Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (IV)

Par **Sikazô Kodama**

(Re,u en Octobre 7, 1940)

Nous traitons maintenant la quasi-analyticité de fonctions doublement périodiques exprimées par les séries doubles de Fourier, et celle faisant usage des transformées de Fourier avec les intégrales considérées au sens de Cesàro dans la classe L^{*p} des fonctions de deux variables.

I. La Quasi-analyticité des séries doubles de Fourier

§ 1. Un théorème préliminaire

1. Désignons, comme plus haut, par C_M une classe de fonctions, de deux variables x et y, indéfiniment dérivables dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1.1) \qquad |f^{(m+n)}(x, y)| \leqslant k^{m+n} M_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\,; & m = 0, 1, 2, \dots \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\,; & n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

où $\{M_{m,n}\} \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ est une suite double donnée à termes positifs et k est, comme on le sait, une constante positive dépendant seulement du choix de la fonction $f(x, y)$ dans cette classe. Posons, ainsi qu'on a souvent fait, $\beta_{m,n} = \sqrt[m+n]{M_{m,n}}$ $\begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$, et désignons aussi par $\{\beta^*_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ la minorante de M. Faber de la suite double donnée $\{\beta_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$. Alors on sait que la condition[1] nécessaire et suffisante pour la quasi-analyticité de la classe C_M est donnée par la divergence de la série double $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^*_{m,n}}$, c'est-à-dire celle de l'intégrale double

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \log T(R, r) \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2} \qquad \left[\text{où } T(R, r) = \max_{m, n \geq 0} \frac{R^m r^n}{\beta^{m+n}_{m,n}} \right],$$

R et r étant des valeurs absolues de x et y.

---

1. S. Kodama: Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (I) (Memoirs of the College of Science Kyoto Imperial University, Series A, Vol. XXII, 1939, p. 309).

Il est à remarquer ici la proposition générale suivante :

Si une série double à termes positifs $\sum\sum a_{m,n}$ *diverge et si l'on pose* $a^*_{m,n}=\min\limits_{m'+n'\geq m+n} a_{m',n'}$, *alors* $\varliminf\limits_{m+n\to\infty} a^*_{m,n}=\varliminf\limits_{p\to\infty} A_p$, *où* A_p *désigne* $\min\limits_{m+n=p} a^*_{m,n}$.

On peut démontrer cette proposition de la manière suivante. Posons, tout d'abord, $\lambda=\varliminf\limits_{m+n\to\infty} a^*_{m,n}$. Alors on peut en déduire que $\lambda=\varliminf\limits_{p\to\infty} A_p$. En effet, désignant par δ un nombre positif quelconque aussi petit que l'on veut, il n'existe qu'un nombre fini de $a^*_{m,n}$ plus petit que $\lambda-\delta$, tandis qu'il y a une infinité de $a^*_{m,n}$ plus petits que $\lambda+\delta$. Il existe donc une infinité de $a^*_{m,n}$ dans l'intervalle $(\lambda-\delta, \lambda+\delta)$, désigné par Λ_δ, dont les éléments peuvent s'écrire sous la forme :

$$\overset{*}{a}_{m_1,n_1},\ \overset{*}{a}_{m_2,n_2},\ \ldots\ldots,\ \overset{*}{a}_{m_j,n_j},\ \ldots\ldots;$$

d'où, en posant $p_j=m_j+n_j$, on tire $A_{p_j}\leqslant \overset{*}{a}_{m_j,n_j}$, et par suite on voit que $A_{p_j}\leqslant\lambda+\delta$. Donc les A_{p_j}, excépté son fini, sont contenus dans Λ_δ, ce qui est satisfait pour toute valeur de δ. Il en résulte que λ est un élément limite des A_{p_j} (et donc des A_p). Or il n'y a qu'un nombre fini de A_p plus petit que $\lambda-\delta$. Donc on a $\lambda=\varliminf\limits_{p\to\infty} A_p$.

Réciproquement, si l'on pose $\lambda=\varliminf\limits_{p\to\infty} A_p$, on peut en déduire que $\lambda=\varliminf\limits_{m+n\to\infty} a^*_{m,n}$. Étant, en effet, donné un nombre positif δ quelconque aussi petit que l'on veut, comme on a $\lambda=\varliminf\limits_{p\to\infty} A_p$ par hypothèse, il n'existe qu'un nombre fini de A_p plus petit que $\lambda-\delta$. On désigne ces valeurs par $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_i}$. Et les autres valeurs de $a^*_{m,n}$ sont au moins $\lambda-\delta$. On voit, d'après la définition même de A_p, que les seuls nombres de $a^*_{m,n}$ pour lesquels la somme des indices m et n prend les valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_i$ de la suite $\{a^*_{m,n}\}$ inférieurs à $\lambda-\delta$ font partie de cette suite. Or, cette dernière suite est construite par un nombre fini de termes. D'où l'on voit qu'il n'y existe qu'un nombre fini de $a^*_{m,n}$ plus petit que $\lambda-\delta$. Cette propriété a lieu quelque petit que soit le nombre positif δ. Si donc on considère que A_p font partie de la suite double $\{a^*_{m,n}\}$, alors on voit que λ est un élément limite de cette suite, et par conséquent que $\lambda=\varliminf\limits_{m+n\to\infty} a^*_{m,n}$.

