Sur Certaines Équations de Volterra Singulières

Par **Hirosi Okamura**

(Received September 25, 1939)

I. Introduction

1. *Position des problèmes.*—M. G. C. Evans a traité, dans un de ses travaux,[1] des équations intégrales de forme

$$u(x)+\int_0^x \frac{1+\Gamma(x,s)}{k(x)l(s)}u(s)ds=\phi(x)$$

où u est la fonction inconnue et $k(x)$, $l(x)$, $\Gamma(x,s)$ et $\phi(x)$ sont des fonctions données, continues dans le domaine $0\leqq s\leqq x\leqq b$, sauf au point $x=0$ pour $\phi(x)$, et telles que

$$\Gamma(0,0)=0,$$

$$k(x)l(x)\neq 0 \text{ pour } x>0, \int_0^b \frac{dx}{|k(x)l(x)|}=\infty,$$

$$\lim_{x\to+0} k(x)\phi(x)=0;$$

et, en supposant de plus, hypothèse indispensable pour ses raisonnements, l'existence de quelques dérivées de ces fonctions données, M. Evans a obtenu des solutions des équations et il a démontré la restriction des solutions, c'est-à-dire, la non-existence d'autres solutions satisfaisant à certaines conditions[2] vérifiées par les solutions obtenues, remarquant d'ailleurs que pour être compatible avec telles solutions son hypothèse sur $\phi(x)$ est la plus large; d'autre part il démontre que, en supposant de plus des conditions convenables relatives aux fonctions données, ses solutions sont les seules possibles.[3]

Or, nous pouvons réduire l'équation précédente par une transfortion $u(x)=l(x)\varphi(x)$ à une autre:

$$\varphi(x)+\int_0^x \frac{1+\Gamma(x,s)}{k(x)l(x)}\varphi(s)ds=\frac{\phi(x)}{l(x)}$$

---

1. Trans. Amer. Math. Soc. **12** (1911), p. 429.

2. Par exemple, $u(x)=O\left(\frac{1}{x^\nu}\right)$, $0<\nu<1$, ν étant un nombre lié aux allures des fonctions $k(x)l(x)$ et $\Gamma(x,x)$ pour $x\to+0$.

3. *Voir* § 26 de son Mémoire. Il ne s'occupe, comme solutions, que des fonctions possédant un nombre limité de discontinuités, mais il considère l'intégrale qui figure dans l'équation, au sens de Cauchy, intégrale impropre d'une fonction continue sauf peut-être à quelques points en nombre fini.

ou, en posant

$$m(x) = \pm\frac{1}{k(x)l(x)} > 0, \quad f(x) = \frac{\phi(x)}{l(x)},$$

à l'une ou l'autre des deux équations

$$(A_+) \qquad \varphi(x) + m(x)\int_0^x [1 + \Gamma(x, s)]\varphi(s)ds = f(x),$$

$$(A_-) \qquad \varphi(x) - m(x)\int_0^x [1 + \Gamma(x, s)]\varphi(s)ds = f(x).$$

Nous nous proposons donc de résoudre complètement les équations (A_+) et (A_-), *en nous bornant aux solutions locales au voisiage positif du point* 0, *et nous supposons que, l'inconnue étant* φ, *les fonctions données* $m(x)$, $\Gamma(x, s)$ *et* $f(x)$ *sont finies et mesurables dans le domaine* $0 \leqq s \leqq x \leqq b$ *soit par rapport aux deux variables soit par rapport à chacune d'elles et telles que*

$$m(x) \geqq 0, \ \int_0^b m(x)dx = \infty \ \textit{mais} \ \int_\varepsilon^b m(x)dx < \infty \ \textit{pour tout} \ \varepsilon > 0,$$

$$\overline{\lim_{x \to +0}} |\Gamma(x, x)| < 1$$

et $\Gamma(x, s)$ *satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à* x, *c'est-à-dire qu'il existe une fonction sommable* $L(x)$ *telle que*

$$L(x) \geqq 0, \ \int_0^b L(x)dx < \infty,$$

$$|\Gamma(x_1, s) - \Gamma(x_2, s)| \leqq \int_{x_1}^{x_2} L(x)dx \ \textit{pour} \ 0 \leqq s \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b.$$

Nous prendrons d'abord l'intégrale qui figure dans l'équation, au sens de M. Lebesgue, et quant à $f(x)$ *nous ferons l'hypothèse la plus large qui soit compatible avec ces conditions*, hypothèse que nous indiquerons au n° **2** suivant.

Nous aborderons ensuite la résolution des mêmes équations (A_+) et (A_-) *à l'intégrale prise au sens de Lebesgue-Cauchy.*[1] Nous ferons cela en supposant quelques autres hypothèses convenables sur $\Gamma(x, s)$ avec la moindre hypothèse possible sur $f(x)$.

Dans l'un ou l'autre de ces deux cas, nous démontrerons l'existence d'une et d'une seule solution pour l'équation (A_+) et d'une infinité de solutions dépendant linéairement d'une constante arbitraire,

---

1. Il s'agit de l'intégration d'une fonction sommable sauf peut-être aux voisinages arbitrairement petits de quelques points en nombre fini, définie comme limite d'une intégrale de Lebesgue prise en dehors de ces points exceptionnels. C'est un cas particulier de la totalisation de M. Denjoy et il y aurait quelque intérêt théorique à introduire cette dernière notion dans nos études mais nous ne le ferons pas dans le présent Mémoire.

solutions seules possibles, pour l'équation (A_-). Ainsi notre résultat est de caractère plus complet et d'ailleurs plus général que celui de M. Evans. La méthode de démonstration n'est qu'une modification du procédé d'approximations successives utilisé par M. Evans ou plutôt elle se rattache à la méthode de M. Lalesco[1] relative à l'équation de Volterra de première espèce.

La même méthode d'approximations successives nous permet de résoudre complètement les équations intégrales suivantes, *au voisinage positif de* o,

$$(B_+) \qquad \varphi(x)+\int_0^x [m(x)+\omega(x, s)]\varphi(s)ds=f(x),$$

$$(B_-) \qquad \varphi(x)-\int_0^x [m(x)+\omega(x, s)]\varphi(s)ds=f(x)$$

où φ est la fonction inconnue et $m(x)$, $\omega(x, s)$ et $f(x)$ sont des fonctions données finies dans le domaine $0 \leqq s \leqq x \leqq b$, mesurables soit par rapport aux deux variables soit par rapport à chacune d'elles et telles que $m(x)$ est de même qu'à l'équation (A_+) ou (A_-) et qu'il existe une fonction non négative finie et sommable $\sigma(x)$ de sorte que

$$|\omega(x,s)| \leqq \sigma(x) \quad (0 \leqq s \leqq x \leqq b) \quad avec \int_0^b \sigma(x)dx < \infty.$$

Nous prendrons l'intégrale au sens de M. Lebesgue et sur $f(x)$ nous ferons l'hypothèse la plus large qui soit compatible (*voir* n° **2**).

Nous résoudrons ensuite les mêmes équations (B_+) et (B_-) *à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy* en restreignant plus la fonction $\omega(x, s)$, la fonction $f(x)$ étant considérée toujours le plus largement.

Les résultats sont alors tout à fait analogues au cas des équations (A_+) et (A_-).

