Sur le Principe de Duhamel-Nomitsu

Par **Toshizô Matsumoto**

(Received July 21, 1939)

1. Introduction. L'équation différentielle de la propagation rectiligne de la chaleur est

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

où u est la température et a est une constante. La fonction

$$u(x,\ t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}f\left(t-\frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right)e^{-\xi^2}d\xi \qquad (2)$$

est la solution de l'équation, c'est à dire la température du solide rectiligne satisfaisant aux conditions données :

$$u=0 \quad \text{pour} \quad t=0,\ x>0,$$
$$u=f(t) \quad \text{pour} \quad x=0,\ t>0,$$

où $f(t)$ est une fonction donnée du temps. Pour obtenir cette solution plusieurs auteurs[1] s'appuient sur le principe de Duhamel[2]. Mais c'est singulier que les auteurs francais n'emploient pas ce principe[3].

Pour verifier que $u(x,\ t)$ est la solution cherchée, le principe de Duhamel n'est pas nécessaire et le théorème de l'intégrale singulière y suffit. Posons

$$J\equiv\int_{\alpha}^{\varkappa}K(\tau,\ \nu)f(\tau)d\tau,$$

$$I\equiv\int_{\alpha}^{\varkappa}K(\tau,\ \nu)d\tau.$$

Sous certaines conditions, si l'on a

$$\lim_{\nu\to\infty}I=A, \quad \text{(fini, determiné)}$$

on en conclut que

$$\lim_{\nu\to\infty}J=Af(\alpha+0).$$

J est appelé l'intégrale singulière[4].

1. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichunger, II, p. 225.
   Carslow, Conduction of heat, p. 47.
   Watson, Partielle Differentialgleichungen, p. 201.
2. Jour, École polytech., t. 14, Cah. 22 (1833), p. 20.
3. Voir par exemple, Jordan, Cours d'analyse, III ; Goursat, Cours d'analyse, III.
4. Voir par exemple, Picard, Traité d'analyse, I.

Mais trouver l'intégrale est autre que la vérification de la formule trouvée. Le principe de Duhamel est très utile pour trouver l'intégrale, comme notre collègue M. Nomitsu, le professeur de l'océanographie physique et ses disciples l'ont montré à plusieurs reprises. Il a fait un pas en avant avec beaucoup de succès.[1] Aujourd'hui ce mode de l'intégration est appelé *le principe de Duhamel-Nomitsu*. Je veux donner quelques réflexions mathématiques sur leur principe.

2. Le principe de Duhamel. Soit $F(x, t, \lambda)$ une solution de l'équation différentielle, c'est à dire la température du solide au point x et au temps t, assujétie aux conditions suivantes :

$$F=0 \quad \text{pour} \quad t=0,\ x>0\,;$$
$$F=f(\lambda) \quad \text{pour} \quad x=0,\ t>0,$$

où λ est un paramètre et $f(\lambda)$ est une fonction donnée. Alors la solution $u(x, t)$ telle que

$$u=0 \quad \text{pour} \quad t=0,\ x>0\,;$$
$$u=f(t) \quad \text{pour} \quad x=0,\ t>0$$

est donnée par la formule

$$u(x, t)=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(x, t-\lambda, \lambda)d\lambda \tag{3}$$

Tel est le principe de Duhamel.

La démonstration intuitive adoptée par les auteurs susdits est comme il suit. $F(x, t, \lambda)$ est la fonction dans le domaine $x>0$, $t>0$. Définissons

$$F(x, t, \lambda)\equiv 0 \quad \text{pour} \quad -\infty<t\leqq 0,\ x>0.$$

Alors la température u telle que

$$u=0 \quad \text{pour} \quad -\infty<t\leqq\lambda,\ x>0\,;$$
$$u=f(\lambda) \quad \text{pour} \quad x=0,\ t>0$$

est donnée par

$$u=F(x, t-\lambda, \lambda).$$

De même la température u telle que

$$u=0 \quad \text{pour} \quad -\infty<t\leqq\lambda-d\lambda,\ x>0,$$
$$u=f(\lambda) \quad \text{pour} \quad x=0, \quad t>\lambda-d\lambda$$

est donnée par

$$u=F(x, t-\lambda+d\lambda, \lambda).$$

Par suite la température u telle que

$$u=0 \quad \text{pour} \quad -\infty<t\leqq\lambda-d\lambda,\ x=0$$
$$u=f(\lambda) \quad \text{pour} \quad \lambda-d\lambda<t\leqq\lambda, \quad x=0$$

