Ueber die Einteilung des Simplexes

Von **Toshizô Matsumoto**

(Eingegangen am 3ten, September, 1940)

Es ist gut gesagt dass ein Simplex in kleineren Simplexen von Durchmesser minder als eine gegebene positive Zahl deren zwei nur einer Seite (Fläche, Kante oder Ecke) benachbart werden können zerlegen lässt.[1] Da wir mit höheren Räumen handeln, besser ist es analytisch angeben. In dieser Note wollen wir ein Art simplizialer Zerlegung analytisch angeben, wobei die kleinere Simplexen höchstens halbierten Durchmessern haben. Widerholt man diese Verfahren, so gelangt er an kleineren Simplexen von Durchmessern kleiner als eine gegebene positive Zahl.

Im folgenden schreiben wir nur einen Buchstaben (x) an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ des n-dimensionalen Euklidischen Raumes. Ein Simplex T_n hat $n+1$ Ecken. Seien sie $P_1(x^1), P_2(x^2), \ldots\ldots, P_{n+1}(x^{n+1})$. Da diese Koordinaten linear unabhängig (mit positiven Koefficienten) sind, lässt sich ein beliebiger Punkt (ξ) des T_n folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned} &\xi \equiv \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots\ldots + \lambda_{n+1} x^{n+1}, \\ &\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_{n+1} = 1, \\ &\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Verschwinden nicht alle λ, so bedeutet (1) den inneren Punkt des Simplexes. Wenn aber mindestens ein λ verschwindet, so ist (1) ein Punkt der Seite (die Begrenzung der Punktmenge T_n) welche selbst auch ein Simplex von höchstens $n-1$ Dimensionen ist.

Sei z. B, $\lambda_{n+1}=0$, dann ist die Menge der Punkte:

$$\begin{aligned} &\sigma \equiv l_1 x^1 + l_2 x^2 + \ldots\ldots + l_n x^n, \\ &l_1 + l_2 + \ldots\ldots + l_n = 1, \\ &l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

ist ein $(n-1)$-dimensionales Simplex S_{n-1} mit $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ als Eckpunkten. Es ist leicht beweisbar, dass die Menge der gesammten Punkte auf den Strecken, welche einen beliebigen Punkt von (2) mit dem Punkt $P_{n+1}(x^{n+1})$ verbindet, mit dem gegebenen Simplex T_n identisch ist. So nennen wir P_{n+1} den *Scheitelpunkt* und S_{n-1} das *Grundsimplex*, wobei T_n eine *Pyramide* darstellt.

---

1. Z. B. S. Stoïlow, Leçons sur les principe topologique (1938) p. 19.

Bezeichnet man den Mittelpunkt der Kante P_iP_j mit $P_{ij}(x^{ij})$ $i, j=1, 2, \ldots\ldots, n+1$. Dann ergibt sich:

$$P_{ij}\equiv P_{ji}, \qquad x^{ij}=x^{ji}=\frac{x^i+x^j}{2}, \tag{3}$$

Nun aus T_n schneiden wir die Simplexe

$$t_n^i: \; P_iP_{i1}P_{i2}\ldots\ldots P_{i,\,i-1}P_{i,\,i+1}\ldots\ldots P_{i,\,n+1}, \qquad i=1, 2, \ldots\ldots, n+1. \tag{4}$$

Den restbleibenden Körper nennen wir K_n. der ein konvexer Körper unseres Raumes ist. So haben wir

$$T_n=K_n+t_n^1+t_n^2+\ldots\ldots+t_n^{n+1}. \tag{5}$$

Nun wollen wir beweisen, dass die Koordinaten der Punkte von K_n sind

$$\begin{aligned} x&\equiv l_{12}x^{12}+l_{13}x^{13}+\ldots\ldots+l_{n,\,n+1}x^{n,\,n+1} \\ &=\sum_{i<j}^{n+1} l_{i,\,j}x^{i,\,j}, \\ &l_{12}+l_{13}+\ldots\ldots+l_{n,\,n+1}=1, \\ &l_{12}, l_{13}, \ldots\ldots, l_{n,\,n+1}\geqq 0\,; \end{aligned} \tag{6}$$

