y}')=\gamma(Re^{i\Xi}, re^{i\sigma}),$$

ce qui prouve que γ est l'intégrale de Poisson de la fonction $\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})$. Il en résulte que

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\,d\Theta d\theta$$
$$\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|^2d\Theta d\theta \tag{5.2}$$
$$\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})|^2d\Theta d\theta.$$

Or, lorsque $\gamma(0, 0)\neq 0$, on sait que

$$\log|\gamma(0, 0)|\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\,d\Theta d\theta. \tag{5.3}$$

On connaît, d'autre part, que

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\log|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\Big|\,d\Theta d\theta$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\,d\Theta d\theta$$
$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\,d\Theta d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\,d\Theta d\theta$$
$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\,d\Theta d\theta.$$

Donc on a, grâce à (5.2) et (5.3), uniformément par rapport à R et r,

$$\text{(5.4)}\qquad \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\log|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\Big|\,d\Theta d\theta$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})|^2 d\Theta d\theta-\log|\gamma(0, 0)|.$$

Lorsque $\gamma(0, 0)=0$, supposons que $\{\gamma(\xi, \eta)\div\xi^{m'}\eta^{n'}\}_{\xi=\eta=0}\neq 0$. Donc en posant $\chi(\xi, \eta)=\gamma(\xi, \eta)\div\xi^{m'}\eta^{n'}$, on a $\chi(0, 0)\neq 0$; d'où l'on tire

$$\Big|\log|\gamma(\xi, \eta)|\Big|\leqslant\Big|\log|\chi(\xi, \eta)|\Big|+m'\Big|\log|\xi|\Big|+n'\Big|\log|\eta|\Big|.$$

On a, par conséquent,

$$J\equiv\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\log|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\Big|\,d\Theta d\theta\qquad\begin{pmatrix}0<R<1\\0<r<1\end{pmatrix}$$
$$\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\left|\frac{\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})}{R^{m'}e^{im'\Theta}r^{n'}e^{in'\theta}}\right|\right|\,d\Theta d\theta-m'\log R-n'\log r.$$

Donc on a, grâce à (5.4),

$$J\leqslant\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})|^2 d\Theta d\theta$$
$$-\log\left|\frac{\gamma(\xi, \eta)}{\xi^{m'}\eta^{n'}}\right|_{\xi=\eta=0}-m'\log R-n'\log r.$$

Or, lorsque R et r tendent vers un, on sait que presque partout

$$\log|\gamma(Re^{i\Theta}, re^{i\theta})|\to\log|\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})|.$$

On a donc

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\log|\Gamma(e^{i\Theta}, e^{i\theta})|\Big|\,d\Theta d\theta<\infty,$$

ce qui prouve que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\log|G(x, y)|\Big|\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2}<\infty.$$

On voit donc que l'intégrale double (4.3) converge. Notre théorème est ainsi démontré.

§ 3. Autre démonstration du théoréme extensif de MM. Denjoy-Carleman

6. Supposons, d'abord, que l'intégrale double

$$(6.1)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty \log T(x,y)\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2},\quad \left[\text{où } T(x,y)=\max_{m,n\geq 0}\frac{x^{2m}y^{2n}}{M^2_{m,n}}\right],$$

converge. Cette intégrale double converge ou diverge en même temps que

$$(6.2)\qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \log T(x,y)\frac{dx}{x^2}\frac{dy}{y^2}.$$

En posant $\{\phi(x,y)\}^2=\dfrac{1}{10^2(1+x^2)(1+y^2)T(x,y)}$, il est aisé de vérifier que

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \{\phi(x,y)\}^2 dxdy<\infty,$$

et que

$$(6.3)\qquad \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |\log\phi(x,y)|\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2}<\infty.$$

Il suffit, pour cela, de remarquer que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \log(1+x^2)\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2}$ $=2\pi^2\log 2.$