2. Démontrons maintenant le théorème suivant :

Si, en particulier, $f(x,y)$ *est une fonction doublement périodique, de périodes* 2π, 2π *par rapport à* x *et à* y, *et pouvant s'écrire sous la forme* :

$$(2.1)\qquad f(x,y)=\frac{1}{4}a_{o,o}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{m,o}\cos mx+b_{m,o}\sin mx)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{o,n}\cos ny+c_{o,n}\sin ny)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{m,n}\cos mx\cos ny$$
$$+b_{m,n}\sin mx\cos ny+c_{m,n}\cos mx\sin ny+d_{m,n}\sin mx\sin ny),$$

alors on peut toujours trouver une fonction $\phi(s,t)$ *jouissant des propriétés suivantes*: 1° *Elle est positive, continue et dérivable dans le domaine* $\begin{pmatrix} s>0 \\ t>0 \end{pmatrix}$; 2° *Pour* $t=\nu s$, ν *étant un paramètre positif, le produit* $s\dfrac{d}{ds}\phi(s,\nu s)$ *tend vers l'infini avec* s; 3° *L'intégrale double*

$$(2.2)\qquad \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\phi(s,t)\frac{ds}{s^2}\frac{dt}{t^2}$$

diverge; 4° *Et de plus, les inégalités suivantes sont remplies*:

$$(2.3)\qquad |a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|<e^{-\phi(m,n)}\qquad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots \end{pmatrix}.$$

On sait, en effet, en vertu des propriétés bien connues de la série double de Fourier, que

$$\begin{matrix} a_{m,n} \\ b_{m,n} \\ c_{m,n} \\ d_{m,n} \end{matrix}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\begin{matrix} \cos \\ \sin \\ \cos \\ \sin \end{matrix}\, mx\, \begin{matrix} \cos \\ \cos \\ \sin \\ \sin \end{matrix}\, ny\, dxdy\,;$$

d'où l'on tire aisément

$$(2.4)\qquad |a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|\leqslant\frac{k^{p+q}M_{p,q}}{\pi^2 m^p n^q}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}dxdy$$
$$=\frac{4}{T\left(\dfrac{m}{k},\ \dfrac{n}{k}\right)},$$

les entiers positifs p et q étant choisis tels qu'on ait

$$T\left(\frac{m}{k},\ \frac{n}{k}\right)=\frac{m^p n^q}{(k\beta_{p,q})^{p+q}}.$$

Supposons, tout d'abord, que $\varliminf_{p+q\to\infty}\beta^*_{p,q}<\infty$. Alors on a $T(R,r)=\infty$ pour R, r suffisamment grands; et par suite, en prenant des entiers m et n plus grands que k, et en prenant des entiers positifs p et q assez grands, la quantité $\dfrac{m^p n^q}{(k\beta_{p,q})^{p+q}}$ devient suffisamment grande, ce qui donne $T\left(\dfrac{m}{k},\ \dfrac{n}{k}\right)=\infty$; et l'on a donc, à partir de certains rangs des entiers positifs m, n,

$$|a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|=0,$$

c'est-à-dire, on a, pour telles valeurs de m et n,

$$a_{m,n},\ b_{m,n},\ c_{m,n},\ d_{m,n}=0.$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini de termes non nuls de la série double de Fourier de la fonction $f(x, y)$. Nous pouvons donc, dans ce cas, trouver facilement une fonction $\phi(s, t)$ jouissant des propriétés 1°, 2°, 3° et 4° écrites plus haut. Il est aisé de voir, par exemple, que la fonction $\phi(s, t)=st \log s \log_2 t$ satisfait certainement aux quatre conditions.

Supposons, ensuite, que $\lim\limits_{p+q\to\infty} \beta^*_{p,q}=\infty$. L'intégrale double

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R\ r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

diverge par hypothèse. On sait, en plus, que la somme $N(R, r)=\lambda(R, r)+\mu(R, r)$ dans l'expression $T(R, r)=\dfrac{R^\lambda r^\mu}{\beta^{\lambda+\mu}_{\lambda,\mu}}$ donnée par la formule

$$\log T(R, r)=\int_0^1 N(R\xi, r\xi)\frac{d\xi}{\xi}$$

est discontinue sur certaines lignes, croissante, et tend vers l'infini avec chaque variable R, r. Construisons donc une fonction $\psi(R, r)$ continue, croissante, tendant vers l'infini avec R, r, et coïncidant avec la fonction $N(R, r)$ sauf au voisinage de discontinuités, et de plus vérifiant la relation asymptotique suivante :

$$\Psi(R, r)=\int_0^1 \psi(R\xi, r\xi)\frac{d\xi}{\xi}\sim\int_0^1 N(R\xi, r\xi)\frac{d\xi}{\xi}=\log T(R, r).$$

On peut alors trouver une constante positive finie l telle que, pour $R, r\geqslant 1$, on a

$$l\,\Psi(R, r)<\log T(R, r).$$

En posant après cela pour $R, r>1$

$$\phi(kR, kr)=l\,\Psi(R, r)-C-\log 4,$$

où C est une constante positive fixe mais quelconque, on a alors

$$\phi(m, n)=l\,\Psi\left(\frac{m}{k}, \frac{n}{k}\right)-C-\log 4\,;$$

il en résulte que

$$e^{-\phi(m,n)}=4e^{C-l\Psi\left(\frac{m}{k}, \frac{n}{k}\right)}>4e^{C-\log T\left(\frac{m}{k}, \frac{n}{k}\right)}$$

$$=\frac{4e^C}{T\left(\dfrac{m}{k}, \dfrac{n}{k}\right)}\geqslant e^C\begin{vmatrix}a_{m,n}\\ b_{m,n}\\ c_{m,n}\\ d_{m,n}\end{vmatrix}>\begin{vmatrix}a_{m,n}\\ b_{m,n}\\ c_{m,n}\\ d_{m,n}\end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

Comme, d'ailleurs, on a, pour un paramètre postif ν tel que $r=\nu R$,

$$k\frac{d}{dR}\phi(kR, \nu kR)=\frac{l}{R}N(R, \nu R),$$

on voit que la fonction

$$s\frac{d}{ds}\phi(s, \nu s)=lN\left(\frac{s}{k}, \frac{\nu s}{k}\right) \tag{2.6}$$

tend vers l'infini avec s.

