Sur l'Unicité des Solutions d'un Système d'Équations différentielles ordinaires

Par **Hirosi Okamura**

(Reçu le 8 Juillet 1940)

Nous allons exposer une théorie nouvelle sur l'allure des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires et nous appliquerons cela à démontrer une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité d'une courbe solution issue d'un point donné, condition analogue à celle que nous avons trouvée autrefois à propos d'une seule équation[1] et que nous n'avons pas pu généraliser depuis à un système d'équations. La méthode de raisonnements est extrêmement plus directe qu'au Mémoire précédent, tandis que pour le cas particulier d'une seule équation la condition actuelle est moins forte que l'autre, ce que nous signalerons finalement.

I. Cas d'un système d'équations différentielles définies par une famille de courbes.

Commençons par un cas simple mais important où se manifeste visiblement notre idée fondamentale.

Soit Ω une famille de courbes, telles que chacune d'elles est définie par un système d'équations de la forme

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $y_i(x)$ sont des fonctions continues réelles de x, ainsi que leurs dérivées premières, pour $0 \leqq x \leqq 1$, et que toutes ces courbes sont situées dans un ensemble de points $(x, y_1, \ldots, y_n)$ borné et fermé, E, de façon que par chaque point de E il passe une seule courbe de la famille Ω. Les directions de ces courbes définissent un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = \omega_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dans E. *Nous supposerons de plus* que ces fonctions ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont continues dans E.

Concernant ces équations différentielles nous étudierons la distribution des points de Peano, ce qui revient à chercher des courbes qui sont en tous leurs points tangentes aux courbes de la famille Ω

---

1. Okamura, ces Memoirs, A **17** (1934), p. 319 [Correction, A **19** (1936), p. 269].

mais étrangères à Ω.[1] Pour cela. il nous faut une notion fondamentale jouissant d'un rôle principal, que nous exposerons dans la suite, avant d'énoncer le résultat.

Convenons d'abord de désigner par $C(P)$ la courbe de la famille Ω qui passe par le point P.

Soient P et Q deux points quelconques de E, P étant sur l'hyperplan $x=\xi$, Q sur $x=\xi'$, où nous supposerons que $\xi\leqq\xi'$. Divisons le segment $[\xi, \xi']$ en ν parties par des points ξ_k tels que

$$\xi=\xi_0\leqq\xi_1\leqq\ldots\leqq\xi_\nu=\xi'.$$

Prenons un point Q_k de E tel que $x=\xi_k$, et désignons par P_{k+1} le point où la courbe $C(Q_k)$ coupe l'hyperplan $x=\xi_{k+1}(k=0, 1, \ldots, \nu-1)$. Posons

$$S=\overline{P_0Q_0}+\overline{P_1Q_1}+\ldots+\overline{P_\nu Q_\nu}\ \ (P_0=P,\ \ Q_\nu=Q)$$

où $\overline{P_kQ_k}$ est la longuer euclidienne du segment P_kQ_k. Pour deux points donnés P et Q, on peut choisir d'une infinité de manières le nombre de division ν, les points de division $\xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1}$ et les points Q_k de E tels que $x=\xi_k$. Nous désignerons par $D(P, Q)$ la borne inférieure de telle somme S possible et nous poserons, par définition, $D(P, Q)=D(Q, P)$.[2]

La fonction $D(P, Q)$ étant introduite, nous avons le théorème suivant qui achève notre recherche pour le cas actuel :

Pour que deux points P et Q de E se trouvent sur une même courbe solution du système des équations différentielles, il faut et il suffit que l'on ait

$$D(P, Q)=0.$$

En effet, cette condition est nécessaire parce que, si une courbe solution des équations différentielles, C, passe par deux points P et Q pour lesquels $x=\xi$ et ξ' avec $\xi\leqq\xi'$, alors, en formant la somme S au moyen des points Q_k pris sur C tels que $x=\xi+\dfrac{k}{\nu}(\xi'-\xi)$ $(k=0, 1, \ldots, \nu-1)$, la somme S tend vers 0 avec $\dfrac{1}{\nu}$, en vertu de la continuité des ω_i, et par suite $D(P, Q)=0$.