---

1. Voir par exemple, *Extension of Duhamel's thearem.* Proc. Imp. Academy XI (1935), No. 9.

$$u=0 \quad \text{pour} \quad x=0, \qquad t>\lambda$$

est donnée par

$$u=F(x,\, t-\lambda,\, \lambda)-F(x,\, t-\lambda+d\lambda,\, \lambda)$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}F(x,\, t-\lambda,\, \lambda)d\lambda.$$

Partageons l'intervalle $(0, t)$ en parties égales de longueur $d\lambda$ par les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{n-1}$, on a pour $x=0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}F(x,\, t-\lambda_i,\, \lambda_i)d\lambda=f(t).$$

Donc la solution cherchée est donnée par

$$u(x,\, t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}F(x,\, t-\lambda,\, \lambda)d\lambda.$$

Spécialement si

$$F(x,\, t,\, \lambda)=f(\lambda)\chi(x,\, t) \tag{4}$$
$$\chi=0 \quad \text{pour} \quad t=0,\ x>0,$$
$$\chi=1 \quad \text{pour} \quad x=0,\ t>0,$$

alors on a

$$u(x,\, t)=\int_0^t f(\lambda)\frac{\partial\chi(x,\, t-\lambda)}{\partial t}d\lambda\,\Big|_{x=0}=f(t).$$

D'autre part nous connaissons que

$$\chi(x,\, t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

d'où l'on obtient la formule de température susdite.

3. La formule de la derivée. Dans la démonstration précédente, on ignore la discontinuité de la fonction $F(x,\, t,\, \lambda)$. Prenons par exemple $\chi(x,\, t)$ de (4). Elle est discontinue au point $x=0$, $t=0$ où elle n'y est pas bien définie. Il en est de même avec sa dérivée.

Soit $\Phi(t,\, \lambda)$ une fonction continue dans le domaine angulaire demi-fermé $\bar{D}(0<\lambda\leqq t)$ et soit $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ aussi continue dans le domaine ouvert $D(0<\lambda<t)$. Posons

$$I(t)\equiv\int_0^t\Phi(t,\, \lambda)d\lambda,$$

et

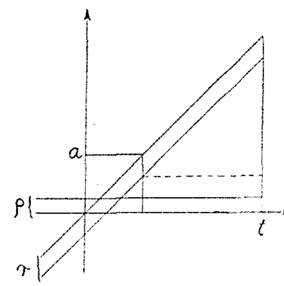
$$u(t)\equiv\int_0^t\frac{\partial\Phi(t,\, \lambda)}{\partial t}d\lambda$$

que nous supposons toujours exister pour tout $t>0$. Nous étudierons la dérivée de $I(t)$.

Considèrons un nombre positif $a<t$, et deux nombres positifs σ, ρ aussi petits que l'on veut. Par la continuité de $\Phi'_\xi(\xi,\, \lambda)$ sauf que les

points sur les demi-droites $\lambda=0$ et $\lambda=\xi$, on a

$$\int_a^t d\xi\int_\rho^{\xi-\sigma}\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\lambda=\int_\rho^{a-\sigma}d\lambda\int_a^t\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\xi+\int_{a-\sigma}^{t-\sigma}d\lambda\int_{\lambda+\sigma}^t\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\xi \qquad (5)$$



D'abord nous supposons que pour $\varepsilon>0$ on a

$$\left|\int_0^\rho\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\lambda\right|<\varepsilon,\ \text{pourvu que } 0<\rho<\delta_1, \quad (6)$$

δ_1 étant indépendant de ξ assez grand ; que

$$\left|\int_{\xi-\sigma}^{\xi}\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\lambda\right|<\varepsilon,\ \text{pourvu que } 0<\sigma<\delta_2, \quad (7)$$

δ_2 étant indépendant de ξ assez grand ; que

$$\left|\int_\lambda^{\lambda+\sigma}\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\xi\right|<\varepsilon,\ \text{pourvu que } 0<\sigma<\sigma_3, \quad (8)$$

δ_3 étant indépendant de $\lambda>0$.