Par rapport à l'équation (B_-), pourtant, nous voulons signaler une autre méthode d'approximations successives permettant d'évaluer directement une solution non identiquement nulle de l'équation (B_-) homogène à noyau de signe constant telle que

$$\varphi(x)-\int_0^x [m(x)+\omega(x, s)]\varphi(s)ds=0$$
$$\text{où } m(x)+\omega(x, s) \geqq 0 \qquad (0 \leqq s \leqq x \leqq b).$$

Finalement nous appliquerons ces résultats à l'équation de Volterra de première espèce :

---

1. J. Math. pures appl. 6e série **4** (1908), p. 125–151 ; Introduction à la théorie des équations intégrales (1912), 3e partie, §1, n° 2–3. Il est à noter que M. Lalesco a modifié, dans son Introduction, la méthode de son Mémoire antérieur de 1908.

$$\int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds = f(x),$$

la fonction inconnue étant φ, *avec le noyau analytique* $K(x, s)$ *dont la diagonale* $K(x, x)$ *a un zéro isolé pour* $x=0$. Nous pouvons résoudre complètement cette équation au voisinage positif de o, *en prenant l'intégrale au sens de M. Lebesgue et en considérant* $f(x)$ *sous l'hypothèse la plus large qui soit compatible, si le noyau* $K(x, s)$ *est tel que*

$$K(x, s) = px^i + qs^i + \overline{K}(x, s)$$

où, i *étant un entier positif* ($i \geqq 1$), $\overline{K}(x, s)$ *est la partie de degré supérieur à* i *de* $K(x, s)$, *et où un au moins des coefficients* p *et* q *n'est pas nul.* Il est à remarquer que $K(x, x)$ peut avoir un zéro multiple d'ordre supérieur à i pour $x=0$. Sous les mêmes conditions nous chercherons toutes les solutions continues, retrouvant ainsi des résultats classiques connus d'une part et obtenant quelques résultats nouveaux à notre connaissance d'autre part.[1]

2. *Hypothèses sur* $f(x)$.—*Pour que l'équation* (A_+) *ou* (A_-) *à l'intégrale de Lebesgue ait une solution* $\varphi(x)$, *il faut que* $\varphi(x)$ *soit sommable dans un intervalle* $(0, c)$ $(c>0)$ *et que* $f(x)$ *soit somme de deux fonctions* $g(x)$ *et* $h(x)$

$$(1) \qquad f(x) = g(x) + h(x)$$

telles que $g(x)$ *est sommable dans* $(0, c)$ *et* $h(x)$ *est de forme*

$$h(x) = m(x)\alpha(x) = m(x)\int_0^x \alpha'(s)ds$$

où $\alpha'(x)$ *est une fonction sommable dans* $(0, c)$ *et* $\alpha(x)$ *est son intégrale indéfinie.*

Il est clair, en effet, que $\varphi(x)$ doit être sommable dans un intervalle $(0, c)$, d'après l'inégalité

$$\overline{\lim_{\substack{x\to 0\\ s\to 0\\ (0\leqq s\leqq x)}}} |\Gamma(x, s)| < 1.$$

Alors, de l'équation (A_+) ou (A_-), il s'ensuit que $f(x)$ est somme de $\varphi(x)$, $\pm m(x)\int_0^x \varphi(s)ds$ et $\pm m(x)\int_0^x \Gamma(x, s)\varphi(s)ds$, donc il suffit de démontrer que $\int_0^x \Gamma(x, s)\varphi(s)ds$ est de forme $\int_0^x \alpha'(s)ds$, $\alpha'(x)$ étant sommable dans $(0, c)$. Or, d'après la condition de Lipschitz relative à $\Gamma(x, s)$, on peut poser

1. *Cf.* Lalesco, *loc. cit.*, et Volterra et Pérès, Théorie générale des fonctionnelles, t. I (1936), Chap. VII, §II.

$$\Gamma(x, s) = \Gamma(s, s) + \int_s^x \Gamma_1(t, s)dt \qquad (0 \leqq s \leqq x \leqq b)$$

où $\Gamma_1(x, s)$ est une fonction mesurable telle que

$$|\Gamma_1(x, s)| \leqq L(x).$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^x \Gamma(x, s)\varphi(s)ds &= \int_0^x [\Gamma(s, s) + \int_s^x \Gamma_1(t, s)dt]\varphi(s)ds \\ &= \int_0^x \Gamma(s, s)\varphi(s)ds + \int_0^x dt \int_0^t \Gamma_1(t, s)\varphi(s)ds \\ &= \int_0^x [\Gamma(t, t)\varphi(t) + \int_0^t \Gamma_1(t, s)\varphi(s)ds]dt\end{aligned}$$

qui est de forme $\int_0^x a'(t)dt$ en posant

$$a'(t) = \Gamma(t, t)\varphi(t) + \int_0^t \Gamma_1(t, s)\varphi(s)ds.$$

De même, *pour que l'équation* (B_+) *ou* (B_-) *à l'intégrale de Lebesgue ait une solution* $\varphi(x)$, *il faut que* $\varphi(x)$ *soit sommable dans un intervalle* $(0, c)$ $(c > 0)$ *et que* $f(x)$ *soit de la constitution* (1).

En effet, il est facile à voir que $\varphi(x)$ est sommable dans $(0, c)$ parce que $m(x)$ est supérieur à $\sigma(x)$ pour une infinité de valeurs de x, positives et arbitrairement petites. Cela posé, il est seule question de la fonction $\int_0^x \omega(x, s)\varphi(s)ds$, mais c'est une fonction sommable en module inférieur à $\sigma(x)\int_0^c |\varphi(s)|ds$, appartenant donc à $g(x)$ de (1).

Nous pouvons énoncer des résultats analogues au cas où l'intégrale est prise au sens de Lebesgue-Cauchy, en supposant quelques hypothèses convenables sur $\Gamma(x, s)$ ou $\omega(x, s)$ (*voir* n^{os} **8** et **11**) ; alors une solution $\varphi(x)$ doit être intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy et $f(x)$ est de forme, dans un intervalle $(0, c)$ $(c > 0)$,

$(\bar{1})$ $\qquad f(x) = \bar{g}(x) + \bar{h}(x),$

où $\bar{g}(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy, et $\bar{h}(x)$ est de forme

$$\bar{h}(x) = m(x)\bar{a}(x) = m(x)\int_0^x \bar{a}'(s)ds,$$

l'intégrale étant au sens de Lebesgue-Cauchy.

Un but du présent Mémoire est donc de démontrer l'existence des solutions des équations (A) ou (B) sous la seule hypothèse (1) où $(\bar{1})$ relative à $f(x)$.

3. *Préliminaires.*—Avant d'aborder la question nous allons démontrer, comme préliminaires, que *la constitution nécessaire* (1) *est suffisante tout au moins pour la solubilité des équations*

$$(2_+) \qquad \varphi(x)+m(x)\int_0^x \varphi(s)ds=f(x),$$

$$(2_-) \qquad \varphi(x)-m(x)\int_0^x \varphi(s)ds=f(x)$$

où φ est l'inconnue, $m(x)$ est de même que précédemment et l'intégrale est au sens de M. Lebesgue.

Considérons d'abord l'équation (2_+). Elle entraîne, en désignant par $M(x)$ une intégrale indéfinie de $m(x)$ $(M(x)=\int m(x)dx)$,

$$(3_+) \qquad \int_0^x \varphi(s)ds=e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}f(s)ds,$$

d'où, par (2_+),

$$(4_+) \qquad \varphi(x)=-m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}f(s)ds+f(x).$$

Il est à démontrer par (1) que la fonction $\varphi(x)$ donnée par (4_+) est sommable dans $(0, c)$ et qu'elle satisfait à (3_+), l'égalité (2_+) étant une conséquence de (3_+) et de (4_+). Pour cela il suffit de considérer séparément les deux cas : $f(x)=g(x)$ ou $f(x)=h(x)$. Si $f(x)=g(x)$, c'est-à-dire, si $f(x)$ est sommable dans $(0, c)$, on a

$$\int_0^x [m(t)e^{-M(t)}\int_0^t e^{M(s)}|f(s)|\,ds]dt$$
$$=\int_0^x |f(t)|\,dt-e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}|f(s)|\,ds,$$

ce qui nous montre que le second membre de (4_+) est sommable ; et on vérifie de même l'égalité (3_+). D'autre part si

$$f(x)=h(x)=m(x)a(x)=m(x)\int_0^x a'(s)ds,$$

l'équation (2_+) devient

$$[\varphi(x)-a'(x)]+m(x)\int_0^x [\varphi(s)-a'(s)]ds=-a'(x),$$

donc nous avons par ce qui précède,

$$\varphi(x)-a'(x)=m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}a'(s)ds-a'(x)$$

ou

$$(5_+) \qquad \varphi(x)=m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}a'(s)ds\ ;$$

c'est une fonction sommable satisfaisant à (2_+), donc (5_+) n'est qu'une autre forme de la formule (4_+) pour le cas où $f(x)=m(x)\int_0^x a'(s)ds$, ce qu'on peut voir aussi par un calcul direct facile.