Par conséquent on voit : 1° que cette fonction $\phi(s, t)$ est évidemment positive, continue et dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} s>0 \\ t>0 \end{pmatrix}$; 2° que la fonction $s\frac{d}{ds}\phi(s, \nu s)$ tend vers l'infini avec s pour toute valeur d'un paramètre positif ν ; 3° que l'intégrale double $\int_1^\infty\int_1^\infty \phi(s, t)\frac{ds}{s^2}\frac{dt}{t^2}$ diverge, car on sait que l'intégrale double $\int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$ diverge par hypothèse, et de plus, que $\phi(s, t)\sim l\log T\left(\frac{s}{k}, \frac{t}{k}\right)$; 4° et finalement que

$$|a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|<e^{-\psi(m,n)} \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

On voit donc que cette fonction $\phi(s, t)$ est exactement la fonction juissant des quatre propriétés écrites plus haut, ce qui démontre notre théorème.

§ 2. L'extension d'un théorème de M. Mandelbrojt

3. En remarquant le théorème donné dans le dernier numéro, nous pouvons maintenant traiter avec M. Mandelbrojt un problème remarquable, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soit $f(x, y)$ une fonction indéfiniment dérivable, définie par la série double (2.1), *et satisfaisant aux conditions suivantes* :

$$f^{(p+q)}(0, 0)=0 \quad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \ldots \\ q=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$|a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|<\lambda_{m,n} \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Quelles sont alors les conditions nécessaires et suffisantes qu'il faut imposer à la suite double $\{\lambda_{m,n}\}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$, *pour que la fonction $f(x, y)$ soit identiquement nulle.*

Si $\lambda_{m,n}$ $\begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ peut être mise sous la forme

$$\lambda_{m,n}=e^{-\psi(m,n)} \quad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

où $\phi(s, t)$ est une fonction satisfaisant aux conditions suivantes : 1° Elle est positive, continue et dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} s>0 \\ t>0 \end{pmatrix}$; 2° La fonction $s\frac{d}{ds}\phi(s, \nu s)$ tend vers l'infini en croissant avec s pour toute valeur positive d'un paramètre ν; on peut alors énoncer avec M. Mandelbrojt[1] deux théorèmes répondant à ce problème de la manière suivante :

I. *Si l'intégrale double*

$$(3.2) \qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \phi(s, t)\frac{ds}{s^2}\frac{dt}{t^2}$$

converge, on peut alors construire une fonction $f(x, y)$ non identiquement nulle, indéfiniment dérivable, paire-paire, doublement périodique, de périodes 2π, 2π, satisfaisant aux conditions suivantes:

$$f^{(p+q)}(0, 0)=0 \qquad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \ldots \\ q=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et de plus, telle qu'en posant

$$(3.3) \qquad f(x, y)=\frac{1}{4}a_{0,0}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,0}\cos mx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_{0,n}\cos ny + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\cos mx\cos ny,$$

on ait

$$(3.4) \qquad |a_{m,n}|<e^{-\phi(m,n)} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

II. *Si, par contre, l'intégrale double* (3.2) *diverge, et si la fonction $f(x, y)$ vérifiant les relations*:

$$f^{(p+q)}(0; 0)=0 \qquad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \ldots \\ q=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

est développable en série double de Fourier (2.1) *dont les coefficients satisfont aux conditions suivantes*:

$$(3.5) \qquad |a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|<e^{-\phi(m,n)} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix};$$

alors la fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle.

Si l'on remarque, d'une part, que la somme $N(R, r)=\lambda(R, r)+\mu(R, r)$ dans l'expression $\mathfrak{M}(R, r)=\max\limits_{m, n\geq 0} C_{m,n}R^m r^n = C_{\lambda,\mu}R^\lambda r^\mu$ est non décroissante et tend vers l'infini avec R, r ; et d'autre part, que la fonction $s\frac{d}{ds}\phi(s, \nu s)$ tend vers l'infini en croissant avec s pour toute valeur positive d'un paramètre ν; on peut alors désigner $N(R, \nu R)$ la partie entière de $R\frac{d}{dR}\phi(R, \nu R)$, telle qu'on ait

$$R\phi'_R(R, \nu R)=N(R, \nu R)+\phi_1(R, \nu R),$$

1. S. Mandelbrojt: Quasi-analycité des séries de Fourier (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II vol. IV (1935) pp. 225–229).

où $0 \leqslant \phi_1(R, \nu R) < 1$. On en déduit que

$$(3.6) \qquad \phi(1, \nu) + \int_1^R \frac{N(s, \nu s)}{s} ds \leqslant \phi(R, \nu R)$$
$$< \phi(1, \nu) + \log R + \int_1^R \frac{N(s, \nu s)}{s} ds ;$$

d'où l'on tire

$$(3.7) \qquad \phi(1, \nu) + \log \mathfrak{M}(R, r) \leqslant \phi(R, r) < \phi(1, \nu) + \log \{R \mathfrak{M}(R, r)\},$$

qui est la seule condition exigée pour la fonction $\phi(R, r)$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème I. Posons, pour cela,

$$T(R, r) = \max_{m,\, n \geq 1} e^{\phi(1, \nu)} C_{m-1, n} R^m r^n = e^{\phi(1, \nu)} R\, \mathfrak{M}(R, r) ;$$

on a alors, en vertu des inégalités (3.7),

$$(3.8) \qquad e^{\phi(R, r)} < T(R, r).$$

On peut aussi, en vertu de ces mêmes inégalités et de l'hypothèse que l'intégrale double (3.2) converge, affirmer que l'intégrale double

