Sur un Groupe de Transformations D'elements Lineaires qui Laissent $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ [1] Invariant

Par **Tatsuo Nakae**

(Reçu en October 28, 1939)

Un élément linéaire est la figure formée par un point $(x^1, \ldots, x^n)$ (centre) et une direction $(dx^1, \ldots, dx^n) = (p^1 \ldots, p^n)$ issue de ce point. De même que la transformation infinitésimale de points $(x^1, \ldots, x^n)$ est définie par les équations

$$(1) \qquad \frac{\delta x^1}{\xi^1} = \ldots\ldots = \frac{\delta x^n}{\xi^n}$$

où ξ^i sont fonctions arbitraires des variables x^i, la transformation infinitésimale d'éléments linéaires est définie par les équations

$$(2) \qquad \frac{\delta x^1}{\xi^1} = \ldots\ldots = \frac{\delta x^n}{\xi^n} = \frac{\delta p^1}{\eta^1} = \ldots\ldots = \frac{\delta p^n}{\eta^n}$$

où ξ^i et η^i sont fonctions arbitraires des variables x^i et p^i. Le prolongement de la transformation (1) par l'adjonction des différentielles $(dx^1, \ldots, dx^n) = (p', \ldots, p^n)$ est défini par les équations

$$(3) \qquad \frac{\delta x^1}{\xi'} = \ldots\ldots = \frac{\delta x^n}{\xi^n} = \frac{\delta p^1}{\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x^j} p^j} = \ldots\ldots = \frac{\delta p^n}{\dfrac{\partial \xi^n}{\partial x^j} p^j} \; [2]$$

et la transformation (3) est un cas particulier de la transformation (2). Maitenant nous transformons la transformation infinitésimale (3) par la transformation d'éléments linéaires

$$(4) \qquad \begin{aligned} x^i &= \bar{x}^i \\ p^i &= A^i_j \bar{p}^j \end{aligned}$$

où A^i_j sont fonctions des variables $\bar{x}^i$ seulement et le déterminant $|A^i_j|$ n'est pas nul, c'est-à-dire par une transformation d'éléments linéaires qui laisse le centre d'élément linéaire invariant et varie sa direction seulement.

Des équations (4), on a inversement

---

1. Nous nous conformerons à la condensation introduite par Einstein de supprimer le signe de sommation quand il se rapporte à un indice répété deux fois.
2. Voir L. P. Eisenhart, Continuous groups of transformations, p. 92.

(4′) $$\bar{x}^i = x^i, \qquad \bar{p}^i = B^i_j p^j,$$

où

$$A^i_j B^j_k = \delta^i_k, \qquad \delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Des équations (3), $\dfrac{\delta x^i}{\xi^i} = \dfrac{\delta p^i}{\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j} p^j}$ (i n'est pas à sommer), et (4), il

vient

$$\frac{\delta x^j}{\xi^i} = \frac{\dfrac{\partial A^i_j}{\partial \bar{x}^l} \delta \bar{x}^l \bar{p}^j + A^i_j \delta \bar{p}^j}{\dfrac{\partial \xi^i}{\partial \bar{x}^k} A^k_m \bar{p}^m}$$

$$= \frac{A^i_j \delta \bar{p}^j}{\dfrac{\partial \xi^i}{\partial \bar{x}^k} A^k_m \bar{p}^m - \dfrac{\partial A^i_m}{\partial \bar{x}^l} \xi^l \bar{p}^m}$$

$$= \frac{\delta \bar{p}^i}{B^i_j \left(\dfrac{\partial \xi^j}{\partial x^k} A^k_m - \dfrac{A^j_m}{\partial x^l} \xi^l \right) \bar{p}^m}.$$

Enlevant—, nous avont la transformation

(5) $$\frac{\delta x^i}{\xi^i} = \frac{\delta p^i}{B^i_j \left(\dfrac{\partial \xi^j}{\partial x^k} A^k_m - \dfrac{\partial A^j_m}{\partial x^l} \xi^l \right) p^m}$$

qui est la transformation transformée de la transformation (3) et un cas particulier de la transformation (2).