Considérons ensuite l'équation (2_-). Elle entraîne

$$(3_-) \qquad \int_0^x \varphi(s)ds=-e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}f(s)ds+Ce^{M(x)},$$

C étant une constante arbitraire, d'où, par (2_-),

$$(4_-) \qquad \varphi(x) = -m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}f(s)ds + Cm(x)e^{M(x)} + f(x).$$

Il est à démontrer par (1) que la fonction $\varphi(x)$ donnée par (4_-) est sommable dans $(0, c)$ et qu'elle satisfait à (3_-). À cet effet il suffit évidemment de considérer séparément les deux cas: $f(x)=g(x)$ ou $f(x)=h(x)$, en supposant $C=0$. Si $f(x)=g(x)$, on a pour $0<x<c$,

$$\int_0^x [m(t)e^{M(t)}\int_t^c e^{-M(s)}|f(s)|ds]dt$$
$$= e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}|f(s)|ds + \int_0^x |f(t)|dt,$$

donc le second membre de (4_-) est sommable et on vérifiera de même l'égalité (3_-). D'autre part si $f(x)=h(x)=m(x)\int_0^x a'(s)ds$, l'équation (2_-) devient

$$[\varphi(x)+a'(x)] - m(x)\int_0^x [\varphi(s)+a'(s)]ds = a'(x),$$

donc par ce que nous venons de démontrer, nous avons

$$\varphi(x)+a'(x) = -m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}a'(s)ds + C_1 m(x)e^{M(x)} + a'(x),$$

C_1 étant une constante arbitraire, ou

$$(5_-) \qquad \varphi(x) = -m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}a'(s)ds + C_1 m(x)e^{M(x)};$$

c'est une autre forme de (4_-) pour le cas où $f(x)=m(x)\int_0^x a'(s)ds$ comme précédemment.

Ces résultats subsistent tout à fait analogues si l'on considèrs les équations (2_+) *et* (2_-) *à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy et que l'on adopte la constitution de* $f(x)$ $(\bar{1})$ *au lieu de* (1). La démonstration se fait comme aux lignes précédentes avec quelques petites précautions.[1]

Ainsi nous obtenons toutes les solutions des équations (2_+) et (2_-). Il nous reste à établir des pareils résultats relatifs aux équations (A_+), (A_-) etc.

---

1. On a par intégration par parties,

$$\int_0^x e^{M(s)}\bar{g}(s)ds = e^{M(x)}\int_0^x \bar{g}(s)ds - \int_0^x m(s)e^{M(s)}ds\int_0^s \bar{g}(t)dt,$$

d'où

$$\lim_{x\to+0} e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}\bar{g}(s)ds = 0.$$

On a de même

$$\lim_{x\to+0} e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}\bar{g}(s)ds = 0.$$

II. Équation (A_+) à l'intégrale de Lebesgue

4. *Existence d'une solution.*—En introduisant un paramètre dans l'équation de la manière suivante :

$$\varphi(x)+m(x)\int_0^x[1+\lambda\Gamma(x,s)]\varphi(s)ds=f(x),$$

et en admettant un développement

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots,$$

nous calculerons les fonctions $\varphi_n(x)$. On a d'abord

$$\varphi_0(x)+m(x)\int_0^x\varphi_0(s)ds=f(x)$$

d'où l'on peut déterminer $\varphi_0(x)$ par la formule (4_+) d'parès l'hypothèse (1), et, en général, en posant

$$f_n(x)=-m(x)\int_0^x\Gamma(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds \qquad (n=1,2,\ldots),$$

on a

$$\varphi_n(x)+m(x)\int_0^x\varphi_n(s)ds=f_n(x) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Comme $\varphi_0(x)$ est sommable dans $(0,c)$ d'après (1) (*voir* n° **3**), on peut poser

$$f_1(x)=m(x)\int_0^x\alpha_1'(s)ds,$$

$\alpha_1'(x)$ étant une fonction sommable dans $(0,c)$ telle que (n° **2**)

$$\alpha_1'(x)=-\Gamma(x,x)\varphi_0(x)-\int_0^x\Gamma_1(x,s)\varphi_0(s)ds.$$

Par conséquent la formule (5_+) $(\alpha'=\alpha_1')$ donne $\varphi_1(x)$ et ainsi de suite successivement. On a, en général,

$$f_n(x)=m(x)\int_0^x\alpha_n'(s)ds,$$

$$\alpha_n'(x)=-\Gamma(x,x)\varphi_{n-1}(x)-\int_0^x\Gamma_1(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds,$$

$$\varphi_n(x)=m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}\alpha_n'(s)ds \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Pour démontrer la convergence du développement pour $\lambda=1$, nous remarquons qu'on peut prendre une fonction $N'(x)$ non négative et sommable dans $(0,b)$ avec une intégrale indéfinie $N(x)$ telle que

$$N'(x)\geqq L(x),\ N(x)\geqq\Gamma(x,x),\ \lim_{x\to+0}N(x)<1\,;$$

et si l'on forme le développement en puissance de λ d'une solution de l'équation

$$(6)\qquad \varphi(x)+m(x)\int_0^x[1-\lambda N(x)]\varphi(s)ds=m(x)\int_0^x|\alpha_1'(s)|ds$$

analogue à la précédente, on obtiendra une série majorante de la série

$$\varphi_1(x)+\lambda\varphi_2(x)+\lambda^2\varphi_3(x)+\dots .$$

Or, nous pouvons calculer le dernier développement directement de l'équation (6). Posons

$$m_\lambda(x)=m(x)-\lambda N(x)m(x),$$

$$M_\lambda(x)=M(x)-\lambda\int N(x)m(x)dx\,;$$

l'équation (6) devient

$$\varphi(x)+m_\lambda(x)\int_0^x\varphi(s)ds=m_\lambda(x)\int_0^x\beta'_\lambda(s)ds,$$

où

$$\int_0^x\beta'_\lambda(s)ds=\frac{\int_0^x|\alpha'_1(s)|\,ds}{1-\lambda N(x)},$$

$$\beta'_\lambda(x)=\frac{|\alpha'_1(x)|}{1-\lambda N(x)}+\frac{\lambda N'(x)\int_0^x|\alpha'_1(s)|\,ds}{[1-\lambda N(x)]^2},$$

et on a sa solution, par (5_+),

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=m_\lambda(x)e^{-M_\lambda(x)}\int_0^x e^{M_\lambda(s)}\beta'_\lambda(s)ds\\&=m_\lambda(x)\,e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)+\lambda\int_s^x N(t)m(t)dt}\beta'_\lambda(s)ds.\end{aligned}$$

Ici, en tenant compte de l'expression de $\beta'_\lambda(s)$, on peut développer en série entière de λ la fonction sous le signe d'intégration, la série obtenue étant pour $\lambda=1$ à termes non négatifs, fonctions de s, dont la somme est sommable dans un intervalle $(0, x)$ pourvue que $N(x)<1$, parce que

$$\lim_{s\to+0}\left(M(s)+\int_s^x N(t)m(t)dt\right)=-\infty\,;$$

donc en l'intégrant terme à terme de 0 à x et en multipliant par $m(x)e^{-M(x)}$,[1] nous aurons une série entière de λ, dont les coefficients sont des fonctions non négatives de x, et dont la somme pour $\lambda=1$ est égale à

$$m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)+\int_s^x N(t)m(t)dt}\beta'_1(s)ds,$$

cette expression étant une fonction de x sommable au voisinage de 0, parce qu'elle est égale à

$$\frac{1}{1-N(x)}m_1(x)e^{-M_1(x)}\int_0^x e^{M_1(s)}\beta'_1(s)ds$$

---

1. Pour éviter une difficulté dans le raisonnement nous n'avons pas multiplié par $m_\lambda(x)e^{-M(x)}$, mais il est possible de prendre ce dernier facteur et de démontrer que la série obtenue est à termes non négatifs pour $\lambda=1$.

où le premier facteur $\dfrac{1}{1-N(x)}$ est borné au voisinage de 0 et le second facteur est sommable (n° **3**). Par conséquent, en multipliant par $1-\lambda N(x)$, nous avons comme solution de (6) une série entière de λ dont la somme des modules des termes est une fonction de x sommable au voisinage de 0 pour $|\lambda|\leqq 1$. Donc on a une série majorante telle que, pour $0\leqq\lambda\leqq 1$,

$$|\varphi_1(x)|+\lambda|\varphi_2(x)|+\ldots\leqq m_\lambda(x)e^{-M_\lambda(x)}\int_0^x e^{M_\lambda(s)}\beta'_\lambda(s)ds$$

où le second membre est une fonction de x sommable au voisinage de 0 pour $|\lambda|\leqq 1$. Il en résulte que la série

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots$$

donne une solution sommable de l'équation (A_+).