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \log T(R, r) \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2} = \phi(1, \nu) \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2}$$
$$+ \int_1^\infty \int_1^\infty \log R \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2}$$
$$+ \int_1^\infty \int_1^\infty \log \mathfrak{M}(R, r) \frac{dR}{R^2} \frac{dr}{r^2}$$

converge aussi. Posons donc $M_{m, n} = e^{-\phi(1, \nu)} / C_{m-1, n}$. On peut alors construire, grâce au théorème du n° 18 de mon mémoire (I), une fonction $f(x, y)$, non identiquement nulle, indéfiniment dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(3.9) \qquad f^{(p+q)}(0, 0) = f^{(p+q)}(0, 2\pi) = f^{(p+q)}(2\pi, 0)$$
$$= f^{(p+q)}(2\pi, 2\pi) = 0 \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$(3.10) \qquad |f^{(p+q)}(x, y)| < \frac{1}{4} M_{p, q} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\, ;\ p = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\, ;\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$f(x, y) = f(2\pi - x, 2\pi - y) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{pmatrix}.$$

Lorsque cette fonction $f(x, y)$ est prolongée périodiquement avec les périodes 2π, 2π, elle est paire-paire et peut s'écrire sous la forme :

$$f(x, y) = \frac{a_{0,0}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^\infty a_{m, 0} \cos mx + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty a_{0, n} \cos ny$$
$$+ \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{m, n} \cos mx \cos ny ;$$

et par suite, en tenant compte des conditions (3.9) on a, d'après intégrations par parties,

$$a_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy$$
$$=\frac{\pm 1}{\pi^2 m^p n^q}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f^{(p+q)}(x,y)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}mx\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}ny\,dx\,dy\,;$$

et, grâce à l'inégalité (3.10), on peut en tirer pour tous $m, n \geqslant 0$,

$$|a_{m,n}|<\frac{M_{p,q}}{m^p n^q}\qquad\begin{pmatrix}p=0,1,2,\dots\\ q=0,1,2,\dots\end{pmatrix}.$$

Il en résulte évidemment que

$$|a_{m,n}|\leqslant\frac{1}{\max\limits_{p,q\geq 1}\dfrac{m^p n^q}{M_{p,q}}}=\frac{1}{T(m,n)}<e^{-\phi(m,n)}\qquad\begin{pmatrix}m=0,1,2,\dots\\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix},$$

ce qui prouve notre thésrème I.

4. Passons ensuite à la démonstration de notre théorème II. D'après les inégalités (3.5) et (3.7), on a

$$|a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|\leqslant e^{-\phi(1,\nu)-\log\mathfrak{M}(m,n)}\leqslant\frac{l}{\mathfrak{M}(m,n)}\,;$$

d'où il résulte, en vertu de la définition même de $\mathfrak{M}(R,r)$, que

$$(4.1)\qquad |a_{m,n}|,\ |b_{m,n}|,\ |c_{m,n}|,\ |d_{m,n}|<\frac{l}{C_{p,q}m^p n^q}\qquad\begin{pmatrix}m=0,1,2,\dots\\ n=0,1,2,\dots\end{pmatrix},$$

quels que soient les entiers positifs p et q.

Comme la fonction $f(x,y)$ est indéfiniment dérivable par hypothèse, et comme sa série double de Fourier est uniformément convergente dans son domaine d'existence et dérivable terme-à-terme, on a, quels que soient les entiers positifs k_1 et k_2,

$$f^{(k_1+0)}(x,y)=\pm\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{m,0}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}mx+b_{m,0}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}mx\right)m^{k_1}$$
$$\pm\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{m,n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}mx\cos ny+b_{m,n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}mx\cos ny\right.$$
$$\left.+c_{m,n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}mx\sin ny+d_{m,n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}mx\sin ny\right)m^{k_1},$$

$$f^{(0+k_2)}(x,y)=\pm\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0,n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}ny+c_{0,n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}ny\right)n^{k_2}$$

$$\pm\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_{m,n}\cos mx\,{}^{\cos}_{\sin}\,ny+b_{m,n}\sin mx\,{}^{\cos}_{\sin}\,ny$$
$$+c_{m,n}\cos mx\,{}^{\sin}_{\cos}\,ny+d_{m,n}\sin mx\,{}^{\sin}_{\cos}\,ny\Big)n^{k_2},$$
$$f^{(k_1+k_2)}(x,y)=\pm\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_{m,n}\,{}^{\cos}_{\sin}\,mx\,{}^{\cos}_{\sin}\,ny+b_{m,n}\,{}^{\sin}_{\cos}\,mx\,{}^{\cos}_{\sin}\,ny$$
$$+c_{m,n}\,{}^{\cos}_{\sin}\,mx\,{}^{\sin}_{\cos}\,ny+d_{m,n}\,{}^{\sin}_{\cos}\,mx\,{}^{\sin}_{\cos}\,ny\Big)m^{k_1}n^{k_2};$$

d'où l'on tire donc, pour toutes valeurs positives de deux entiers k_1 et k_2,

$$|f^{(k_1+0)}(x,y)|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}(|a_{m,0}|+|b_{m,0}|)m^{k_1}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{m,n}|+|b_{m,n}|+|c_{m,n}|+|d_{m,n}|)m^{k_1},$$
$$|f^{(0+k_2)}(x,y)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{0,n}|+|c_{0,n}|)n^{k_2}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{m,n}|+|b_{m,n}|+|c_{m,n}|+|d_{m,n}|)n^{k_2},$$
$$|f^{(k_1+k_2)}(x,y)|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{m,n}|+|b_{m,n}|+|c_{m,n}|+|d_{m,n}|)m^{k_1}n^{k_2};$$

et par conséquent, en vertu des inégalités (4.1) où l'on pose $p=k_1+2$, $q=k_2+2$, on a

$$|f^{(k_1+0)}(x,y)|<2l\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{k_1}}{C_{k_1+2,0}m^{k_1+2}}$$
$$+4l\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{k_1}}{C_{k_1+2,0}m^{k_1+2}n^2}=\frac{N}{C_{k_1+2,0}},$$
$$|f^{(0+k_2)}(x,y)|<2l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k_2}}{C_{0,k_2+2}n^{k_2+2}}$$
$$+4l\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k_2}}{C_{0,k_2+2}m^2n^{k_2+2}}=\frac{N}{C_{0,k_2+2}},$$
$$|f^{(k_1+k_2)}(x,y)|<4l\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{k_1}n^{k_2}}{C_{k_1+2,k_2+2}m^{k_1+2}n^{k_2+2}}$$
$$<\frac{N}{C_{k_1+2,k_2+2}},$$

N étant une certaine constante positive finie.