La condition que la transformation (2) laisse la forme quadratique différentielle $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} p^i p^j$ invariant, est

(6) $$X(g_{ij} p^i p^j) = 0,$$

où x signifie l'opérateur $\xi^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + \ldots\ldots + \xi^n \dfrac{\partial}{\partial x^n} + \eta^1 \dfrac{\partial}{\partial p^1} + \ldots\ldots + \eta^n \dfrac{\partial}{\partial p^n}$

et on a

(6′) $$\xi^h \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} p^i p^j + g_{hj} \eta^h p^j + g_{ih} p^i \eta^h = 0.$$

Pour la transformation (5), les équations (6′) deviennent

$$\xi^h \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} p^i p^j + g_{hj} B^h_l \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m} A^m_n - \frac{\partial A^l_n}{\partial x^m} \xi^m \right) p^n p^j$$
$$+ g_{ih} p^i B^h_l \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m} A^m_n - \frac{\partial A^l_n}{\partial x^m} \xi^m \right) p^n = 0.$$

pour toutes les valeurs des variables p^i, donc nous avons

$$(6'') \qquad \xi^h \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + g_{hj} B_l^h \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x_m} A_i^m - \frac{\partial A_i^l}{\partial x^m} \xi^m \right) + g_{ih} B_l^h \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m} A_j^m - \frac{\partial A_j^l}{\partial x^m} \xi^m \right) = 0.$$

Cela posé, comme le déterminant $|g_j^i|$ n'est pas nul et d'après le théorème de la forme quadratique, on peut décomposer la forme $f = g_{ij} p^i p^j$ en l'expression

$$f \equiv f_1^2 + \dots\dots + f_n^2$$

où f_i, sont n formes linéaires des p^j, $a_j^i p^j$, convenablement choisies, d'où on a

$$(7) \qquad g_{ij} = a_i^k a_j^k$$

Si

$$(8) \qquad A_j^i = a_j^i,$$

des équations (6'') et (7), on a

$$\xi^h \left(\frac{\partial a_i^k}{\partial x^h} a_j^k + a_i^k \frac{\partial a_j^k}{\partial x^h} \right) - \left(a_j^l \frac{\partial a_i^l}{\partial x^m} + a_i^l \frac{\partial a_j^l}{\partial x^m} \right) \xi^m + a_j^l a_i^m \frac{\partial \xi^l}{\partial x^m} + a_i^l a_j^m \frac{\partial \xi^l}{\partial x^m} = 0,$$

ou

$$a_i^m \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m} + \frac{\partial \xi^m}{\partial^l x} \right) a_j^l = 0,$$

alors, comme le déterminant $|a_j^i|$ n'est pas nul, on a

$$(9) \qquad \frac{\partial \xi^l}{\partial x^m} + \frac{\partial \xi^m}{\partial x^l} = 0.$$

La condition (9) est précisément égale à la condition que la transformation infinitésimale (1) soit euclidienne, et la solution des équations (9) admet $\dfrac{n(n+1)}{2}$ constantes d'intégration.

La condition que la transformation infinitésimale de points (1) laisse $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ invariant, est, la condition de Killing

$$\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0 \text{ [1]}$$

et ces équations n'ont pas de solution en général.

Le groupe de transformations d'éléments linéaires qui sont définies par les équation (5) *avec* (7), *laisse la forme* $ds^2 = g_{ij} p^i p^j$ *invariant et il est un groupe transformé du groupe de transforma-*

1. Voir L. P. Eisenhart, Continuous groups of transformations, p. 208.

tions euclidiennes par la transformation (4), *alors les deux groupes sont similaires.*

En terminant, l'auteur tient à exprimer ses remerciments à M. le professeur T. Nishiuchi pour ses encouragements et ses remarques faites pendant la recherche.