Il existe donc, grâce au théorème fondamental des deux derniers numéros, la fonction $F(x,y)$ appartenant à la classe $L_2\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ non négative et non équivalente à nul, mais nulle dans le domaine sauf que la partie $\begin{pmatrix}x\leqslant 0\\ y\leqslant 0\end{pmatrix}$, et sàtisfaisant à la relation $|G(x,y)|=\phi(x,y)$, où $G(x,y)$ est la transformée de Fourier de la fonction $F(x,y)$. Et, en plus, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |F^{(m+n)}(x,y)|^2dxdy&=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |G(x,y)|^2x^{2m}y^{2n}dxdy \quad \begin{pmatrix}m=0,1,2,\ldots\\ n=0,1,2,\ldots\end{pmatrix}\\ &=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \{\phi(x,y)\}^2x^{2m}y^{2n}dxdy\\ (6.4)\qquad &=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}y^{2n}}{10^2(1+x^2)(1+y^2)T(x,y)}dxdy\\ &\leqslant\frac{1}{10^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{M^2_{m,n}}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy<M^2_{m,n};\end{aligned}$$

ce qui prouve que $F(x,y)\in C^*_M\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$. On voit, ainsi, que la divergence de l'intégrale double (6.3) est nécessaire pour la quasi-analyticité de la classe $C^*_M\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$, et donc de $C^*_M\begin{pmatrix}a, A\\ b, B\end{pmatrix}$.

Or, étant donnée une suite double $\{M_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$, telle que l'intégrale double (6.1) converge, il est possible de trouver une autre $\{N_{m,n}=M_{m+1,n+1}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$, telle que l'intégrale double

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \log T_1(x,y)\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2}, \quad \left[\text{où } T_1(x,y)=\max_{m,n\geq 0}\frac{x^{2m}y^{2n}}{N_{m,n}^2}\right],$$

converge. Il existe donc une fonction $f(x,y)$ appartenant à la classe C_N^* et s'annulant avec toutes ses dérivées en origine (0, 0). Or, cette fonction est contenue dans notre classe C_M en vertu de

$$|f^{(m+n)}(x,y)|\leqslant k^{m+n}M_{m+1,n+1} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

On voit donc que la divergence de l'intégrale double (6.1) est nécessaire pour la quasi-analyticité de la classe C_M.

7. Nous allons maintenant démontrer que la divergence de l'intégrale double (6.1) est aussi suffisante pour la quasi-analyticité de la classe C_M.

Prenons, d'abord, la classe $C_M^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$. Soit $f(x,y)$ une fonction indéfiniment dérivable partout, non identiquement nulle, et satisfaisant aux conditons $f^{(m+n)}(0,0)=0\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$. Le fait que nous avons à démontrer est que l'intégrale double (6.1) converge pour toute classe C_M^* à qui la fonction $f(x,y)$ appartient. Posons, pour cela,

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \begin{pmatrix} x\leqslant 0 \\ y\leqslant 0 \end{pmatrix}, \\ 0 & (\text{ailleurs}), \end{cases}$$

et soit $G(x,y)$ la transformée de Fourier de cette fonction $F(x,y)$. Il n'y a pas d'influence de poser $k=1$ dans les inégalités :

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |f^{(m+n)}(x,y)|^2dxdy\leqslant k^{m+n}M_{m,n}^2 \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Et l'on a

$$(7.1) \qquad M_{m,n}^2\geqslant\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |f^{(m+n)}(x,y)|^2dxdy$$
$$\geqslant\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |F^{(m+n)}(x,y)|^2dxdy=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |G(x,y)|^2x^{2m}y^{2n}dxdy\,;$$

et, par suite,

$$\log T(R,r)\leqslant\log\left\{\max_{m,n\geq 0}\frac{R^{2m}r^{2n}}{\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |G(x,y)|^2x^{2m}y^{2n}dxdy}\right\}$$
$$=\log\left\{\max_{m,n\geq 0}\frac{1}{\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty |G(x,y)|^2\left(\frac{x}{R}\right)^{2m}\left(\frac{y}{r}\right)^{2n}dxdy}\right\}$$

$$(7.2)\qquad \leqq \log\left\{\max_{m,\,n\geqq 0}\frac{1}{\int_{2R}^{2R+1}\int_{2r}^{2r+1}|G(x,y)|^2\left(\frac{x}{R}\right)^{2m}\left(\frac{y}{r}\right)^{2n}dxdy}\right\}$$

$$\leqq \log\left\{\max_{m,\,n\geqq 0}\frac{1}{2^{2m+2n}\int_{2R}^{2R+1}\int_{2r}^{2r+1}|G(x,y)|^2dxdy}\right\}$$