Posons donc

$$\theta(x,y)=\int_0^x d\sigma\int_0^y d\tau\int_0^\sigma\int_0^\tau f(\xi,\eta)d\xi\,d\eta.$$

Il est alors aisé de vérifier les conditions suivantes :

$$|\theta^{(p+q)}(x,y)|<NM_{p,q}\qquad\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 2\pi\,;\,p=0,1,2,\ldots,\\0\leqslant y\leqslant 2\pi\,;\,q=0,1,2,\ldots,\end{pmatrix},$$

$$\theta^{(p+q)}(0, 0)=0 \qquad \begin{pmatrix} p=0, 1, 2, \ldots \\ q=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où l'on désigne $M_{p,q}=1/C_{p,q}$ pour $p, q \geqslant 3$. Or, l'intégrale double (3.2) diverge par hypothèse ; d'où il rèsulte que l'intégrale double

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log \mathfrak{M}(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

diverge, et par suite l'intégrale double

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

diverge aussi. On voit donc que, en vertu du théorème du n° 18 de mon mémoire (I), cette fonction $\theta(x, y)$ est identiquement nulle dans le domaine $\begin{pmatrix} 0\leqslant x\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi \end{pmatrix}$, et par conséquent que, par son prolongement, cette fonction est identiquement nulle dans tous domaines. On en conclut que la fonction $f(x, y)=\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\theta(x, y)$ l'est aussi. Notre théorème II est aussi démontré.

On voit donc avec M. Mandelbrojt que si l'on peut poser

$$\lambda_{m,n}=e^{-\phi(m,n)} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \ldots \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où la fonction $\phi(s, t)$ est positive, continue et dérivable, telle que la fonction $s\dfrac{d}{ds}\phi(s, \nu s)$ tend vers l'infini en croissant avec s pour toute valeur positive d'un paramètre ν, alors la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x, y)$ donnée par (2.1) soit identiquement nulle est que l'intégrale double (3.2) diverge.

II. La transformée de Fourier

§ 1. Celle dont les intégrales sont considérées au sens de Cesàro

5. Afin d'obtenir des résultats analogues quand on fait usage des transformées de Fourier, nous désignons maintenant brièvement la notion de la transformée de Fourier, nécessaire pour l'usage futur, d'une fonction de deux variables. Considérons,[1] pour cela, deux fonctions liées par les relations suivantes :

---

1. A. C. Berry: *Necessary and sufficient conditions in the theory of Fourier transforms* (Annales of Math. (2), 32 (1931), pp. 830-838). S. Bochner: *Ein Konvergenzsatz für mehrvariablige Fouriersche Integrale* (Math. Zeitschrift, 34 (1932) SS. 440-447). A. C. Offord: *On Fourier transforms* I, II, III (Proc. of Lond. Math. Soc. (2), 38 (1935) pp. 197-216; Proc. of Lond. Math. Soc. (2), 40 (1935) pp. 281-289; Trans. Amer. Math. Soc., 38 (1935), pp. 250-266).

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} F(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)e^{-i(xu+yv)}\,du\,dv, \\ f(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i(xu+yv)}\,du\,dv. \end{aligned}$$

Ces integrales sont ici considérées au sens de Cesàro, c'est-à-dire, si d'une manière générale $\lim\limits_{U,\,V\to\infty}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{|v|}{V}\right)^{\beta}\phi(u,v)du\,dv$ tend vers une quantité finie, on dit alors que l'intégrale double $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(u,v)\,du\,dv$ est *sommable*$-(C,\alpha,\beta)$ où l'on suppose que α et $\beta>0$. En posant

$$(5.2)\qquad F(x,y;\,U,V)=\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right) \times f(u,v)e^{-i(xu+yv)}\,du\,dv,$$

nous supposons, pour toutes valeurs de U et V, que

$$F(x,y;\,U,V)\in L^p\binom{-\infty,\infty}{-\infty,\infty}\qquad [1\leqslant p\leqslant\infty].$$

S'il existe, dans ce cas, une fonction $F(x,y)$, telle qu'on ait

$$\lim_{U,\,V\to\infty}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}|F(x,y)-F(x,y;\,U,V)|^p\,dx\,dy=0 \qquad [1\leqslant p<\infty],$$

et

$$\lim_{U,\,V\to\infty}\text{borne ess. sup. }|F(x,y)-F(x,y;\,U,V)|=0 \qquad [p=\infty],$$

alors on dit que $F(x,y)$ est *la transformée de Fourier* dans L^p de la fonction $f(x,y)$.

Lorsqu'une fonction $f(x,y)$ intégrable-L dans tout domaine fini satisfait à la condition suivante :

$$(5.3)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y;\,U,V)|^p dxdy\leqslant M^p \qquad [1<p<\infty]$$

où M est une quantité finie indépendante de U et de V, on dit que la fonction $f(x,y)$ appartient à *la classe* $\mathfrak{H}^p[1<p<\infty]$. Lorsqu'on a

$$(5.4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y;\,U,V)|\,dxdy\leqslant M,$$

et, en plus, que, pour $\varepsilon(>0)$ assez petite donnée à l'avance, on a

$$(5.5)\qquad \iint_{\mathfrak{A}}|F(x,y;\,U,V)|\,dxdy\leqslant\varepsilon \qquad [\text{où } m(\mathfrak{A})<\delta(\varepsilon)],$$

on dit que la fonction $f(x,y)$ appartient à *la classe* $\mathfrak{H}^1$. Lorsqu'on a, pour toutes valeurs de x,y et de U,V.

$$(5.6)\qquad |F(x,y;\,U,V)|\leqslant M,$$

on dit que la fonction $f(x,y)$ appartient à *la classe* $\mathfrak{H}^\infty$.