Ainsi *l'équation* (A_+) *a une solution sommable sous la condition* (1).

5. *Unicité de la solution.*—Si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation (A_+) à l'intégrale de Lebesgue, $\varphi(x)$ doit être sommable au voisinage de 0 (n° **2**). Donc, s'il y a deux solutions, leur différence, soit $\psi(x)$, est aussi sommable au voisinage de 0 et elle satisfait à l'équation homogène

$$\psi(x)+m(x)\int_0^x[1+\Gamma(x,s)]\psi(s)ds=0.$$

Partant de $\psi(x)$ formons une suite $\psi_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ où

$$\psi_0(x)=\psi(x)$$

et $\psi_n(x)$ sont des solutions des équations

$$\psi_n(x)+m(x)\int_0^x\psi_n(s)ds=-m(x)\int_0^x\Gamma(x,s)\psi_{n-1}(s)ds\quad(n=1,2,\ldots);$$

alors la série des $\psi_n(x)$ converge au voisinage de 0, comme on a vu au n° précédent. Par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=0,$$

mais d'après la nature de $\psi(x)$ on a de suite

$$\psi(x)=\psi_0(x)=\psi_1(x)=\ldots;$$

par conséquent on a nécessairement

$$\psi(x)=0.$$

Ainsi *l'équation* (A_+) *à l'intégrale de Lebesgue n'a qu'une seule solution au voisinage de* 0.

III. Équation (A_-) à l'intégrale de Lebesgue

6. *Existence de solutions.*—De même qu'au cas précédent, nous considérerons une équation

$$\varphi(x)-m(x)\int_0^x[1+\lambda\Gamma(x,s)]\varphi(s)ds=f(x),$$

et en admettant à priori un développement

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\dots,$$

nous calculerons les fonctions $\varphi_n(x)$. On a d'abord

$$\varphi_0(x)-m(x)\int_0^x\varphi_0(s)ds=f(x),$$

où l'on a une infinité de solutions données par la formule (4_-), d'après l'hypothèse (1), parmi lesquelles nous en prendrons arbitrairement une, soit $\varphi_0(x)$. En général, on a

$$f_n(x)=m(x)\int_0^x\Gamma(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds,$$

$$\varphi_n(x)-m(x)\int_0^x\varphi_n(s)ds=f_n(x)\qquad(n=1,2,\dots).$$

Comme $\varphi_0(x)$ est sommable dans $(0,c)$ (n° **3**), on peut poser

$$f_1(x)=m(x)\int_0^x\alpha_1'(s)ds,$$

$\alpha_1'(x)$ étant une fonction sommable dans $(0,c)$ telle que

$$\alpha_1'(x)=\Gamma(x,x)\varphi_0(x)+\int_0^x\Gamma_1(x,s)\varphi_0(s)ds\ \text{(n° 2)}.$$

Par conséquent on a par la formule (5_-) $(\alpha'=\alpha_1')$,

$$\varphi_1(x)=-m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}\alpha_1'(s)ds+C_1m(x)e^{M(x)};$$

ici, en supposant le nombre c suffisamment petit tel que $m(c)\neq 0$ et $N(c)<1$ (*voir* n° **4**), nous prenons une solution $\varphi_1(x)$ telle que $\varphi_1(c)=0$, par suite $C_1=0$. Nous procéderons d'une manière analogue pour $\varphi_n(x)$ $(n=2,3,\dots)$ et nous avons en général

$$f_n(x)=m(x)\int_0^x\alpha_n'(s)ds,$$

$$\alpha_n'(x)=\Gamma(x,x)\varphi_{n-1}(x)+\int_0^x\Gamma_1(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds,$$

$$\varphi_n(x)=-m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}\alpha_n'(s)ds\qquad(n=1,2,\dots).$$

Un raisonnement analogue au n° **4** nous donne une série majorante de la série $\varphi_1(x)+\lambda\varphi_2(x)+\dots$ par une solution de l'équation suivante:

$$\varphi(x)-m(x)\int_0^x[1-\lambda N(x)]\varphi(s)ds=-m(x)\int_0^x|\alpha_1'(s)|ds$$

ou

$$\varphi(x)-m_\lambda(x)\int_0^x\varphi(s)ds=-m_\lambda(x)\int_0^x\beta_\lambda'(s)ds$$

où

$$m_\lambda(x)=m(x)[1-\lambda N(x)],\quad \int_0^x \beta'_\lambda(s)ds=\frac{\int_0^x |\alpha'_1(s)|ds}{1-\lambda N(x)},$$

$$\beta'_\lambda(x)=\frac{|\alpha'_1(x)|}{1-\lambda N(x)}+\frac{\lambda N'(x)\int_0^x |\alpha'_1(s)|ds}{[1-\lambda N(x)]^2}.$$

Comme au n° **4**, seulement en remarquant cette fois que $\varphi_n(c)=0$ ($n=1, 2, \ldots$), on a une série majorante par le développement en série entière de λ de

$$\varphi(x)=m_\lambda(x)e^{M_\lambda(x)}\int_x^c e^{-M_\lambda(s)}\beta'_\lambda(s)ds$$
$$=m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)+\lambda\int_x^s N(t)m(t)dt}[1-\lambda N(x)]\beta'_\lambda(s)ds$$

où l'expression

$$[1-\lambda N(x)]\beta'_\lambda(s)=\left(1+\lambda\frac{N(s)-N(x)}{1-\lambda N(x)}\right)\left(|\alpha'_1(s)|+\frac{\lambda N'(s)}{1-\lambda N(s)}\int_0^s|\alpha'_1(t)|dt\right)$$

est une série entière de λ à coefficients non négatifs, par conséquent pour $\varphi(x)$ on a aussi une série entière de λ à coefficients non négatifs, fonctions de x s'annulant pour $x=c$, dont la somme pour $\lambda=1$ est une fonction de x sommable dans $(0, c)$ $[N(c)<1]$. Donc c'est une série majorante et on a

$$|\varphi_1(x)|+\lambda|\varphi_2(x)|+\ldots\leqq m_\lambda(x)e^{M_\lambda(x)}\int_x^c e^{-M_\lambda(s)}\beta'_\lambda(s)ds \quad (0\leqq\lambda\leqq 1),$$

le second membre étant une fonction sommable de x dans $(0, c)$ pour $|\lambda|\leqq 1$. Il en résulte que la série

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots$$

donne une solution sommable de l'équation (A_-). Or, pour la former, nous n'avons pas fixé la constante C dans l'expression

$$\varphi_0(x)=-m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}f(s)ds+Cm(x)e^{M(x)}+f(x),$$

donc notre solution $\varphi(x)$ contient C linéairement :

$$\varphi(x)=\chi(x)+C\psi(x).$$

Ici $\psi(x)$ n'est pas identique à 0, parce qu'on a

$$\varphi_0(c)=Cm(c)e^{M(c)}+f(c),\quad \varphi_1(c)=\varphi_2(c)=\cdots=0,$$

et par suite

$$\psi(c)=m(c)e^{M(c)}\neq 0.$$

Ainsi *l'équation* (A_-) *a, sous la condition* (1), *une infinité de solutions sommables dépendant linéairement d'une constante arbitraire.*

7. *Restriction des solutions.*—Si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation (A_-) à l'intégrale de Lebesgue, $\varphi(x)$ doit être sommable au voisinage de o (n° 2). Il est possible d'après la théorie habituelle de l'équation de Volterra que nous prolongions $\varphi(x)$ jusqu'au point c défini au n° précédent, donc nous supposerons que $\varphi(x)$ est une solution sommable dans $(0, c)$. Or d'après le n° précédent il y a une solution qui prend une valeur donnée quelconque au point c ; en retranchant de la solution $\varphi(x)$ une de ces solutions, nous obtenons une fonction $\psi(x)$ sommable dans $(0, c)$ telle que

$$\psi(x)-m(x)\int_0^x[1+\Gamma(x, s)]\psi(s)ds=0, \quad \psi(c)=0.$$

Formons une suite $\psi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ où

$$\psi_0(x)=\psi(x)$$

et $\psi_n(x)$ sont des solutions s'annulant pour $x=c$, des équations

$$\psi_n(x)-m(x)\int_0^x\psi_n(s)ds=m(x)\int_0^x\Gamma(x, s)\psi_{n-1}(s)ds \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Alors, par le n° précédent,

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=0,$$

d'où

$$\psi(x)=\psi_0(x)=\psi_1(x)=\cdots=0.$$

Ainsi *l'équation* (A_-) *à l'intégrale de Lebesgue n'a que les solutions données au n° précédent :* $\varphi(x)=\chi(x)+C\psi(x)$, *au voisinage de* o.