---

1. La possibilité de l'existence d'une telle courbe se montre par l'exemple simple $(n=1)$: la droite $y=0$ pour la famille des courbes $y=(x+c)^3$ dépendant d'un paramètre c, qui définissent l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}$.

En outre, nos raisonnements subsisteront de même si la dimension de E est inférieure à $n+1$; c'est, par exemple, une telle circonstance qui arrive, au cas $n=2$, avec la famille de générateurs (Ω) d'une surface développable (E), dont l'arête de rebroussement est le lieu des points de Peano.

2. Lorsque $\xi=\xi'$, $D(P, Q)$ signifie la distance des deux points P et Q.

Réciproquement, supposons que $D(P, Q)=0$ où P est un point de E sur l'hyperplan $x=\xi$, Q sur $x=\xi'$, et $\xi<\xi'$.[1] Alors on a une suite de valeurs de S, $S^{(\mu)}(\mu=1, 2, \ldots)$, tendant vers 0 avec $\frac{1}{\mu}$, où $S^{(\mu)}=\sum_{k=0}^{\nu_\mu}\overline{P_k^{(\mu)}Q_k^{(\mu)}}$, les x des points $P_k^{(\mu)}$ et $Q_k^{(\mu)}$ étant $\xi_k^{(\mu)}(\xi=\xi_0^{(\mu)}\leqq\xi_1^{(\mu)}\leqq\ldots\leqq\xi_{\nu_\mu}^{(\mu)}=\xi')$. Définissons les fonctions

$$y_i=Y_i^{(\mu)}(x)\quad(i=1, \ldots, n)$$

pour $\xi\leqq x\leqq\xi'$, telles que ce système représente la coube $C(Q_k^{(\mu)})$ pour $\xi_k^{(\mu)}\leqq x<\xi_{k+1}^{(\mu)}(k=0, 1, \ldots, \nu_\mu-1)$ $(x>\xi)$ et qu'il donne les points P et Q pour $x=\xi$ et ξ'. Ces fonctions sont discontinues pour $x=\xi_k^{(\mu)}$ au plus et nous désignerons par $\sigma_i^{(\mu)}(x)$ la somme des discontinuités de $Y_i^{(\mu)}(x)$ pour $[\xi, x]$ de sorte que les différences $Y_i^{(\mu)}(x)-\sigma_i^{(\mu)}(x)$ sont continues pour $\xi\leqq x\leqq\xi'$ et que nous avons évidemment

$$|\sigma_i^{(\mu)}(x)|\leqq S^{(\mu)}.$$

On a d'ailleurs, pour $\xi\leqq x\leqq\xi'$,

$$Y_i^{(\mu)}(x)-\sigma_i^{(\mu)}(x)=Y_i^{(\mu)}(\xi)-\sigma_i^{(\mu)}(\xi)+\int_\xi^x\omega_i[t, Y_1^{(\mu)}(t), \ldots, Y_n^{(\mu)}(t)]dt.$$

Par conséquent la suite des fonctions $Y_i^{(\mu)}(x)-\sigma_i^{(\mu)}(x)$ est également continue, donc d'après le théorème d'Ascoli et Arzèla on peut en extraire une suite uniformément convergente, et l'on a, comme limites des égalités précédentes,

$$Y_i(x)=Y_i(\xi)+\int_\xi^x\omega_i[t, Y_1(t), \ldots, Y_n(t)]dt\,;$$

car $\sigma_i^{(\mu)}(x)$ tendent vers 0 uniformément. Ainsi nous avons une courbe solution $y_i=Y_i(x)$ des équations différentielles passant par les points P et Q. *C. q. f. d.*