6. Prenons maintenant une fonction $f(x,y)$ dans la classe $\mathfrak{H}^p$ $[1<p<\infty]$, et considérons la fonction

$$\phi(x,y\,;\ U,V)=\int_a^x\int_b^y F(u,v\,;\ U,V)dudv$$

dans un domaine quelconque $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B\end{pmatrix}$. Comme il est aisé de voir que

$$\phi(a,b\,;\ U,V)=0, \qquad |\phi(x,y\,;\ U,V)|\leqslant NM,$$

où N est une constante positive finie, on voit que la famille des fonctions ϕ est également continue. On peut donc trouver une suite de fonctions $\{\phi(x,y\,;\ U_j,V_j)\}(j=1,2,3,\ldots)$ convergeant uniformément vers une fonction $\Phi(x,y\,;\ U,V)$ de cette famille. Considérons, ensuite, une suite de fonctions $\{F(x,y\,;\ U_j,V_j)\}$ correspondante à la suite trouvée $\{\phi(x,y\,,\ U_j,V_j)\}$. En divisant le domaine $\begin{pmatrix} a\leqslant x\leqslant A \\ b\leqslant y\leqslant B\end{pmatrix}$ en mn parties par m parallèles à l'axe des x et par n parallèles à l'axe des y passant par les points $x_\lambda(\lambda=1,2,\ldots,m-1)$ et $y_\mu(\mu=1,2,\ldots,n-1)$ supposant qu'on ait $\begin{matrix} x_0=a, & x_m=A \\ y_0=b, & y_n=B\end{matrix}$; posons, pour abréger,

$$\phi_j\begin{pmatrix} x_\lambda, & x_{\lambda+1} \\ y_\mu, & y_{\mu+1}\end{pmatrix}=\phi(x_{\lambda+1},y_{\mu+1}\,;\ U_j,V_j)-\phi(x_{\lambda+1},y_\mu\,;\ U_j,V_j)$$
$$-\phi(x_\lambda,y_{\mu+1}\,;\ U_j,V_j)+\phi(x_\lambda,y_\mu\,;\ U_j,V_j)\,;$$

alors on a

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{\left|\phi_j\begin{pmatrix} x_\varkappa, & x_{\lambda+1} \\ y_\mu, & y_{\mu+1}\end{pmatrix}\right|^p}{\{(x_{\lambda+1}-x_\lambda)(y_{\mu+1}-y_\mu)\}^{p-1}}$$
$$\leqslant\int_a^A\int_b^B|F(x,y\,;\ U_j,V_j)|^p dxdy\leqslant M^p,$$

qui est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\Phi(x,y\,;\ U,V)$ soit une intégrale indéfinie $\int_a^x\int_b^y F(u,v)dudv$ d'une fonction $F(x,y)$ de la classe L^p. On peut donc trouver une fonction $F(x,y)$ correspondante à la suite $\{F(x,y\,;\ U_j,V_j)\}(j=1,2,3,\ldots)$, telle qu'on ait

$$\lim_{j\to\infty}\int_a^x\int_b^y F(u,v\,;\ U_j,V_j)|\,dudv=\int_a^x\int_b^y F(u,v)dudv,$$

où $F(u,v)\in L^p$. Cette suite $\{F(x,y\,;\ U_j,V_j)\}$ converge donc faiblement, avec un exposant p, vers cette fonction $F(x,y)$ même. Par un léger changement, on peut de même affirmer cette propriété dans les cas où $p=1$ ou ∞. Nous avons donc le théorème suivant:

Si $f(x,y)\in\mathfrak{H}^p[1\leqslant p\leqslant\infty]$, alors on peut toujours trouver une suite accouplée $\{(U_j,V_j)\}(j=1,2,3,\ldots)$, telle qu'on ait

(6.1) $\qquad F(x,y\,;\ U_j,V_j)\underset{(p)}{\rightarrow}F(x,y)\in L^p$, *faiblement.*

7. D'où l'on peut tirer sans difficulté le corollaire suivant:

Soit $f(x, y) \in \mathfrak{H}^p$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$, et prenons une suite accouplée $\{(U_j, V_j)\}$ définies comme plus haut. Si $G(x, y)$ est bornée et intégrable-L, et si $g(-u, -v)$ est la transformée de Fourier de $G(x, y)$; alors on a

$$(7.1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)G(x, y)dxdy = \lim_{U_j, V_j \to \infty} \int_{-U_j}^{U_j}\int_{-V_j}^{V_j} \left(1 - \frac{|u|}{U_j}\right)\left(1 - \frac{|v|}{V_j}\right) \times f(u, v)g(-u, -v)dudv.$$

On a, en effet, en vertu de $G(x, y) \in L$,

$$\begin{aligned}
&\int_{-U_j}^{U_j}\int_{-V_j}^{V_j} \left(1 - \frac{|u|}{U_j}\right)\left(1 - \frac{|v|}{V_j}\right) f(u, v)g(-u, -v)dudv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-U_j}^{U_j}\int_{-V_j}^{V_j} \left(1 - \frac{|u|}{U_j}\right)\left(1 - \frac{|v|}{V_j}\right) \\
&\quad \times f(u, v)dudv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y)e^{-i(ux+vy)}dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y)dxdy \\
&\quad \times \int_{-U_j}^{U}\int_{-V_j}^{V_j} \left(1 - \frac{|u|}{U_j}\right)\left(1 - \frac{|v|}{V_j}\right) f(u,v)e^{-i(xu+yv)}dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y;\ U_j, V_j)G(x, y)dxdy,
\end{aligned}$$

car on voit ici que le changement d'ordre de l'intégration est juste. Or la fonction $G(x, y)$ est, par hypothèse, bornée et intégrable$-L$, donc elle est une fonction de la classe L^q, $\left(\text{où } q = \frac{p}{1-p}\right)$. D'où l'on peut tirer l'égalité (7.1) en vertu du théorème du dernier numéro et de la convergence générale de MM. Hobson-Lebesgue. Il est aussi à remarquer ici qu'on doit utiliser (5.6) dans le cas de $\mathfrak{H}^1$.