zunächst aber bedeutet K_n die Menge der durch (6) gegebene Punkte x. Seien z. B. η die Koordinaten der Punkten von t_n^1, so hat man

$$\begin{aligned} \eta&=\mu_1x^1+\mu_2x^{12}+\ldots\ldots+\mu_{n+1}x^{1,\,n+1}, \\ &\mu_1+\mu_2+\ldots\ldots+\mu_{n+1}=1, \\ &\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_{n+1}\geqq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Werte (3) eingesetzt, haben wir

$$\eta=\frac{x^1}{2}+\frac{1}{2}(\mu_1x^1+\mu_2x^2+\ldots\ldots\mu_{n+1}x^{n+1}),$$

auch

$$\begin{aligned} x=&\frac{1}{2}(l_{12}+l_{13}+\ldots\ldots+l_{1,\,n+1})x^1 \\ &+\frac{1}{2}(l_{21}+l_{23}+\ldots\ldots+l_{2,\,n+1})x^2 \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{1}{2}(l_{n+1,\,1}+l_{n+1,\,2}+\ldots\ldots+l_{n+1,\,n})x^{n+1}, \\ &\qquad\qquad l_{i,\,j}=l_{j,\,i}. \end{aligned}$$

Man denke den Punkt (1):

$$\xi=\lambda_1x^1+\lambda_2x^2+\ldots\ldots+\lambda_{n+1}x^{n+1}.$$

I. Wenn $\lambda_1>\frac{1}{2}$, so gehört ξ zum t_n^1. So können wir annehmen:

$$\lambda_1=\frac{1+\mu_1}{2}, \quad \lambda_2=\frac{\mu_2}{2}, \ldots\ldots, \lambda_{n+1}=\frac{\mu_{n+1}}{2}.$$

Da $\qquad \mu_1 > 0,\ \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{n+1} < \frac{1}{2},$

hat man $\quad 0 \leqslant \mu_2, \ldots\ldots, \mu_{n+1} < 1,$

und $\qquad \frac{1+\mu_1+\ldots\ldots+\mu_{n+1}}{2} = 1\ ;$

folglich $\quad \mu_1+\mu_2+\ldots\ldots+\mu_{n+1}=1.$

Noch der Punkt kann nicht zu K_n gehören, denn wenn anders

$$\frac{1}{2}(l_{12}+l_{13}+\ldots\ldots+l_{1,n+1}) > \frac{1}{2}.$$

sein müsste, was unmöglich ist.

II. Wenn $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, so gehört ξ sowie dem t_n^1 auch dem K_n an. In diesem Falle können wir setzen:

$$\mu_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{\mu_2}{2},\ \ldots\ldots.\ \lambda_{n+1} = \frac{\mu_{n+1}}{2}\ ;$$

folglich $\quad \mu_1+\mu_2+\ldots\ldots+\mu_{n+1}=1.$

So haben wir

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{x^1}{2}+\frac{1}{2}(\mu_2 x^2+\ldots\ldots+\mu_{n+1}x^{n+1})\\ &= \mu_2\frac{x^1+x^2}{2}+\ldots\ldots+\mu_{n+1}\frac{x^1+x^{n+1}}{2}\\ &= \mu_2 x^{12}+\mu_3 x^{13}+\ldots\ldots+\mu_{n+1}x^{1,n+1},\end{aligned}$$

so bilden diese Punkte das $(n-1)$-dimesionale Simplex U_{n-1}^1 mit den Eckpunkten $P_{12}, P_{13}, \ldots\ldots, P_{1,n+1}$. Das ist das Grundsimplex der Pyramiden t_n^1 mit P_1 als seinen Scheitelpunkt.