IV. Équations (A_+) et (A_-) à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy

8. Supposons maintenant que la fonction $\Gamma(x, s)$ ait ses dérivées $\Gamma'_x(x, s)$, $\Gamma'_s(x, s)$ et $\Gamma''_{xs}(x, s)$ bornées, ou tout au moins faisons les hypothèses suivantes (a-d).

a. *Supposons que* $\Gamma(x, x)=0$.

Ce n'est point artificiel parce que l'on peut réduire le noyau des équations d'une manière suivante :

$$m(x)[1+\Gamma(x, s)]=m(x)[1+\Gamma(x, x)]\left(1+\frac{\Gamma(x, s)-\Gamma(x, x)}{1+\Gamma(x, x)}\right),$$

où l'on désigne $m(x)[1+\Gamma(x, x)]$ et $\dfrac{\Gamma(x, s)-\Gamma(x, x)}{1+\Gamma(x, x)}$ par $m(x)$ et $\Gamma(x, s)$ respectivement.

b. $\Gamma(x, s)$ *satisfait, comme précédemment, à la condition de Lipschitz par rapport à* x, *c'est-à-dire que, tenant compte de l'hypothèse précédente,*

$$\Gamma(x, s)=\int_s^x \Gamma_1(t, s)dt, \quad |\Gamma_1(x, s)| \leqq L(x), \quad \int_0^b L(x)dx < \infty.$$

c. *Supposons que la fonction $\Gamma(x, s)$ soit absolument continue par rapport à s c'est-à-dire qu'elle soit une intégrale indéfinie d'une fonction $\Gamma_2(x, s)$ sommable par rapport à s dans $(0, x)$.* On a

$$\Gamma(x, s)=-\int_s^x \Gamma_2(x, t)dt.$$

Alors *s'il existe une solution $\varphi(x)$ de l'équation (A_+) ou (A_-) à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy, il faut que $\varphi(x)$ soit intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy dans un intervalle* $(0, c)$ $(c>0)$. On a, en effet, pour une valeur de x telle que $|\Gamma(x, s)| < 1$ $(0 \leqq s \leqq x)$,

$$\int \varphi(s)ds = \frac{1}{1+\Gamma(x, s)} \int [1+\Gamma(x, s)]\varphi(s)ds$$
$$+\int \left(\frac{\Gamma_2(x, s)}{[1+\Gamma(x, s)]^2} \int [1+\Gamma(x, s)]\varphi(s)ds \right) ds,$$

d'où l'on conclut facilement l'intégrabilité de $\varphi(x)$.

d. *Supposons que $\Gamma_2(x, s)$ soit, comme fonction de x, une intégrale indéfinie de $\Gamma_{21}(x, s)$ sommable par rapport à x dans (s, b), c'est-à-dire*

$$\Gamma_2(x, s)=\int \Gamma_{21}(x, s)dx,$$[1]

et que $\Gamma_2(x, x)$ et

$$\int_0^x |\Gamma_{21}(x, s)|ds$$

soient des fonctions sommables de x dans $(0, b)$.

Alors *si $\varphi(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy dans* $(0, c)$ $(0 < c \leqq b)$, *l'expression*

$$\int_0^x \Gamma(x, s)\varphi(s)ds$$

est une fonction absolument continue de x pour $0 \leqq x \leqq c$ et elle s'annule pour $x=0$. On a, en effet,

$$\int_0^x \Gamma(x, s)\varphi(s)ds = -\int_0^x \Gamma_2(x, s)ds\int_0^s \varphi(t)dt \quad \text{(intégration par parties)}$$
$$= -\int_0^x \left(\Gamma_2(u, u)\int_0^u \varphi(t)dt + \int_0^u \Gamma_{21}(u, s)ds\int_0^s \varphi(t)dt \right) du$$

(*cf.* n° **2**),

---

1. Cette condition est équivalente à la condition

$$\Gamma_1(x, s)=\int \Gamma_{12}(x, s)ds,$$

l'intégrale indéfinie étant au sens de M. Lebesgue, parce que l'on a

$$\Gamma(x, s)=\int_s^x \Gamma_1(t, s)dt \quad \text{et} \quad \Gamma(x, s)=-\int_s^x \Gamma_2(x, t)dt.$$

On a de plus $\Gamma_{12}(x, s)=\Gamma_{21}(x, s)$ sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle.

où la fonction entre parenthèses est sommable par rapport à u d'après hypothèse actuelle.

Il en résulte que *si l'équation* (A_+) *ou* (A_-) *à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy a une solution, il faut que* $f(x)$ *soit de la constitution* $(\bar{1})$ (n° **2**).

Réciproquement, sous la condition $(\bar{1})$, on peut résoudre les équations comme il suit.

D'après $(\bar{1})$, il existe une fonction $\bar{\varphi}(x)$ intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy dans $(0, c)$ telle que

$$\bar{\varphi}(x) \pm m(x)\int_0^x \bar{\varphi}(s)ds = f(x).$$

Alors l'équation (A_+) ou (A_-) entraîne

$$[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] \pm m(x)\int_0^x [\varphi(s) - \bar{\varphi}(s)]ds = \mp m(x)\int_0^x \Gamma(x, s)\varphi(s)ds,$$

où le second membre est de la forme (1) d'après ce que nous avons dit ci-dessus, donc la fonction $\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)$ doit être sommable dans $(0, c)$ (n° **3**). D'ailleurs cette dernière fonction satisfait à une équation

$$[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] \pm m(x)\int_0^x [1 + \Gamma(x, s)][\varphi(s) - \bar{\varphi}(s)]ds$$
$$= \mp m(x)\int_0^x \Gamma(x, s)\bar{\varphi}(s)ds\,;$$

c'est un cas déjà traité (§ II, § III).

Ainsi, *dans le cas actuel de l'intégrale de Lebesgue-Cauchy, l'équation* (A_+) *a une et une seule solution et l'équation* (A_-) *a juste une infinité de solutions dépendant linéairement d'une constante arbitraire.*

V. Équations (B_+) et (B_-)

9. *Équation* (B_+) *à l'intégrale de Lebesgue.*—Étant donnée une équation (B_+) avec la condition (1), formons une série

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots,$$

de façon que

$$\varphi_0(x) + m(x)\int_0^x \varphi_0(s)ds = f(x),$$

$$\varphi_n(x) + m(x)\int_0^x \varphi_n(s)ds = f_n(x)$$

où

$$f_n(x) = -\int_0^x \omega(x, s)\varphi_{n-1}(s)ds \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

D'après (1) $\varphi_0(x)$ est sommable dans $(0, c)$ (n° **3**), et $f_n(x)$ et $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) le sont aussi (n^{os} **2** et **3**). On a par (4_+),

$$\varphi_n(x) = -m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}f_n(s)ds + f_n(x).$$

Nous avons évidemment

$$|f_n(x)| \leqq \sigma(x)\int_0^x |\varphi_{n-1}(s)|\, ds,$$

$$|\varphi_n(x)| \leqq m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}|f_n(s)|\, ds + |f_n(x)|$$

$$(n=1, 2, \ldots),$$

et par suite

$$|\varphi_n(x)| \leqq \left(m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}\sigma(s)ds + \sigma(x)\right)\int_0^x |\varphi_{n-1}(s)|\, ds \quad (n=1, 2, \ldots),$$

où la fonction entre parenthèses est sommable dans $(0, b)$ d'après l'hypothèse que $\sigma(x)$ est sommable (*cf.* n° **3**) ; nous la désignerons par $S(x)$, par conséquent

$$|\varphi_n(x)| \leqq S(x)\int_0^x |\varphi_{n-1}(s)|\, ds \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

où

$$S(x) = m(x)e^{-M(x)}\int_0^x e^{M(s)}\sigma(s)ds + \sigma(x).$$

Il en résulte que

$$|\varphi_n(x)| \leqq S(x)\int_0^x \frac{\left[\int_s^x S(t)dt\right]^{n-1}}{(n-1)!}|\varphi_0(s)|\, ds \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

et par suite

$$|\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)| + \ldots \leqq S(x)\int_0^x e^{\int_s^x S(t)dt}|\varphi_0(s)|\, ds,$$

la série au premier membre étant convergente dont la somme est inférieure en module au second membre sommable dans $(0, c)$. Donc, en substituant la série $\varphi(x)$ dans l'équation (B_+) on constatera qu'elle satisfait à l'équation.