8. *Soit $f(x, y) \in \mathfrak{H}^p[1 \leqslant p \leqslant \infty]$. Alors l'intégrale double*

$$(8.1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)e^{-i(xu+yv)}dudv$$

est sommable$-(C, 1, 1)$ presque partout à la fonction $F(x, y)$ qui est la transformée de Fourier, dans L^p, de la fonction $f(x, y)$.

Prenons, en effet, dans le corollaire du dernier numéro,

$$g(u, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left(1 - \dfrac{|u|}{U}\right)\left(1 - \dfrac{|v|}{V}\right)e^{i(xu+ry)} & \left(\begin{matrix} 0 \leqslant |u| \leqslant U \\ 0 \leqslant |v| \leqslant V \end{matrix}\right), \\ 0 & \text{(ailleurs)}, \end{cases}$$

alors on a

$$G(\xi, \eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u, v)e^{-i(\xi u+\eta v)}dudv$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)e^{i\{(x-\xi)u+(y-\eta)v\}}dudv$$
$$=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)e^{i(x-\xi)u}du\right\}$$
$$\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|v|}{V}\right)e^{i(y-\eta)v}dv\right\}$$
$$=\frac{4}{\pi^2 UV}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}U(x-\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}V(y-\eta)}{(y-\eta)^2}.$$

Cette fonction $G(\xi,\eta)$ satisfait donc à la condition du corollaire du dernier numéro, et par suite elle est bornée et intégrable dans le domaine $\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$. On a par conséquent, grâce au corollaire,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)f(u, v)e^{-i(xu+yv)}dudv$$
$$=\frac{4}{\pi^2 UV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2}U(x-\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}V(y-\eta)}{(y-\eta)^2}$$
$$\times F(\xi, \eta)d\xi d\eta,$$

où la fonction $F(\xi, \eta)$ est définie comme dans le théorème du n° 6. Le second membre de cette égalité est l'intégrale double de M. Fejér, et tend, comme on le sait, presque partout vers la fonction $F(x, y)$ lorsque U et V tendent vers l'infini. On a donc presque partout

$$F(x, y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{U, V\to\infty}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)$$
$$\times f(u, v)e^{-i(xu+yv)}dudv,$$

la convergence étant, bien entendu, dans L^p. Et par suite, on a

$$F(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)e^{-i(xu+yv)}dudv.$$

$(C, 1, 1)$, presque partout, dans L^p. Ce qui prouve notre proposition.

9. Démontrons maintenant le théorème suivant :

Si $f(x, y)\in \mathfrak{H}^p$ $[2\leqslant p\leqslant\infty]$, *si* $G(x, y)\in L^q\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$, *et si* $g(-x, -y)$ *est la transformée de Fourier, dans* L^p, *de la fonction* $G(x, y)$, *et si, en plus,* $g(x, y)$ *est bornée dans tout domaine fini ; alors on a*

$$(9.1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,G(x, y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)g(-x, -y)dxdy,$$

dont le premier membre converge, et dont le second est sommable $-(C, 1, 1)$.

Comme on a, en effet, $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p$ et $G(x,y) \in L^p$ par hypothèse, on voit, grâce à la proposition du dernier numéro, que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)F(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\lim_{U,\,V\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)dxdy$$
$$\times\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)f(u,v)e^{-i(xu+yv)}dudv\,;$$

et par suite, en vertu du théorème résultant de la sommation de Cesàro, que

$$=\lim_{U,\,V\to\infty}\frac{1}{2\pi}\lim_{X,\,Y\to\infty}\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)\left(1-\frac{|y|}{Y}\right)G(x,y)dxdy$$
$$\times\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)f(u,v)e^{-i(xu+yv)}dudv$$
$$=\lim_{U,\,V\to\infty} I,\ \text{posée, pour abréger.}$$

Or on sait encore par hypothèse que $G(x,y) \in L^q\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ $[1\leqslant q\leqslant 2]$. Il existe donc la transformée $g(-u,-v)$ de Fourier, dans L^p, de la fonction $G(x,y)$, pouvant s'écrire de la manière suivante:

$$(9.2)\qquad g(-u,-v)=\frac{1}{2\pi}\lim_{X,\,Y\to\infty}\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)\left(1-\frac{|y|}{Y}\right)$$
$$\times\, G(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy,$$

où la convergence est, bien entendu, bornée dans tout domaine où la fonction $g(-u,-v)$ est bornée, c'est-à-dire, dans tout domaine fini $\begin{pmatrix}|u|\leqslant U\\ |v|\leqslant V\end{pmatrix}$. D'où l'on tire

$$I=\frac{1}{2\pi}\lim_{X,\,Y\to\infty}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)f(u,v)dudv$$
$$\times\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)\left(1-\frac{|y|}{Y}\right)G(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy$$
$$=\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)f(u,v)g(-u,-v)dudv.$$

On a donc l'égalité suivante:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x,y)G(x,y)dxdy$$
$$=\lim_{U,\,V\to\infty}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)f(u,v)g(-u,-v)dudv,$$

qui donne l'égalité (9.1). Notre théorème est ainsi démontré.