Nunmehr zeigen wir, dass diese Punkte ξ auch zu K_n gehören. Für das genügt es nur so nehmen dass

$$\lambda_2 = l_{12},\ \lambda_3 = l_{13},\ \ldots\ldots, \lambda_{n+1} = l_{1,n+1}$$

und $\qquad l_{i,j}=0,\ \begin{matrix} i<j \\ i,j=2,\ldots\ldots.n+1. \end{matrix}$

Dann

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}x_1+\lambda_2 x^2+\ldots\ldots+\lambda_{n+1}x^{n+1}\\ &= \frac{1}{2}(l_{12}+l_{13}+\ldots\ldots+l_{1,n+1})x^1\\ &\quad +\frac{1}{2}l_{21}x^2+\ldots\ldots+\frac{1}{2}l_{n+1,1}x^{n+1}\\ &= l_{12}x^{12}+l_{13}x^{13}+\ldots\ldots+l_{1,n+1}x^{1,n+1}\\ &= x.\end{aligned}$$

Daher haben das Simplex t_n^1 und der konvexe Körper K_n nur den Grundsmplex U_{n-1}^1 gemein.

III. Wenn $\lambda_i < \frac{1}{2} (i=1, 2, \ldots, n)$, so gehört ξ zum Körper K_n allein.

Für $\xi = \varkappa$, haben wir die folgenden simultanen Gleichungen zu lösen:

$$\left\{\begin{array}{l} l_{12}+l_{13}+\ldots\ldots+l_{1,n+1}=2\lambda_1, \\ l_{21}+l_{23}+\ldots\ldots+l_{2,n+1}=2\lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{n+1,1}+l_{n+1,2}+\ldots\ldots+l_{n+1,n}=2\lambda_{n+1} \end{array}\right. \tag{8}$$

wo
$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots+\lambda_n=1,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n \geqslant 0,$$
$$l_{12}+l_{13}+\ldots\ldots+l_{n,n+1}=1,$$
$$0 \leqslant l_{i,j}=l_{j,i} \leqslant 1.$$

Zunächst sei $n=2$; so haben wir die folgenden Gleichungen zu lösen:

$$\left\{\begin{array}{l} \phantom{l_{21}+{}} l_{12}+l_{13}=2\lambda_1, \\ l_{21} \phantom{+l_{32}} +l_{23}=2\lambda_2, \\ l_{31}+l_{32} \phantom{+l_{23}} =2\lambda_3 \end{array}\right.$$

wo
$$l_{ij}=l_{ji}, \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < \frac{1}{2}.$$

Wir können annehmen, dass
$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3.$$

So hat man
$$l_{13}-l_{23}=2(\lambda_1-\lambda_2),$$
$$l_{21}-l_{31}=2(\lambda_2-\lambda_3).$$

Daher
$$l_{13}=l_{23}+2(\lambda_1-\lambda_2).$$

Andererseits
$$l_{12}=-l_{23}+2\lambda_2.$$

Da
$$l_{12}+l_{13}+l_{23}=1,$$

hat man
$$l_{23}+2\lambda_1=1.$$

Daher
$$l_{23}=1-2\lambda_1.$$

Folglich
$$l_{12}=1-2\lambda_3,$$
$$l_{13}=1-2\lambda_2.$$

Man bemerke, dass
$$0 < l_{12}, l_{13}, l_{23} < 1,$$

und deren Summe gleich 1 ist.

Nun betrachten wir die Gleichungen (8) in Hinsicht auf die mathematische Induktion.

Wir können so annehmen, dass
$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots\ldots \geqslant \lambda_{n+1}.$$

Jetzt denken wir das System der Gleichungen

$$\begin{cases} \quad l_{12}+l_{13}+\ldots\ldots+l_{1n}=2\lambda_1-l_{1,\,n+1}, \\ l_{21}+\quad l_{23}+\ldots\ldots+l_{2n}=2\lambda_2-l_{2,\,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ l_{n1}+l_{n2}+\ldots\ldots+l_{n,\,n-1}=2\lambda_n-l_{n,\,n+1}. \end{cases} \tag{9}$$

wo $\qquad l_{n+1,\,1}+l_{n+1,\,2}+\ldots\ldots+l_{n+1,\,n} \quad =2\lambda_{n+1}\,;$

aber die l noch nicht bestimmt sind. Da

$$\frac{2\lambda_1-l_{1,\,n+1}}{2}+\frac{2\lambda_2-l_{2,\,n+1}}{2}+\ldots\ldots+\frac{2\lambda_n-l_{n,\,n+1}}{2}$$
$$=1-\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1}=1-2\lambda_{n+1}>0.$$

Schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_i &\equiv \frac{2\lambda_i-l_{i,\,n+1}}{2(1-2\lambda_{n+1})}, \\ l_{ij}' &\equiv \frac{l_{ij}}{1-2\lambda_{n+1}}, \end{aligned}\right\} \qquad i,j=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

So haben wir das folgende System zu lösen:

$$\begin{cases} \quad l_{12}'+l_{13}'+\ldots\ldots+l_{1n}'=2\lambda_1', \\ l_{21}'+\quad l_{23}'+\ldots\ldots+l_{2n}'=2\lambda_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ l_{n1}'+l_{n2}'+\ldots\ldots+l'_{n,\,n-1} \quad =2\lambda_n'. \end{cases} \tag{10}$$

Um die mathematische Induktion zu anwenden, sollen $\lambda_1', \lambda_2', \ldots\ldots, \lambda_n'$ unsere Bedingung erfüllen, nämlich:

$$0\leqslant\lambda_i'<\frac{1}{2}, \quad i=1,\,2,\,\ldots,\,n$$

wo $\qquad \lambda_1'+\lambda_2'+\ldots\ldots+\lambda_n'=1.$

Für dass $\quad \lambda_1'=\dfrac{2\lambda_1-l_{1,\,n+1}}{2(1-2\lambda_{n+1})}<\dfrac{1}{2},$

hat man $\quad 2\lambda_1-l_{1,\,n+1}<1-2\lambda_{n+1},$

oder

Gleicherweise
$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_{n+1}-\dfrac{1}{2}l_{1,\,n+1}<\dfrac{1}{2}, \\ \lambda_2+\lambda_{n+1}-\dfrac{1}{2}l_{2,\,n+1}<\dfrac{1}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n+\lambda_{n+1}-\dfrac{1}{2}\lambda_{n,\,n+1}<\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{11}$$

Es ist leicht sichtbar, dass für $n>3$, die folgende Ungleichung richtig ist:

$$\lambda_2+\lambda_{n+1}<\frac{1}{2}.$$

Wäre $\lambda_2+\lambda_{n+1}\geqq\frac{1}{2}$,

dann ist $\lambda_1+\lambda_{n+1}\geqq\frac{1}{2}$.

Diese Ungleichungen addiert erhalten wir

$$\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{n+1}\geqq 1.$$

Oder $1-(\lambda_3+\ldots+\lambda_{n+1})+2\lambda_{n+1}\geqq 1$.

A fortiori $1-(\overline{n+1}-2)\lambda_{n+1}+2\lambda_{n+1}\geqq 1$.

Oder $4\lambda_{n+1}\geqq(n+1)\lambda_{n+1}$.

Die Behauptung ist daher richtig wenn $n>3$, wenn nur $\lambda_{n+1}>0$. Wäre aber $\lambda_{n+1}=0$, dann ist natürlich die Behauptung richtig.

Nun für $n>3$, wäre $\lambda_1+\lambda_{n+1}>\frac{1}{2}$, dann sind die Ungleichungen (11) befriedigt, wenn man folgendermassen annimmt:

$$\begin{cases} l_{1,\,n+1}=2\lambda_{n+1}, \\ l_{2,\,n+1}=\ldots\ldots=l_{n,\,n+1}=0. \end{cases} \tag{12}$$

Untersuchen wir den Fall wo $n=3$. Wäre z. B.

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_4>\frac{1}{2}, \\ \lambda_2+\lambda_4\geqq\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dann ist $\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_4>1$.