Soit δ le minimum de $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, on a pour $0<\rho,\ \sigma<\delta$,

$$\left|\int_a^t d\xi\int_0^\rho\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\lambda\right|<\varepsilon(t-a). \qquad (9)$$

Donc on peut prendre $\rho=0$ dans les intégrales de (5). En suite on a

$$\left|\int_{a-\sigma}^{t-\sigma}d\lambda\int_\lambda^{\lambda+\sigma}\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\xi\right|<\varepsilon(t-a).$$

Donc on a

$$\int_{a-\sigma}^{t-\sigma}d\sigma\int_\lambda^t\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\xi=\int_{a-\sigma}^{t-\sigma}\Phi(t,\lambda)d\lambda-\int_{a-\sigma}^{t-\sigma}\Phi(\lambda,\lambda)d\lambda.$$

Par la continuité de $\Phi(t,\lambda)$, on a

$$\int_a^t d\sigma\int_\lambda^t\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\xi=\int_a^t\Phi(t,\lambda)d\lambda-\int_a^t\Phi(\lambda,\lambda)d\lambda, \qquad (10)$$

et

$$\int_0^a d\lambda\int_a^t\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\xi=\int_0^a\Phi(t,\lambda)d\lambda-\int_0^a\Phi(a,\lambda)d\lambda \qquad (11)$$

Remarquant (5) on a par (10) et (11),

$$\int_a^t d\xi\int_0^\xi\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\lambda=\int_0^t\Phi(t,\lambda)d\lambda-\int_a^t\Phi(\lambda,\lambda)d\lambda-\int_0^a\Phi(a,\lambda)d\lambda.$$

On remarque que par la convergence uniforme $\int_0^\xi\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\lambda$ est continue pour $\xi>0$. Donc en dérivant les deux parties, on a

$$\int_0^t\Phi'_\xi(\xi,\lambda)d\lambda=\frac{d}{dt}\int_0^t\Phi(t,\lambda)d\lambda-\Phi(t,t).$$

Donc on peut énoncer comme il suit :

Sous les conditions que $\Phi(t,\lambda)$ soit continue dans $\bar{D}(0<\lambda\leqq t)$, $\Phi'_t(t,\lambda)$ continue dans $D(0<\lambda<t)$, les intégrales

$$J(t)\equiv\int_0^t\Phi(t,\lambda)d\lambda,$$

$$u(t) \equiv \int_0^t \Phi'_t(t, \lambda) d\lambda$$

existent et de plus les integrales $\int_0^\rho \Phi'_\xi(\xi, \lambda) d\lambda$, $\int_{\xi-\sigma}^{\xi} \Phi'_\xi(\xi, \lambda) d\lambda$ *convergent uniformément par rapport à* ξ *assez grand et* $\int_\lambda^{\lambda+\sigma} \Phi'_\xi(\xi, \lambda) d\xi$ *uniformément par rapport à* λ, *on a pour* $t > 0$

$$\frac{d}{dt} I(t) = \Phi(t, t) + u(t). \tag{12}$$

4. La démonstration rigoureuse. Revenons à la solution $F(x, t, \lambda)$ de l'équation différentielle. Nous posons

$$I(x, t) \equiv \int_0^t F(x, t-\lambda, \lambda) d\lambda,$$

$$u(x, t) \equiv \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, t-\lambda, \lambda) d\lambda.$$

x étant un paramètre, la fonction

$$\Phi(t, \lambda) \equiv F(x, t-\lambda, \lambda)$$

est celle que nous avons traitée dans la section précédente. Elle est définie continue dans $\overline{D}(0 < \lambda \leqq t)$ puisque $t - \lambda > 0$. Sa dérivée est supposée continue dans $D(0 < \lambda < t)$ et vérifie les conditions susdites. (C'est vrai avec la solution (4).) Alors on a par (12)

$$\frac{\partial}{\partial t} I(x, t) = F(x, 0, t) + u(x, t)$$

Puisque $F(x, 0, \lambda) = 0$ $(x > 0)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} I(x, t) = u(x, t) \tag{13}$$

C'est la relation fondamentale. Maintenant

$$\frac{\partial F(x, t, \lambda)}{\partial t} \equiv a^2 \frac{\partial^2 F(x, t, \lambda)}{\partial x^2}.$$