De ce théorème il s'ensuit que *pour que le système des équations différentielles $y'_i=\omega_i$ n'ait pas de points de Peano, il faut et il suffit que l'équation $D(P, Q)=0$ entraîne que les points P et Q se trouvent sur une même courbe de Ω.*

D'après cette proposition on prouvera facilement le fait suivant: *Si la famille de courbes Ω est donnée par les équations*

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n)=C_i\quad(i=1, \ldots, n)$$

où C_i sont paramètres et où les fonctions Φ_i vérifient la condition de Lipschitz par rapport à $(y_1, \ldots, y_n)$, alors il n'existe pas de points de Peano et la famille Ω épuise toutes les solutions de ses équations différentielles $y'_i=\omega_i$.

---

1. Le cas $\xi=\xi'$ est trivial puisqu'alors $D(P, Q)=0$ exige que le point P coïncide à Q.

Le résultat donné par M. van Kampen[1] relatif à un système dynamique est un cas particulier de cet énoncé.

II. Cas des équations différentielles données à priori.

Considérons maintenant un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i=1, \dots, n),$$

où nous supposerons que *les fonctions f_i sont continues dans un ensemble de points $(x, y_1, \dots, y_n)$ borné et fermé, F, tel que la projection de F sur l'axe des x est un segment.*[2]

Soient P et Q deux points quelconques de F, tels que $x=\xi$ et ξ' et que $\xi\leqq\xi'$. Divisons le segment $[\xi, \xi']$ en ν parties de manière que

$$\xi=\xi_0\leqq\xi_1\leqq\dots\leqq\xi_\nu=\xi'.$$

Prenons un point Q_k de F sur l'hyperplan $x=\xi_k$ et menons une droite passant par Q_k et ayant les coefficients angulaires donnés par les valeurs de f_i au point Q_k, qui coupe l'hyperplan $x=\xi_{k+1}$ en un point P_{k+1} $(k=0, 1, \dots, \nu-1)$. Posons

$$\Delta=\overline{P_0Q_0}+\overline{P_1Q_1}+\dots+\overline{P_\nu Q_\nu} \quad (P_0=P,\ Q_\nu=Q).$$

Pour deux points donnés P et Q, considérons toutes les valeurs possibles d'une telle somme Δ et prenons la plus petite des limites de Δ, en faisant tendre vers 0 la valeur maximum des différences $\xi_k-\xi_{k-1}(k=1, \dots, \nu)$.[3] Cette limite est, au cas particulier où $f_i=\omega_i$ et $F=E$, identique à $D(P, Q)$ précédemment définie, ce qu'on peut voir facilement. Ainsi nous avons généralisé la notion $D(P, Q)$ et nous conserverons la même notation $D(P, Q)$ pour le cas actuel. Posons encore, par définition, $D(P, Q)=D(Q, P)$.

Alors, comme au cas précédent, par un raisonnement légèrement plus compliqué, seulement en remplacant des segments Q_kP_{k+1} au lieu

---

1. Amer. J. Math. **59** (1937), p. 144.
2. On peut supposer qu'à plus forte raison, l'ensemble F soit d'un seul tenant.
3. Pour obtenir effectivement cette limite, on procédera comme il suit: On forme Δ pour ν fixe, compatible avec la condition

$$\xi_k-\xi_{k-1}\leqq\epsilon \quad (k=0, 1, \dots, \nu-1),$$

ϵ étant un nombre positif; alors Δ est une fonction continue de $(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, Q_0, \dots, Q_{\nu-1})$ et atteint son minimum $\Delta_\nu^{(\varepsilon)}$. Ce minimum décroît en même temps que $\frac{1}{\nu}$ et l'on pose

$$\Delta^{(\varepsilon)}=\lim_{\nu\to\infty}\Delta_\nu^{(\varepsilon)}.$$

Cette limite $\Delta^{(\varepsilon)}$ augmente à son tour si l'on fait tendre ϵ vers 0 et elle tend vers la limite que nous avons cherchée.

des arcs $C(Q_k)$, nous avons le théorème suivant, plus général qu'au paragraphe précédent :