On prouvera de même qu'au cas de l'équation (A_+) (n° **5**) l'unicité de la solution.

Ainsi, *l'équation* (B_+) *a, sous la condition* (1), *une et une seule solution sommable.*

10. *Équation* (B_-) *à l'intégrale de Lebesgue.*—Formons une suite de fonctions $\varphi_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ de manière que

$$\varphi_0(x) - m(x)\int_0^x \varphi_0(s)ds = f(x),$$

$$\varphi_n(x) - m(x)\int_0^x \varphi_n(s)ds = f_n(x)$$

où

$$f_n(x) = \int_0^x \omega(x, s)\varphi_{n-1}(s)ds \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Nous prenons comme $\varphi_0(x)$, cela étant possible par l'hypothèse (1), une solution sommable dans $(0, c)$, arbitraire d'ailleurs, et nous fixons $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ telle que

$$\int_0^c \varphi_n(s)ds=0,$$

c étant supposé suffisamment petit que nous préciserons ci-après ; nous avons ainsi par les formules (3_-) et (4_-) $(C=0)$,

$$\varphi_n(x)=-m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}f_n(s)ds+f_n(x) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Alors, on a pour $0<x<c$,

$$|\varphi_n(x)| \leqq \left(m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}\sigma(s)ds+\sigma(x)\right)\int_0^c |\varphi_{n-1}(s)|\,ds$$

$$=S_1(x)\int_0^c |\varphi_{n-1}(s)|\,ds \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

où nous avons posé

$$S_1(x)=m(x)e^{M(x)}\int_x^c e^{-M(s)}\sigma(s)ds+\sigma(x),$$

$S_1(x)$ étant une fonction sommable dans $(0, b)$ (*cf.* n° **3**). Il en résulte que

$$|\varphi_n(x)| \leqq S_1(x)\left(\int_0^c S_1(s)ds\right)^{n-1}\int_0^c |\varphi_0(s)|\,ds \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

par conséquent, en supposant que c est tellement petit que

$$\int_0^c S_1(s)ds=c_1<1,$$

on a

$$|\varphi_1(x)|+|\varphi_2(x)|+\ldots \leqq S_1(x)\frac{1}{1-c_1}\int_0^c |\varphi_0(s)|\,ds,$$

donc la série

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots$$

donne une solution de l'équation (B_-). Ainsi, à cause de l'indétermination de $\varphi_0(x)$, nous obtenons une infinité de solutions

$$\varphi(x)=\chi(x)+C\psi(x),$$

C étant une constante arbitraire.

On prouvera de même qu'au cas de l'équation (A_-) la non-existence d'autres solutions.

Ainsi, *sous la condition* (1), *l'équation* (B_-) *a juste une infinité de solutions sommables dépendant linéairement d'une constante arbitraire.*

11. *Équation* (B_+) *ou* (B_-) *à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy.— Supposons maintenant que* $\omega(x, s)$ *soit, comme fonction de* s, *une in-*

tégrale indéfinie d'une fonction $\omega_2(x, s)$ *sommable par rapport à* s *dans* $(0, x)$, *c'est-à-dire*

$$\omega(x, s)=\int\omega_2(x, s)ds$$

et que la fonction de x

$$\int_0^x|\omega_2(x, s)|ds$$

soit sommable dans $(0, b)$.

Alors *une solution* $\varphi(x)$ *de l'équation* (B_+) *ou* (B_-) *à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy doit être intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy au voisinage de* 0. En effet, pour un point x tel que $\sigma(x)<m(x)$, on a

$$\int\varphi(s)ds=\frac{1}{m(x)+\omega(x, s)}\int[m(x)+\omega(x, s)]\varphi(s)ds$$
$$+\int\left(\frac{\omega_2(x, s)}{[m(x)+\omega(x, s)]^2}\int[m(x)+\omega(x, s)]\varphi(s)ds\right)ds\,;$$

par suite $\varphi(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy dans $(0, x)$.

D'autre part, *si* $\varphi(x)$ *est intégrable au sens de Lebesgue-Cauchy dans un intervalle* $(0, c)$, *la fonction de* x

$$\int_0^x\omega(x, s)\varphi(s)ds$$

est sommable dans $(0, c)$. Car on a

$$\int_0^x\omega(x, s)\varphi(s)ds=\omega(x, x)\int_0^x\varphi(s)ds-\int_0^x\omega_2(x, s)\,ds\int_0^s\varphi(t)dt$$

d'où

$$\left|\int_0^x\omega(x, s)\varphi(s)ds\right|\leqq\sigma(x)\left|\int_0^x\varphi(s)ds\right|+\int_0^x\left|\omega_2(x, s)\int_0^s\varphi(t)dt\right|ds,$$

le second membre étant évidemment sommable.

Il en résulte que *si l'équation* (B_+) *ou* (B_-) *à l'intégrale de Lebesgue-Cauchy a une solution, il faut que* $f(x)$ *soit de la constitution* (1). Réciproquement, sous la condition (1), on peut résoudre l'équation, en la réduisant au cas de l'intégrale de Lebesgue déjà étudié aux n^{os} **9** et **10**, comme nous avons fait pour l'équation (A_+) ou (A_-) (n° **8**). Ainsi, *sous la condition* (1), *l'équation* (B_+) *a une et une seule solution et l'équation* (B_-) *a juste une infinité de solutions dépendant linéairement d'une constante arbitraire, l'intégrale qui figure dans les équations étant prise au sens de Lebesgue-Cauchy.*

VI. Méthode directe pour une équation (B_-) homogène à noyau de signe constant

12. Considérons une équation (B_-) homogène

$$\varphi(x)-\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\varphi(s)ds=0$$

où *nous supposerons que*

$$m(x)+\omega(x,s)\geqq 0 \qquad (0\leqq s\leqq x\leqq b).$$

Concernant cette équation nous donnerons ici une autre méthode d'approximations successives tendant vers une solution sommable non identiquement nulle.

Prenons deux fonctions $\underline{\sigma}(x)$ et $\bar{\sigma}(x)$ supposées finies et sommables dans $(0, b)$ telles que

$$0\leqq m(x)+\underline{\sigma}(x)\leqq m(x)+\omega(x,s)\leqq m(x)+\bar{\sigma}(x) \quad (0\leqq s\leqq x\leqq b);$$

c'est évidemment possible. Prenons ensuite des fonctions

$$\underline{\varphi}_0(x)=[m(x)+\underline{\sigma}(x)]e^{M(x)+\int_0^x\underline{\sigma}(s)ds},$$
$$\bar{\varphi}_0(x)=[m(x)+\bar{\sigma}(x)]e^{M(x)+\int_0^x\bar{\sigma}(s)ds}$$

qui satisfont aux équations

$$\underline{\varphi}_0(x)=[m(x)+\underline{\sigma}(x)]\int_0^x\underline{\varphi}_0(s)ds,$$
$$\bar{\varphi}_0(x)=[m(x)+\bar{\sigma}(x)]\int_0^x\bar{\varphi}_0(s)ds.$$

Alors, on a, par l'inégalité précédente,

$$0\leqq\underline{\varphi}_0(x)\leqq\bar{\varphi}_0(x),$$
$$\underline{\varphi}_0(x)\leqq\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\underline{\varphi}_0(s)ds,$$
$$\bar{\varphi}_0(x)\geqq\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\bar{\varphi}_0(s)ds.$$