Donc $$\frac{\partial F(x, t-\lambda, \lambda)}{\partial t} \equiv a^2 \frac{\partial^2 F(x, t-\lambda, \lambda)}{\partial x^2}$$

Intégrant de 0 à t par λ, on a

$$u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2}$$

Différentiant par t, on a

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Donc $u(x, t)$ est une intégrale de l'équation différentielle. On voit facilement que $u(x, t)$ vérifie les conditions initiales. Naturellement on a

$$u(x, 0) = 0.$$

D'autre part

$$u(\mathrm{o}, t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t F(\mathrm{o}, t-\lambda, \lambda)d\lambda=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f(\lambda)d\lambda=f(t).$$

Donc $u(x, t)$ est la solution justement cherchée.

5. L'extension du principe. M. Nomitsu a fait l'extension du principe de Duhamel à plusieurs reprises. Il a cherché la solution de l'équation de la forme

a)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Au,$$
$$u\Big|_{t=0}=\mathrm{o}, \quad u\Big|_{x=H}=\mathrm{o},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=f(t),$$

où a, A, H sont constants, et $f(t)$ est la fonction donnée. Il a trouvé par l'intégrale $F(x, t, \lambda)$ de cette équation que

$$u(x, t)=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(x, t-\lambda, \lambda)d\lambda$$

est encore la solution justement cherchée.[1]

b)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Au+f(t)$$
$$u\Big|_{t=0}=\mathrm{o}, \quad u\Big|_{x=H}=\mathrm{o}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\mathrm{o}.$$

Par l'intégrale $F(x, t, \lambda)$ de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+AF+f(\lambda), \tag{14}$$

il est aussi parvenu à la solution justement cherchée :

$$u(x, t)=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(x, t-\lambda, \lambda)d\lambda.$$ [2]

Les vérifications peuvent être faites comme j'ai montré dans la section précédente toujours s'appuyant sur les relations fondamentales

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t}=u(x, t), \quad \frac{d}{dt}\int_0^t f(\lambda)d\lambda=f(t).$$

Brièvement je la donne pour le cas b). (14) s'établit identiquement. Donc on a

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x, t-\lambda, \lambda)=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x, t-\lambda, \lambda)+AF(x, t-\lambda, \lambda)+f(\lambda).$$

Intégrant de o à t par λ, on a

1. Ces Memoires, XVI, No. 2 (1933), pp. 163—.
2. Ibid. No. 3 (1933), pp. 205—.

$$u(x, t)=a^2\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2}+AI(x, t)+\int_0^t f(\lambda)\, d\lambda.$$

Dérivons par t, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Au+f(t).$$

Pour les conditions initiales, on a

$$u\Big|_{t=0}=0,$$

$$u\Big|_{x=H}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t F(H, t-\lambda, \lambda)d\lambda=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}F(x, t-\lambda, \lambda)d\lambda\Big|_{x=0}=0.$$

6. Remarque. Je remarque que ces deux cas peuvent être réduits au principe propre de Duhamel. Prenons l'équation b), avec les conditions initiales :

$$u\Big|_{t=0}=0, \quad u\Big|_{x=0}=\varphi(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\psi(t) \tag{15}$$

où $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont données. En posant

$$u(x, t)=v(x, t)+\eta(t),$$

on a

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{d\eta}{dt}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+Au+A\eta+f(t).$$

Donc on prend $\eta(t)$ tel que

$$\frac{d\eta}{dt}=A\eta+f(t)$$

ou

$$\eta(t)=e^{At}\left\{\int_0^t e^{-At}f(t)dt+C\right\},$$

C étant une constante arbitraire. Or nous avons pour $v(x, t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+Av,$$

Ensuite posons $v=we^{At}$, on a pour $w(x, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Maintenant on a

$$u=we^{At}+\eta(t)e^{At};$$

et les conditions initiales deviennent réspectivement comme il suit :

$$w\Big|_{t=0}=-\eta(0)=-C,$$

$$w\Big|_{x=0}=\varphi(t)e^{-At}-\eta(t)\equiv\varphi_1(t),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0}=\psi(t)e^{-At}\equiv\psi_1(t).$$

C'est suffisant qu'on prenne $C=0$, ou on a seulement à considerer $\bar{w}=w+C$ au lieu de w pour avoir la condition initiale telle que $\bar{w}\big|_{t=0}=0$.