$$=\log\left\{\frac{1}{\int_{2R}^{2R+1}\int_{2r}^{2r+1}|G(x,y)|^2dxdy}\right\}$$

$$\leqq 4\int_{2R}^{2R+1}\int_{2r}^{2r+1}\Big|\log|G(x,y)|\Big|dxdy.$$

On a, par conséquent,

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R,r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

$$\leqq 4\int_1^\infty\int_1^\infty\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}\int_{2R}^{2R+1}\int_{2r}^{2r+1}\Big|\log|G(x,y)|\Big|dxdy$$

$$\leqq 4\int_2^\infty\int_2^\infty\Big|\log|G(x,y)|\Big|dxdy\int_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{x}{2}}\int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{y}{2}}\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

$$=4\int_2^\infty\int_2^\infty\Big|\log|G(x,y)|\Big|\frac{2}{x(x-1)}\frac{2}{y(y-1)}dxdy$$

$$\leqq 400\int_2^\infty\int_2^\infty\Big|\log|G(x,y)|\Big|\frac{dx}{x^2}\frac{dy}{y^2}<\infty,$$

ce qui donne la preuve de la convergence de l'intégrale double (6.1). On voit donc que la divergence de (6.1) est suffisante pour la quasi-analyticité de la classe $C_M^*\begin{pmatrix}-\infty,\ \infty\\-\infty,\ \infty\end{pmatrix}$.

Prenons, ensuite, une fonction $f(x,y)$ appartenant à la classe $C_M\begin{pmatrix}-1,\ 1\\-1,\ 1\end{pmatrix}$, et soit $\{M_{m,n}\}\begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\ \dots\\n=0,\ 1,\ 2,\ \dots\end{pmatrix}$ une suite double de quantités positives telles que l'intégrale double (6.1) diverge. Si, en plus, les conditions $f^{(m+n)}(\xi,\eta)=0\begin{pmatrix}m=0,\ 1,\ 2,\ \dots\\n=0,\ 1,\ 2,\ \dots\end{pmatrix}$ ont lieu en un point fixe mais quelconque (ξ,η) dans le domaine; alors on peut affirmer que cette fonction $f(x,y)$ est identiquement nulle. Autrement dit, nous pouvons démontrer que la divergence de l'intégrale double (6.1) est certainement suffisante pour la quasi-analyticité de la classe $C_M\begin{pmatrix}-1,\ 1\\-1,\ 1\end{pmatrix}$.

Supposons, par impossible, que la fonction $f(x,y)$ ne soit pas identiquement nulle. Il est alors possible d'en construire une fonction $f_1(x,y)$ appartenant à la classe $C_M\begin{pmatrix}-1,\ 1\\-1,\ 1\end{pmatrix}$ et satisfaisant aux conditions

$$f_1^{(m+n)}(\xi,\eta)=0\qquad\begin{pmatrix}0\leqq\xi<1\ ;\ m=0,\ 1,\ 2,\ \dots\\0\leqq\eta<1\ ;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots\end{pmatrix},$$

et, en plus, non équivalente à nul dans le domaine partiel $\begin{pmatrix} \xi < x \leqslant 1 \\ \eta < y \leqslant 1 \end{pmatrix}$. Soit $f_2(x, y)$ une fonction définie de la manière suivante :

$$f_2(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \begin{pmatrix} \xi < x \leqslant 1 \\ \eta < y \leqslant 1 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{(ailleurs)} ; \end{cases}$$

alors cette fonction $f_2(x, y)$ satisfait manifestement aux conditions de la proposition du n° 2. Donc, on peut en construire une fonction $F(u, v)$ appartenant à la classe $C^*_M\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$. D'autre part, on a vu plus haut que la divergence de l'intégrale double (6.1) est suffisante pour la quasi-analyticité des fonctions de la classe $C^*_M\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$. Il faut donc que la fonction $F(u, v)$ soit identiquement nulle. Par conséquent, il faut que la fonction $f_2(x, y)$ soit aussi identiquement nulle, c'est absurde. D'ou l'on conclut que la fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle dans le domaine $\begin{pmatrix} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}$.

Notre théorème extensif est ainsi complètement démontré.