En désignant par $\underline{\varphi}_1(x)$ et $\bar{\varphi}_1(x)$ les seconds membres des deux dernières inégalités, nous avons

$$\underline{\varphi}_0(x)\leqq\underline{\varphi}_1(x)\leqq\bar{\varphi}_1(x)\leqq\bar{\varphi}_0(x),$$
$$\underline{\varphi}_1(x)=\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\underline{\varphi}_0(s)ds\leqq\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\underline{\varphi}_1(s)ds,$$
$$\bar{\varphi}_1(x)=\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\bar{\varphi}_0(s)ds\geqq\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\bar{\varphi}_1(s)ds.$$

Par suite, si nous posons successivement

$$\left.\begin{aligned}\underline{\varphi}_{n+1}(x)&=\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\underline{\varphi}_n(s)ds,\\ \bar{\varphi}_{n+1}(x)&=\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\bar{\varphi}_n(s)ds\end{aligned}\right\} \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

nous obtenons deux suites l'une croissante et l'autre décroissante telles que

$$\underline{\varphi}_0(x)\leqq\underline{\varphi}_1(x)\leqq\ldots\leqq\bar{\varphi}_1(x)\leqq\bar{\varphi}_0(x),$$

donc l'une et l'autre de ces deux suites ont des limites bien définies, que nous désignerons par $\underline{\varphi}(x)$ et $\bar{\varphi}(x)$, et qui satisfont à l'équation considérée.

Or, ces deux limites $\underline{\varphi}(x)$ et $\bar{\varphi}(x)$ coïncident, parce que d'après le § V on a

$$\underline{\varphi}(x)=C\bar{\varphi}(x),$$

mais on a

$$\underline{\varphi}_0(x)\leqq\underline{\varphi}(x)\leqq\bar{\varphi}(x)\leqq\bar{\varphi}_0(x)$$

et

$$\int_0^x\underline{\varphi}_0(s)ds\sim\int_0^x\bar{\varphi}_0(s)ds\sim e^{M(x)} \quad \text{pour } x\to+0,$$

donc il faut que $C=1$.

La coïncidence des deux limites $\underline{\varphi}(x)$ et $\bar{\varphi}(x)$ peut êrte démontrée d'une autre manière par le lemme suivant :

Soit $\psi_0(x)$ une fonction non négative et sommable dans $(0, b)$. Pour que la suite des fonctions définies par l'itération successive

$$\psi_{n+1}(x)=\int_0^x[m(x)+\omega(x,s)]\psi_n(s)ds \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

tende vers 0, il suffit que l'on ait

$$\lim_{x\to+0}e^{-M(x)}\int_0^x\psi_0(s)ds=0.$$

Pour l'établir, il suffit de démontrer que, par cette dernière condition, la suite $\bar{\psi}_n(x)$ définie par

$$\bar{\psi}_0(x)=\psi_0(x),\ \ \bar{\psi}_{n+1}(x)=[m(x)+\bar{\sigma}(x)]\int_0^x\bar{\psi}_n(s)ds \quad (n=0, 1, 2,\ldots)$$

tend vers 0, puisque l'on a évidemment $0\leqq\psi_n(x)\leqq\bar{\psi}_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$. Or, on a une condition suffisante pour que $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\psi}_n(x)=0$, c'est que

$$\lim_{x\to+0}e^{-\int[m(x)+\bar{\sigma}(x)]dx}\int_0^x\bar{\psi}_0(s)ds=0\ ;$$ [1]

c'est évidemment une condition équivalente à celle en question.

---

1. *Voir* Okamura, ces Memoirs A **15** (1932), p. 261-262. Dans ce Mémoire cité nous avons démontré aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\psi}_n(x)=0$, et il est facile à remarquer que la condition donnée dépend seulement de la fonction $m(x)$, mass non pas de $\bar{\sigma}(x)$. D'autre part, pour que $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=0$, il faut que la suite $\underline{\psi}_n(x)$ définie par

$$\underline{\psi}_0(x)=\psi_0(x),\quad \underline{\psi}_{n+1}(x)=[m(x)+\underline{\sigma}(x)]\int_0^x\underline{\psi}_n(s)ds \qquad (n=0, 1,\ldots\ldots)$$

tende vers 0, et pour cela on a la mîme condition nécessaire et suffisante dépendant seulement de $m(x)$. Ainsi nous pouvons obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=0$. Nous n'exposerons pas ici la condition, inutile à nos études actuelles.

Démontrons, en appliquant ce lemme, que $\underline{\varphi}=\bar{\varphi}$. À cet effet il suffit de poser

$$\psi_0(x)=\bar{\varphi}_0(x)-\underline{\varphi}_0(x)\geqq 0\,;$$

en effet,

$$\lim_{x\to+0} e^{-M(x)}\int_0^x \psi_0(s)ds=\lim_{x\to+0} e^{-M(x)}\left(\int_0^x \bar{\varphi}_0(s)ds-\int_0^x \underline{\varphi}_0(s)ds\right)$$
$$=\lim_{x\to+0} e^{-M(x)}\left(e^{M(x)+\int_0^x \bar{\sigma}(s)ds}-e^{M(x)+\int_0^x \bar{\sigma}(s)ds}\right)=0,$$

et alors, par l'itération successive, $\psi_n(x)=\bar{\varphi}_n(x)-\underline{\varphi}_n(x)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, donc $\underline{\varphi}(x)=\bar{\varphi}(x)$.

VII. Équations de Volterra de première espèce

13. *Équation de première espèce à l'intégrale de Lebesgue.*—Soit une équation

$$\int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds=f(x)$$

où, φ étant l'inconnue, nous supposerons que le noyau $K(x, s)$ soit analytique autour du point (0, 0) *et que $K(x, x)$ ait un zéro isolé pour* $x=0$. De plus si $K(x, s)$ a un facteur puissance de s, on peut le faire appartenir à $\varphi(s)$, donc *nous supposerons que $K(x, s)$ ne soit pas divisible par s c'est-à-dire que $K(x, 0)$ ne s'annule pas pour $x\neq 0$ au voisinage de* 0. *Nous chercherons à résoudre cette équation au voisinage positif de* 0 *en prenant l'intégrale au sens de M. Lebesgue. Quant à $f(x)$ nous ferons l'hypothèse la plus large telle qu'elle soit compatible avec ces conditions*, ce que nous allons voir dans la suite.

Il est à remarquer d'abord qu'*une solution $\varphi(x)$ doit être sommable au voisinage de* 0 parce que, pour une valeur de x non nulle au voisinage de 0, $K(x, s)$ tend vers une limite bien déterminée non nulle.

Par suite l'équation ci-dessus est équivalente à une autre :

$$K(x, x)\varphi(x)+\int_0^x K'_x(x, s)\varphi(s)ds=f'(x),$$

$f'(x)$ devant être une fonction sommable au voisinage de 0 *telle que*

$$f(x)=\int_0^x f'(s)ds\,;$$

voici *la première restriction sur $f(x)$*. La fonction $f'(x)$ n'est déterminée que sauf sur un ensemble de mesure nulle, mais cela ne gêne point la résolution complète de l'équation de première espèce, parce qu'une solution $\varphi(x)$ de l'équation est aussi indéterminée, comme $f'(x)$, sur un ensemble de mesure nulle.