Pour que les deux points P et Q de F se trouvent sur une même courbe solution des équations différentielles $y_i'=f_i$, il faut et il suffit que l'on ait

$$D(P.\ Q)=0.$$

De plus, cette fonction $D(P, Q)$ possède, d'après sa définition, quelques propriétés remarquables, qui nous seront utiles dans le paragraphe suivant. Par exemple, on a les inégalités, faciles à vérifier, pour trois points de F, P, Q et R de coordonnées $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, $(\xi', \eta_1', \ldots, \eta'_n)$ et $(\xi'', \eta_1'', \ldots, \eta_n'')$ où $\xi \leqq \xi' \leqq \xi''$,

$$D(P, R) \leqq D(P, Q)+D(Q, R),$$

$$D(P, Q) \leqq D(P, R)+M(\xi''-\xi')+\sqrt{(\eta_1''-\eta_1')^2+\ldots+(\eta_n''-\eta_n')^2},$$

$$D(Q, R) \leqq D(P, R)+M(\xi'-\xi)+\sqrt{(\eta_1'-\eta_1)^2+\ldots+(\eta_n'-\eta_n)^2},$$

M étant la borne supérieure de $\sqrt{f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2}$ dans F. Il en résulte la continuité de la fonction $D(P, Q)$ par rapport à deux points P et Q intérieurs de F, ou sous certaines réserves, à la frontière de F. Il est à remarquer, cependant, que $D(P, Q)$ n'est pas toujours finie à moins que F ne soit assez régulier.

III. Théorème d'unicité.

Nous arrivons maintenant à la dernière étape du Mémoire pour démontrer le théorème d'unicité suivant :

Supposons que, dans les équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i=1, \ldots, n),$$

les fonctions f_i sont continues dans le domaine

$$G: \quad 0 \leqq x \leqq a, \quad |y_i| \leqq b \quad (i=1, \ldots, n),$$

et que l'on ait

$$f_i(x, 0, \ldots, 0)=0 \ \textit{pour}\ 0 \leqq x \leqq a \quad (i=1, \ldots, n).$$

Alors pour que la solution des équations issue de l'origine $(0, 0, \ldots, 0)$, O, *soit unique, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue dans G, $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, telle que*

$$\varphi(x, 0, \ldots, 0)=0 \ \textit{pour}\ 0 \leqq x \leqq a,$$

mais $\qquad \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)>0$ *pour* $|y_1|+|y_2|+\ldots+|y_n| \neq 0$,

vérifiant dans G la condition de Lipschitz par rapport à $(y_1, \ldots, y_n)$, c'est-à-dire que, K étant une constante,

$$|\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)-\varphi(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)| \leqq K(|y_1-\bar{y}_1|+\ldots+|y_n-\bar{y}_n|),$$

pour deux points quelconques de G, $(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, et que, pour tout point $(x, y_1, \ldots, y_n)$ intérieur de G, on ait

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{1}{t}\{\varphi[x+t, y_1+tf_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, y_n+tf_n(x, y_1, \dots, y_n)]$$
$$-\varphi(x, y_1, \dots, y_n)\}\leqq 0.$$

Si, en effet, la solution est unique, en posant

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n)=D(O, P), \quad P: (x, y_1, \dots, y_n),$$

la fonction φ satisfait à ces conditions ; car, au cas actuel, $D(O, P)$ est une fonction continue de P, non négative, s'annulant exclusivement sur la courbe solution issue de O, c'est-à-dire l'axe des x, et vérifiant l'inégalité, pour deux points P et Q sur un même hyperplan perpendiculaire à l'axe des x,

$$|D(O, P)-D(O, Q)|\leqq D(P, Q)=\overline{PQ},$$

et la fonction $D(O, P)$ ne peut pas croître avec x sur une courbe solution des équations différentielles parce que, si P_1 et P_2 sont deux points sur une même courbe solution, P_2 à droite de P_1, on a