8. Il est à remarquer ici que la divergence de l'intégrale double (6.1) est aussi suffisante pour la quasi-analyticité de la classe C^*_N $\begin{pmatrix} -1, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}$.

Supposons, en effet, par impossible, que ce n'ait pas lieu. Il existe alors une fonction appartenant à cette classe $C^*_N\begin{pmatrix} -1, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}$, non identiquement nulle, et s'annulant avec toutes ses dérivées en un point fixe mais quelconque dans le domaine ; et, en plus, telle que l'intégrale double (6.1) diverge. Or, on sait, grâce aux relations

$$|f^{(m+n)}(x, y)| \leqslant k^{m+n} M_{m+1,\, n+1} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

que cette fonction appartient aussi à la classe $C_M\begin{pmatrix} -1, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}$. Il faut donc que cette fonction soit identiquement nulle en vertu du résultat qu'on a vu plus haut. C'est absurde.

On voit donc que la divergence de l'intégrale double (6.1) est aussi la condition nécessaire et suffisante pour la quasi-analyticité des fonctions de la classe $C^*_M\begin{pmatrix} -1, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}$.

§ 4. Équivalence de deux classes C^*_M, C^*_N

9. Nous allons maintenant considérer avec M. Mandelbrojt[1] le problème suivant ;

1. S. Mandelbrojt: Remarques sur certaines classes de fonctions (Bull. des sci. math., t. 61 (1937), pp. 262-268).

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que deux classes $C^*_M\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$, $C^*_N\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ *définies respectivement par deux suites doubles de nombres positifs* $\{M_{m,n}\}$, $\{N_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix}m=0, 1, 2, \dots\\ n=0, 1, 2, \dots\end{pmatrix}$ *soient identiques.*

Il suffit, évidemment, de trouver la condition telle que

$$f(x, y) \in C^*_N\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix} \text{ entraîne } f(x, y) \in C^*_M\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}.$$

$\{\nu_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix}m=0, 1, 2, \dots\\ n=0, 1, 2, \dots\end{pmatrix}$ étant une suite double de nombres réels, on désigne par $\{\nu^*_{m,n}\}$ la plus grande suite convexe dont les termes sont inférieurs ou égaux à ceux de la suite double donnée $\{\nu_{m,n}\}$. Si $\nu_{m,n}=\log M_{m,n}$, on pose $\nu^*_{m,n}=\log \overline{M}_{m,n}$. On définit de même $\log \overline{N}_{m,n}$. On peut alors repondre, avec M. Mandelbrojt, au problème par le théorème suivant ;

En posant $T_N(R, r)=\max\limits_{m,n\geq 0}\dfrac{R^m r^n}{N_{m,n}}$, *supposons que* $\varliminf\limits_{R, r\to\infty}\dfrac{\log T_N(R, r)}{\{\log(R+r)\}^2}>0$. *Si* $\log \overline{N}_{m,n}=O\{(m+n)^2\}$ [*en particulier si* $\log N_{m,n}=O\{(m+n)^2\}$]; *alors la condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction de la classe* $C^*_N\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ *appartienne aussi à la classe* $C^*_M\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ *est que*

$$\sqrt[m+n]{\overline{N}_{m,n}}=O(\sqrt[m+n]{\overline{M}_{m,n}}). \tag{9.1}$$

Pour le démontrer, nous ferons usage des deux propriétés suivantes :

I. *En désignant par* $g(u, v)$ *la transformée de Fourier de la fonction* $f(x, y)$ *appartenant à la classe* $C^*_N\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$, *la condition*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u, v)T_N(au, av)|^2 du dv<\infty, \tag{9.2}$$

où a *est une constante positive, est équivalente à* $f(x, y) \in C^*_N\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$.

II. *Si* $\varliminf\limits_{R, r\to\infty}\dfrac{\log T_N(R, r)}{\{\log(R+r)\}^2}>0$, *la fonction*

$$f(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(xu+yv)}}{T_N(u, v)}du dv \tag{9.3}$$

appartient à la classe $C^*_N\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$.

Passons maintenant à la démonstration de I.