Donc on a cherché telle solution $F(x, t, \lambda)$ que

$$\frac{\partial F}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

$$F\big|_{t=0}=0, \quad F\big|_{x=0}=\varphi_1(\lambda), \quad \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\psi_1(\lambda).$$

Alors l'intégrale demandée est donnée par

$$w(x, t)=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(x, t-\lambda, \lambda)d\lambda,$$

et

$$u(x, t)=e^{At}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(x, t-\lambda, \lambda)d\lambda+\eta(t)e^{At}.$$

La vérification est déjà facile.

Par ce résultat on croirait que l'extension de M. Nomitsu paraît non essentielle ; mais c'est un grand tort. A mon avis, au lieu de voir les conditions initiales comme les appendices de l'équation différentielle, j'aime mieux croire que toutes les relations sont simultanées d'où découlent plusieures applications plus étendues, et c'est le mérite de M. Nomitsu qu'il a identifié la fonction donnée comme la condition initiale et celle dans l'équation différentielle.

Comme application plus étendue, considérons par exemple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x)\frac{\partial u}{\partial t}+d(x)u=f(t),$$

avec les conditions initiales

$$u\big|_{t=0}=A; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=B,$$

$$u\big|_{x=0}=\varphi(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\psi(t),$$

où A, B sont constants et $\varphi(t)$, $\psi(t)$ les fonctions données. Le point $x=0$ n'est pas définitif. Au contraire donner les conditions aux points différents de t requiert quelque artifice. On le voit à la fin de cette note.

S'il y a une solution $F(x, t, \lambda)$ telle que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+a(x)\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}+b(x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+c(x)\frac{\partial F}{\partial t}+d(x)F=f(\lambda), \quad (16)$$

$$F\big|_{t=0}=A, \quad \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{t=0}=B,$$

$$F\big|_{x=0}=\varphi(\lambda), \quad \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\psi(\lambda),$$

alors $$u(x,t)=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(x,t-\lambda,\lambda)d\lambda+A \tag{17}$$

est l'intégrale justement cherchée.

La vérification est toujours facile. (16) est vrai pour $F(x,t-\lambda,\lambda)$. Donc en la posant au lieu de $F(x,t,\lambda)$, et intégrant de o à t, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+cu+dI=\int_0^t f(\lambda)d\lambda.$$

En dérivant par t, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c\frac{\partial u}{\partial t}+du=f(t).$$

Pour les conditions initiales on a

$$u\Big|_{t=0}=A$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t}F(x,0,t)\Big|_{t=0}+\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(x,t-\lambda,\lambda)\Big|_{t=0}=B,$$

$$u\Big|_{x=0}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t F(0,t-\lambda,\lambda)d\lambda=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\varphi(\lambda)d\lambda=\varphi(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}F(x,t-\lambda,\lambda)d\lambda\Big|_{x=0}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\psi(\lambda)d\lambda=\psi(t).$$

Q. E. D.

On ne parvient pas au même résultat si l'on fait par exemple comme il suit :

$$u\Big|_{x=0}=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}F(x,t-\lambda,\lambda)d\lambda\Big|_{x=0}=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\lambda)d\lambda=0.$$

C'est à cause de la discontinuité au point (o, o). Je crois que c'est mieux de donner l'intégrale non par (17), mais par la formule

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{\partial}{\partial t}I(x,t)+A\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t F(x,t-\lambda,\lambda)d\lambda+A.\end{aligned}$$

Dans la section suivante je veux donner quelqnes autres applications.

7. Diverses applications. a) L'équation intégrale d'Abel généralisée est

$$\varphi(t)=\int_0^t\frac{G(t,\lambda)}{(t-\lambda)^\alpha}f(\lambda)d\lambda$$

dont la solution est

$$f(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\varphi(\lambda)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda \tag{18}$$

$$=\frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{\varphi(0)}{t^{1-\alpha}}+\int_0^t \frac{\varphi'(\lambda)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}\right]d\lambda, \tag{19}$$

où $0<\alpha<1$ et $G(t, \lambda)$ est continue et $G(t, t)\neq 0$.