Folglich $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4>1$,

welche unmöglich ist. Daher höchstens haben wir

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_4=\frac{1}{2}, \\ \lambda_2+\lambda_4=\frac{1}{2}, \\ \lambda_3+\lambda_4<\frac{1}{2}; \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_4\geqq\frac{1}{2}, \\ \lambda_2+\lambda_4<\frac{1}{2}, \\ \lambda_3+\lambda_4<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Im ersten Falle, ist die Ungleichung (11) befriedigt. Im zweiten Fall. dem wir schon begegnet sind, haben wir zu setzen

$$\begin{cases} l_{14} = 2\lambda_4, \\ l_{24} = l_{34} = 0\,; \end{cases} \tag{13}$$

und auch (11) ist befriedigt.

Wenn aber im Allgemeinen, $\lambda_1 + \lambda_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$, so können wir beliebige positive Zahlen für $l_{1,n+1}, \ldots\ldots, l_{n,n+1}$ angeben, nur mit der Einschränkung, dass

$$l_{1,n+1} + \ldots\ldots + l_{n,n+1} = 2\lambda_{n+1}.$$

In allen Fällen können wir (11) befriedigen. Mittelst der mathematischen Induktion, das System (10) aufgelöst erhalten wir

$$l_{ij} = l_{ij}'(1 - 2\lambda_{n+1}).\quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Überdies da

$$l_{12}' + l_{13}' + \ldots\ldots + l_{n-1,n}' = 1,$$

so haben wir

$$\begin{aligned} l_{12} + l_{13} + \ldots\ldots + l_{n,n+1} &= (l_{12}' + \ldots\ldots + l_{n-1,n}')(1 - 2\lambda_{n+1}) \\ &\quad + l_{1,n+1} + \ldots\ldots + l_{n,n+1} \\ &= (1 - 2\lambda_{n+1}) + 2\lambda_{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Daher das System (14) und beguem genommene Lösungszahlen $l_{1,n+1}, \ldots\ldots, l_{n,n+1}$ geben das gesuchte Lösungssystem von (8).

Kehren wir zum Beweis des Fundamentalsatzes zurück. Der konvexe Körper ist begrenzt durch die folgenden $n+1$ Simplexe von $n-1$ Dimensionen:

$$\begin{aligned} U_{n-1}^i:\quad & P_{i1} \cdots P_{i,i-1} P_{i,i+1} \cdots\cdots P_{i,n+1}, \\ & i = 1, 2, \ldots\ldots, n+1\,; \end{aligned}$$

und auf jeder Seite von T_n liegenden konvexen Körpern von $n-1$ Dimensionen K_{n-1}^j, deren Anzahl gleich der Seite ist; d. h. $j = 1, 2, \cdots, (n+1)$. Der konvexe Körper K_{n-1}^j ist construiert aus dem Simplex mit Eckpunkten $P_1 \ldots P_{j-1} P_{j+1} \cdots\cdots P_{n+1}$, ganz wie K_n aus T_n.

Nun nehmen wir an dass diese konvexen Körper alle simpliziar eingeteilt sind. So bestehen alle Seiten von K_n aus $(n-1)$-dimensionalen Simplexen V_{n-1}^j. Es ist leicht zu sehen, dass je zwei dieser Simplexen nur eine Seitensimplex von niederer Dimension gemein haben können. Projizieren wir diese Simplexe U_{n-1}^i, V_{n-1}^j aus dem Mittelpunkt von T_n, so haben wir eine Anzahl von Simplexe von n-Dimensionen welche mit der Simplexen t_n^i eine Einteilung des gegebenen Simplex T_n in kleineren geben. Wenn der Durchmesser von T_n d ist der von jedes oben gewonnen en kleinen Simplexe nicht grösser als $\frac{d}{2}$.

Fahren wir diese verfahren fort, so können wir das gegebene Simplex in kleineren von Durchmessern minder als eine gegebenen positeven Zahl einteilen.

Wir betonen, dass diese Verfahren auf zwei oder mehr mit gemeinsamen Seiten benachbarten Simplexen T_n gleichzeitig ausgeführt werden können, da diese Einteilung durch die der Seitensimplexen geleitet ist.