On a, par hypothèse,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(m+n)}(x,y)|^2 dx dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u, v)|^2 u^{2m}v^{2n} du dv \tag{9.4}$$

$$\begin{pmatrix}m=0, 1, 2, \dots\\ n=0, 1, 2, \dots\end{pmatrix}.$$

On connaît d'autre part, en vertu de $f(x, y) \in C_N^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m+n)}(x, y)|^2 dxdy \leqslant k^{2(m+n)} N_{m,n}^2 \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(u, v)|^2 \frac{\left(\dfrac{u}{2k}\right)^{2m}\left(\dfrac{v}{2k}\right)^{2n}}{N_{m,n}^2} dudv \leqslant \frac{1}{2^{2(m+n)}} \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(u, v)|^2 \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{u}{2k}\right)^{2m}\left(\dfrac{v}{2k}\right)^{2n}}{N_{m,n}^2} dudv$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+2n}} < \infty.$$

Comme on a, d'après la définition même de $T_N(R, r)$,

$$\left| T_N\left(\frac{u}{2k}, \frac{v}{2k}\right) \right|^2 \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{u}{2k}\right)^{2m}\left(\frac{v}{2k}\right)^{2n} \div N_{m,n}^2\right\},$$

on voit que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| g(u, v)\, T_N\left(\frac{u}{2k}, \frac{v}{2k}\right) \right|^2 dudv < \infty,$$

ce qui donne (9.2) en posant $a = \dfrac{1}{2k}$.

Réciproquement, supposons que l'intégrale double (9.2) soit plus petite que $\lambda(<\infty)$, c'est-à-dire,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(u, v)|^2 \frac{(au)^{2m}(av)^{2n}}{N_{m,n}^2} dudv < \lambda \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(u, v)|^2 u^{2m} v^{2n} dudv < \frac{\lambda N_{m,n}^2}{a^{2m+2n}} \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

ce qui donne, grâce à (9.4),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m+n)}(x, y)|^2 dxdy < k_1^{m+n} N_{m,n}^2 \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où k_1 est une constante positive. On voit donc que $f(x, y) \in C_N^*$ $\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$. Notre proposition I est ainsi démontrée.

Passons maintenant à la démonstration de II.

Tout d'abord, supposons que les quantités $\sqrt[m+n]{N_{m,n}}$ ne tendent pas vers l'infini avec $m+n$; alors il existe une suite infinie $\{N_{m_j, n_j}\}$ ($j=$ 1, 2, 3, ...), telle qu'on ait

$$(N_{m_j, n_j})^{\frac{1}{m_j+n_j}} < \mu < \infty \qquad (j=1, 2, 3, \ldots),$$

et par suite

$$T_N(R, r) > \left(\frac{R}{\mu}\right)^{m_j}\left(\frac{r}{\mu}\right)^{n_j} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

il en résulte, pour $R, r > \mu$, que

$$T_N(R, r) \to \infty \qquad \text{avec } j.$$

Or, on a, par hypothèse, $\frac{1}{2\pi} g(u, v) = \frac{1}{T_N(u, v)}$, où $g(u, v)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(x, y)$. On a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m+n)}(x, y)|^2 dxdy = 4\int_0^{\mu}\int_0^{\mu} \frac{u^{2m}v^{2n}}{|T_N(u, v)|^2} dudv$$

$$\leqslant 4\mu^2 N_{m,n}^2 \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que $f(x, y) \in C_N^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$.

Supposons, ensuite, que $\lim_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{N_{m,n}} = \infty$. Alors $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^m r^n}{N_{m,n}}$ est une fonction entière de R, r ; et l'on a

$$\log T_N(R, r) = \int_0^R \psi(\xi, p\xi) \frac{d\xi}{\xi},$$

où $\psi(\xi, p\xi) = m(\xi, p\xi) + n(\xi, p\xi)$ [p étant un paramètre] est une fonction non décroissante (prenant des valeurs entières positives) tendant vers l'infini avec ξ. Il en résulte que

$$\log T_N(R, r) - \log T_N(1, p) = \int_1^R \psi(\xi, p\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\leqslant \psi(R, r)\int_1^R \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\leqslant \psi(R, r)\int_1^{R+r} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \psi(R, r)\log(R + r),$$

et l'on a, par hypothèse,

$$(9.5) \qquad \varliminf_{R, r\to\infty} \frac{\psi(R, r)}{\log(R+r)} \geqslant \varliminf_{R, r\to\infty} \frac{\log T_N(R, r)}{\{\log(R+r)\}^2} = \nu > 0.$$