Pour atteindre de (18) à (19), M. D'Adhemar[1] s'appuie sur le principe de la partie principale et Goursat[2] sur le changement de variables. Goursat réduit l'intégrale à une avec les limites fixes par le changement de variable $\lambda=tv$. Sa méthode est très simple mais il faut admettre la dérivation de $f(\lambda)$.

Or posons

$$I(t)\equiv\int_0^t (t-\lambda)^\alpha \varphi'(\lambda)d\lambda,$$

on a par (12)

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt}&=(t-t)^\alpha\varphi'(t)+\int_0^t \frac{\alpha\varphi'(\lambda)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda\\ &=\alpha\int_0^t \frac{\varphi'(\lambda)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda.\end{aligned} \tag{20}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}I(t)&=(t-\lambda)^\alpha\varphi(\lambda)\Big|_0^t+\alpha\int_0^t \frac{\varphi(\lambda)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda\\ &=-t^\alpha\varphi(0)+\alpha\int_0^t \frac{\varphi(t)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{dI}{dt}=-\alpha\frac{\varphi(0)}{t^{1-\alpha}}+\alpha\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\varphi(\lambda)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda. \tag{21}$$

En comparant (20) et (21), on a

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\varphi(t)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda=\frac{\varphi(0)}{t^{1-\alpha}}+\int_0^t \frac{\varphi'(\lambda)}{(t-\lambda)^{1-\alpha}}d\lambda \qquad \text{Q.E.D.}$$

b) On connaît avec M. Wiener[3] que

$$\begin{aligned}\varphi(0)&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{-t}^t\left(1-\frac{|\lambda|}{t}\right)\varphi(\lambda)d\lambda\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\left(1-\frac{\lambda}{t}\right)\varphi(\lambda)d\lambda+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\left(1-\frac{\lambda}{t}\right)\varphi(-\lambda)d\lambda.\end{aligned}$$

C'est facile à démontrer. Mais comme exercice posons encore

$$I(t)\equiv\int_0^t\left(1-\frac{\lambda}{t}\right)\varphi(\lambda)d\lambda.$$

On a facilement $I(+0)=0$, donc nous prendrons $I(0)\equiv 0$. Or

1. Volterra, Équations intégrales, p. 36.
2. Cours d'analyse III, p. 341.
3. The Fourier intégral (1933), p. 160.

$$\frac{dI}{dt}=\left(1-\frac{\lambda}{t}\right)\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=t}+u(t)$$
$$=u(t),$$

où $$u(t)=\int_0^t \frac{\lambda}{t^2}\varphi(\lambda)d\lambda,$$

donc $$\frac{dI}{dt}\Big|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\left(1-\frac{\lambda}{t}\right)\varphi(\lambda)d\lambda$$

$$\lim_{t\to 0} u(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t \lambda\varphi(\lambda)d\lambda=\frac{\varphi(0)}{2}.$$

Donc $$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\left(1-\frac{\lambda}{t}\right)\varphi(\lambda)d\lambda=\frac{\varphi(0)}{2}.$$

De même pour la limite restante. Q. E. D.

c) L'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f(t) \tag{22}$$

avec les conditions initiales

$$y(0)=0, \quad y(b)=B.$$

La solution est facilement

$$y=\int_0^t (t-\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda+\frac{B}{b}t-\frac{t}{b}\int_0^b (b-\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda. \tag{23}$$

Or d'après le principe de Duhamel-Nomitsu, nous considérons l'Équation $\frac{d^2F(t,\lambda)}{dt^2}=f(\lambda)$,

avec les conditions initiales

$$F(0,\lambda)=0, \quad F_t'(0,\lambda)=A,$$

où A n'est pas encore déterminé. On a par les quadratures

$$F(t,\lambda)=\frac{t^2}{2}f(\lambda)+At. \tag{24}$$

L'intégrale

$$u(t)\equiv\int_0^t \frac{\partial F(t-\lambda,\lambda)}{\partial t}d\lambda \tag{25}$$

vérifie (22) et

$$u(0)=0, \quad u'(0)=A.$$

Il faut assujétir A tel que $u(b)=B$, c'est à dire que

$$\int_0^b \{(b-\lambda)f(\lambda)+A\}d\lambda=B.$$

Par suite

$$A=\frac{B}{b}-\frac{1}{b}\int_0^t (b-\lambda)f(\lambda)d\lambda.$$

En substituant cette valeur dans (24), on obtient l'intégrale cherchée (23).