$$D(O, P_2)\leqq D(O, P_1)+D(P_1, P_2) \quad \text{où} \quad D(P_1, P_2)=0.$$

Inversement, s'il existe une telle fonction φ, on a, avec une solution issue de O, $y_i=y_i(x)$ $(i=1, \dots, n)$, une fonction de x, $\varphi[x, y_1(x), \dots, y_n(x)]$, qui s'annule pour $x=0$ et dont les nombres dérivés ne sont jamais positifs, et par suite cette fonction ne peut pas être positive ; cela entraîne que

$$y_i(x)=0 \text{ pour } 0\leqq x\leqq a \quad (i=1, \dots, n). \quad C.\ q.\ f.\ d.$$

Si l'on a

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_n)|\leqq L\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2} \quad (i=1, \dots, n), \quad L: const^{te}.$$

on vérifiera l'énoncé du théorème précédent en posant

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n)=(y_1^2+\dots+y_n^2)e^{-2nLx}.$$

C'est le cas ordinaire de la condition de Lipschitz.

Remarquons enfin d'après le Mémoire antérieur de l'auteur (*loc. cit.*) que, pour le cas d'une seule équation, on peut disposer la fonction φ à posséder ses dérivées partielles du premier ordre continues ; on a, en effet, le théorème suivant :

Soit une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

où $f(x, y)$ *est une fonction continue dans le domaine* D $[0\leqq x\leqq a, 0\leqq y\leqq b]$, *telle que* $f(x, 0)=0$ *pour* $0\leqq x\leqq a$. *Si la solution issue de l'origine* $(0, 0)$ *est unique, il existe une fonction* $\varphi(x, y)$ *continue dans* D, *ainsi que ses dérivées* $\varphi'_x(x, y)$ *et* $\varphi'_y(x, y)$, *telle que*

$$\varphi(x, 0)=0, \quad \varphi'_y(x, 0)=0$$

mais $\varphi'_y(x,y)>0,\ \varphi'_x(x,y)+\varphi'_y(x,y)f(x,y)<0$ *pour* $y>0$.[1]
La réciproque est déjà évidente.

L'existence d'une telle fonction $\varphi(x,y)$, dépourvue seulement des dérivées partielles aux points de l'axe des x, a été le résultat antérieur. Pour combler cette lacune, on n'a, si les conditions n'étaient pas réalisées, qu'à prendre une autre fonction $\Phi[\varphi(x,y)]$ au lieu de φ, $\Phi(z)$ étant une fonction continue, ainsi que sa dérivée, pour $z\geqq 0$, telle que

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi'(z)>0 \text{ pour } z>0$$

et

$$\Phi'(z)=o\left(\frac{1}{\max\limits_{\varphi=z}(|\varphi'_x|,\varphi'_y)}\right) \text{ pour } z\to+0.$$

Pour un système d'équations différentielles nous ne pouvons pas encore établir un résultat analogue.[2]

---

1. On peut ajouter, de plus, la condition que la fonction

$$\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}$$

soit continue dans D et égale à 0 sur l'axe des x. C'est par le Théorème 1 et le Lemme du Mémoire cité de l'auteur.

2. *Note ajoutée à la correction des épreuves.*—Après la communication de ce Mémoire à la rédaction, je suis parvenu à compléter le théorème d'unicité au début du § III en démontrant l'existence de la fonction $\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)$ ($\geqq 0$ selon que $|y_1|+\ldots\ldots+|y_n|\geqq 0$) *douée des dérivées premières continues* $\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}$ *dans* G (*la frontière incluse*) *satisfaisant à l'inégalité*

$$\frac{\partial\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_i}f_i(x,y_1,\ldots,y_n)\leqq 0.$$

Pour cela, il suffit de remplacer seulement la fonction φ obtenue dans le texte par sa moyenne intégrale convenablement prise. J'ai l'intention de pousser ces manières de raisonnements, dans un article prochain, sur un problème lié concernant l'unicité en tout point initial du domaine de définition d'un système différentiel.