On a aussi, pour tout $q > 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{T_N\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right)}{T_N(u, v)} \right|^2 dudv = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-2\int_{\frac{u}{q}}^{u} \psi(\xi, p\xi)\frac{d\xi}{\xi}} dudv$$

$$\leqslant 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-2(\log q)\psi\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right)} dudv ;$$

et comme, grâce à (9.5), on a pour $\varepsilon(>0)$ quelconque et $u + v > \eta_\varepsilon > 0$

$$\psi\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right) > \left(\nu - \frac{\varepsilon}{2}\right)\{\log(u+v) - \log q\} > (\nu - \varepsilon)\log(u+v),$$

il suffit de poser $\log q = \frac{3}{2\nu}$ pour donner (pour u, v assez grands)

$$2(\log q)\psi\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right) > 3\frac{\nu-\varepsilon}{\nu}\log(u+v) = (3-\delta)\log(u+v),$$

avec $3-\delta>2$ (ε étant suffisamment petit). D'où il résulte que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{T_N(u, v)}T_N\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right)\right|^2 dudv < \infty.$$

Or, $\frac{2\pi}{T_N(u, v)}$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(x, y)$. On voit donc, grâce à I, que $f(x, y) \in C_N^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$. Notre proposition II est ainsi démontrée.

10. Maintenant nous pouvons démontrer le théorème énoncé au n° 9. La condition (9.1) est équivalente à la suivante : il existe une constante positive finie c telle qu'on ait, pour $\begin{matrix} |u| > |u_0| \\ |v| > |v_0| \end{matrix}$,

$$T_N(u, v) > T_M(cu, cv).$$

Comme on a, par hypothèse, $f(x, y) \in C_N^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$, il existe, grâce à I, une constante positive finie a telle qu'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u, v)T_N(au, av)|^2 dudv < \infty,$$

où $g(u, v)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(x, y)$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}&|g(u, v)T_M(acu, acv)|^2 dudv \\ &< k_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u, v)T_N(au, av)|^2 dudv \\ &< \infty,\end{aligned}$$

où k_2 est une constante positive finie. On voit donc, en vertu du même I, que $f(x, y) \in C_M^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$.

Réciproquement, supposons que toute fonction $f(x, y)$ de la classe $C_N^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$ appartienne aussi à la classe $C_M^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$. Comme on sait, en vertu de II, que la fonction

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(xu+yv)}}{T_N(u, v)}dudv$$

appartient à la classe $C_N^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$; on voit, par hypothèse, que cette fonction appartient aussi à la classe $C_M^*\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$. On connaît d'autre part que $\frac{1}{2\pi} g(u, v) = \frac{1}{T_N(u, v)}$, où $g(u, v)$ est, comme plus haut, la transformée de Fourier de la fonction $f(x, y)$; et l'on voit, en vertu de I, qu'il existe une constante positive finie β telle qu'on ait

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{T_M(\beta u, \beta v)}{T_N(u, v)} \right|^2 du dv < \infty.$$

On a, par conséquent,

$$\lim_{x, y \to \infty} \int_x^{x+1} \int_y^{y+1} \left| \frac{T_M(\beta u, \beta v)}{T_N(u, v)} \right|^2 du dv = 0,$$

ce qui donne, pour x, y assez grands, que

$$\left| \frac{T_M(\beta x, \beta y)}{T_N(x+1, y+1)} \right|^2 \leqslant \int_x^{x+1} \int_y^{y+1} \left| \frac{T_M(\beta u, \beta v)}{T_N(u, v)} \right|^2 du dv < 1,$$

qu'on peut écrire sous la forme, pour x, y assez grands,

$$T_M(\beta x, \beta y) < T_N(x+1, y+1) \leqslant T_N(2x, 2y) ;$$

autrement dit, on a l'égalité (9.1). Notre théorème est ainsi démontré.

Je suis heureux de pouvoir exprimer mon profond remerciement au professeur M. Tosizô Matumoto, au Maître qui a bien voulu lire mon manuscrit et qui m'a fait quelques remarques très utiles.