La dernière équation peut s'écrire

$$(7) \qquad \varphi(x)+\int_0^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}\varphi(s)ds=\frac{f'(x)}{K(x,x)}.$$

Ceci est du type (A_+) ou (A_-) *si $K(x,s)$ est de la forme*

$$K(x,s)=px^i+qs^i+\overline{K}(x,s), \quad p\neq 0$$

où, i étant un entier positif, $\overline{K}(x,s)$ est la partie de degré supérieur à i de $K(x,s)$; par conséquent $K(x,x)$ est de la forme

$$K(x,x)=rx^j+\ldots, \qquad r\neq 0,$$

j étant un entier égal ou supérieur à i suivant que $p+q\neq 0$ ou $p+q=0$. Sous ces conditions on a

$$m(x)=\frac{ipx^{i-1}}{K(x,x)}, \quad \Gamma(x,s)=\frac{\overline{K}'_x(x,s)}{ipx^{i-1}},$$

$\Gamma(x,s)$ remplissant évidemment la condition de Lipschitz par rapport à x pour $0\leqq s\leqq x$. Donc, alors pour que l'équation ait une solution, $\dfrac{f'(x)}{K(x,x)}$ doit être de la forme (1), c'est-à-dire que *$f'(x)$ est de la forme*

$$f'(x)=x^jg(x)+x^{i-1}\int_0^x a'(s)ds$$

où $g(x)$ et $a'(x)$ sont sommables au voisinage de 0; voici *la seconde restriction sur $f(x)$. Dans ce cas, si $\dfrac{p}{r}>0$, l'équation a une et une seule solution, et par contre si $\dfrac{p}{r}<0$, elle a juste une infinité de solutions dépendant linéairement d'une constante arbitraire*: $\varphi(x)=\chi(x)+C\psi(x)$, où la solution $\psi(x)$ n'est pas presque partout nulle, car elle est une solution non identiquement nulle de l'équation

$$\psi(x)+\int_0^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}\psi(s)ds=0.$$

D'autre part, *si*

$$K(x,s)=qs^i+\overline{K}(x,s), \quad q\neq 0$$

où $\overline{K}(x,s)$ est de degré supérieur à i, l'équation (7) est à noyau borné et on peut la résoudre d'une manière habituelle. Évidemment *$\dfrac{f'(x)}{K(x,x)}$ doit être sommable au voisinage de* 0, *et alors l'équation a une et une seule solution.*

Ainsi nous avons résolu complètement l'équation de première espèce pourvu que p ou q ne soit pas nul.

Or, notre résultat est en désaccord avec la théorie ordinaire à propos du nombre des solutions dans le cas où $0\neq p+q(=r)$ et

$$-1<\frac{ip}{p+q}<0;$$

il existe une infinité de solutions d'après notre résultat, tandis qu'il n'y en a qu'une seule d'après la théorie ordinaire ; c'est parce que l'on ne considère dans la dernière que des solutions continues. Nous allons donc voir le comportement des solutions continues au n° suivant.

14. *Solutions continues.*—On peut voir facilement par (7) que *s'il existe une solution continue pour* $0 \leqq x \leqq c$ $(c > 0)$, *il faut que* $f'(x)$ *soit de la forme*

$$f'(x) = x^j g(x) + x^{i-1}\int_0^x a'(s)ds$$

où $g(x)$ *et* $a'(x)$ *sont des fonctions continues pour* $0 \leqq x \leqq c$, c *étant supposé assez petit, tellement que* $K(x, s)$ *est analytique pour* $0 \leqq s \leqq x \leqq c$. *En particulier, si* $i = j$ $(p+q \neq 0)$, *on peut poser* $a' = 0$. Nous allons donc chercher des solutions continues sous ces conditions.

1° *Si* $p = 0$ $(q \neq 0)$, *il existe une seule solution continue*, car dans ce cas l'équation (7) est à noyau borné, le second membre $\dfrac{f'(x)}{K(x, x)}$ étant continu.

2° *Si* $\dfrac{ip}{p+q} < -1$ *ou* $\dfrac{ip}{p+q} > 0$ $(p+q \neq 0)$, *ou si* $p+q = 0$, *toutes les solutions sommables* (il y en a une infinité si $\dfrac{ip}{p+q} < -1$ ou $\dfrac{p}{r} < 0$, et une seule si $\dfrac{ip}{p+q} > 0$ ou $\dfrac{p}{r} > 0$) *sont continues.*

En effet, on peut mettre l'équation sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{K'_x(x, x)[1 + \Gamma(x, s)]}{K(x, x)}\varphi(s)ds = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$$

et d'après hypothèse il existe au moins une solution sommable. Soit $\varphi(x)$ une quelconque d'elles. Alors, dans l'intégrale (*cf.* n° **2**)

$$\int_0^x \Gamma(x, s)\varphi(s)ds = \int_0^x \left(\int_0^t \Gamma'_x(t, s)\varphi(s)ds\right)dt,$$

la quantité entre parenthèses est une fonction continue de t, et par suite nous avons

$$\varphi(x) + \frac{K'_x(x, x)}{K(x, x)}\int_0^x \varphi(s)ds = F(x)$$

où

$$F(x) = G(x) + \frac{K'_x(x, x)}{K(x, x)}\int_0^x G_1(t)dt$$

G et G_1 étant des fonctions continues. Donc on peut tirer $\varphi(x)$ de cette équation comme au n° **3**, et on prouvera facilement que $\varphi(x)$ est continue, en tenant compte de la valeur principale de

$$\frac{K'_x(x, x)}{K(x, x)}=\frac{1}{x^{j-i+1}}\left(\frac{ip}{r}+\dots\right).$$

3° *Si* $-1<\dfrac{ip}{p+q}<0$, *il y a une seule solution continue parmi une infinité de solutions sommables, et toutes les autres ne sont pas bornées au voisinage de* 0.

En effet, l'équation pouvant s'écrire

$$\varphi(x)+\int_0^x\left(-\frac{\gamma}{x}+\Delta(x, s)\right)\varphi(s)ds=\frac{f'(x)}{K(x, x)}, \quad \gamma=-\frac{ip}{p+q}$$

où la fonction $\Delta(x, s)$ est bornée, une quelconque des solutions, soit $\varphi(x)$, satisfait á une relation

$$\varphi(x)-\frac{\gamma}{x}\int_0^x\varphi(s)ds=G_2(x),$$

$G_2(x)$ étant une fonction continue ; alors on a par (4_),

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=-\gamma x^{\gamma-1}\int_x^c s^{-\gamma}G_2(s)ds+C\gamma x^{\gamma-1}+G_2(x)\\&=\gamma x^{\gamma-1}\int_0^x s^{-\gamma}G_2(s)ds+C'\gamma x^{\gamma-1}+G_2(x)\\&=G_3(x)+C'\gamma x^{\gamma-1},\end{aligned}$$

où $G_3(x)$ est une fonction continue, C' une constante. Or, $\varphi(x)$ est, comme on le sait, de forme $\chi(x)+C\psi(x)$ où $\psi(x)$ est une solution de l'équation

$$\psi(x)+\int_0^x\left(-\frac{\gamma}{x}+\Delta(x, s)\right)\psi(s)ds=0.$$

Donc par la méthode d'approximations successives du n° **6** ou plutôt par le n° **12**, on peut poser

$$\psi(x)=-\gamma x^{\gamma-1}+G_4(x),$$

où $G_4(x)$ est une fonction bornée. Par conséquent $G_4(x)$ doit être continue d'après ce que nous venons de dire sur $G_3(x)$, et parmi les solutions

$$\varphi(x)=\chi(x)+C\psi(x),$$

il y en a une seule qui est continue.

4° *Il nous reste le cas où* $\dfrac{ip}{p+q}=-1$. *Dans ce cas toutes les solutions sommables* (il y en a une infinité) *sont continues, ou discontinues au point* 0, *suivant que l'intégrale*

$$\int\frac{f'(x)}{x^{i+1}}dx$$

est continue ou non au point 0.

En effet, on a comme au cas précédent,

$$\varphi(x)+\int_0^x\left(-\frac{1}{x}+\Delta(x,s)\right)\varphi(s)ds=\frac{f'(x)}{K(x,x)}$$

ou

$$\varphi(x)-\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(s)ds=G_2(x)$$

$G_2(x)$ étant une fonction continue, d'où l'on a

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=-\int_x^c\frac{G_2(s)}{s}ds+C+G_2(x)\\&=O\left(\log\frac{1}{x}\right)\qquad\text{pour } x\to+0.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int_0^x\Delta(x,s)\varphi(s)ds=O\left(x\log\frac{1}{x}\right)\qquad\text{pour } x\to+0.$$

Désignons cette fonction par $-G_5(x)$ et nous avons

$$\varphi(x)-\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(s)ds=G_5(x)+\frac{f'(x)}{K(x,x)},$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=-\int_x^c\frac{1}{s}\left(G_5(s)+\frac{f'(s)}{K(s,s)}\right)ds+\text{fonction continue}\\&=-\int_x^c\frac{f'(s)}{sK(s,s)}ds+\text{fonction continue}\\&=-\int_x^c\frac{f'(s)}{s^{i+1}}\left(\frac{1}{p+q}+\dots\right)ds+\text{fonction continue.}\end{aligned}$$

Il en résulte notre conclusion à démontrer.