10. Nous pouvons démontrer de même le théorème suivant:

Si $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p$ $[1\leqslant p\leqslant 2]$, si $g(x,y) \in L^p\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ est bornée dans *tout domaine fini, et si* $G(x,y)$ *est la transformée de Fourier, dans* L^q, *de la fonction* $g(x,y)$; *alors on a l'égalité suivante*:

$$(10.1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)G(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(-x,\,-y)\,dxdy,$$

dont le premier membre converge, et dont le second est sommable—$(C,1,1)$.

Comme on a, en effet, $g(x,y)\in L^p\binom{-\infty,\,\infty}{-\infty,\,\infty}[1\leqslant p\leqslant 2]$ par hypotèse, il existe la ttansformée $G(x,y)$ de Fourier, dans L^q, de cette fonction $g(u,v)$. Or on a (9.2), où la convergence est bornée dans tout domaine fini où la fonction $g(-u,\,-v)$ l'est. On peut donc avoir l'égalité (10.1) de même.

11. Les deux derniers théorèmes donnent le suivant:

Si $f(x,y)\in\mathfrak{H}^p[1\leqslant p\leqslant\infty]$, *et si* $F(x,y)$ *est définie comme dans* n°7; *alors on a la relation suivante*:

$$(11.1)\qquad f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i(xu+yv)}dudv,$$

$(C,1,1)$, *presque partout.*

Prenons, en effet, dans les théorèmes des deux derniers numéros,

$$g(u,v)=\begin{cases}1, & \begin{pmatrix}-x\leqslant u\leqslant 0\\ -y\leqslant v\leqslant 0\end{pmatrix},\\ 0, & \text{(ailleurs)};\end{cases}$$

alors on a

$$\begin{aligned}(11.2)\qquad G(\xi,\eta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{0}\int_{-y}^{0} e^{-i(\xi u+\eta v)}dudv\\ &=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i\xi x}-1}{i\xi}\cdot\frac{e^{i\eta y}-1}{i\eta}\\ &=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\xi x}{\xi}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\eta y}{\eta}e^{i\frac{\xi x+\eta y}{2}}.\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses des théorèmes des deux derniers numéros sont donc satisfaites. Il en résulte que

$$(11.3)\qquad \int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{2}\xi x}{\xi}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\eta y}{\eta}\times F(\xi,\eta)e^{i\frac{x\xi+y\eta}{2}}d\xi d\eta.$$

Premier cas: $p=1$. On sait que $F(\xi,\eta)\in L\binom{-\infty,\,\infty}{-\infty,\,\infty}$, et de plus, que le second membre de l'égalité (11.3) peut s'écrire, grâce à (11.2),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^x\int_0^y dudv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta)e^{i(u\xi+v\eta)}d\xi d\eta;$$

ce qui donne immédiatement l'égalité (11.1).

Deuxième cas : $p>1$. On a, dans ce cas, en vertu de l'inégalité généralisée de Hölder et de l'égalité (11.3),

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv\right| \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{2}\xi x}{\xi}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\eta y}{\eta}\right|^q d\xi d\eta\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta\right]^{\frac{1}{p}} \\
(11.4)\quad &=\frac{2}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{x\sin\theta}{2\theta}\,\frac{y\sin\phi}{2\phi}\right|^q\frac{2d\theta}{x}\,\frac{2d\phi}{y}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant\frac{2M}{\pi}\left\{\frac{(xy)^{q-1}}{2^{2(q-1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\,\frac{\sin\phi}{\phi}\right|^q d\theta d\phi\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant\frac{2}{\pi}M(xy)^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{1}{2^{2(q-1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\,\frac{\sin\phi}{\phi}\right|^q d\theta d\phi\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant M(xy)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Si l'on prend

$$G(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\left(1-\dfrac{|u|}{U}\right)\left(1-\dfrac{|v|}{V}\right)e^{i(xu+yv)}, & \left(\begin{matrix}|u|\leqslant U\\ |v|\leqslant V\end{matrix}\right),\\ 0, & \text{(ailleurs)},\end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned}
g(-\xi,-\eta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(u,v)e^{-i(\xi u+\eta v)}dudv \\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right) \\
&\quad\times e^{i\{(x-\xi)u+(y-\eta)v\}}dudv \\
&=\frac{1}{\pi^2UV}\cdot\frac{1-\cos U(x-\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{1-\cos V(y-\eta)}{(y-\eta)^2} \\
&=\frac{4}{\pi^2UV}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}U(x-\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}V(y-\eta)}{(y-\eta)^2},
\end{aligned}$$

et par suite toutes les hypothèses des théorèmes des deux derniers numéros sont aussi satisfaites. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{U}\right)F(u,v)e^{i(xu+yv)}dudv \\
&=\frac{4}{\pi^2UV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)\frac{\sin^2\frac{1}{2}U(x-\xi)}{(x-\xi)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}V(y-\eta)}{(y-\eta)^2}d\xi d\eta, \\
&\hspace{22em}(C.\,1,1), \\
&=\frac{4}{\pi^2UV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\xi,y+\eta)\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}d\xi d\eta,\quad (C.\,1,1).
\end{aligned}$$

Or, l'intégrale double du dernier membre existe comme l'intégrale double impropre de M. Lebesgue. En posant, en effet,

$$f_{1,1}(\xi,\eta)=\int_0^\xi\int_0^\eta f(u,v)dudv,$$

on a

$$\int_0^X\int_0^Y f(x+\xi,y+\eta)\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}d\xi d\eta$$
$$=f_{1,1}(x+X,y+Y)\frac{\sin^2\frac{1}{2}UX}{X^2}\frac{\sin^2\frac{1}{2}VY}{Y^2}$$
$$-f_{1,1}(x,y+Y)\frac{U^2}{4}\frac{\sin^2\frac{1}{2}VY}{Y^2}$$
$$-f_{1,1}(x+X,y)\frac{\sin^2\frac{1}{2}UX}{X^2}\frac{V^2}{4}+f_{1,1}(x,y)\frac{U^2}{4}\frac{V^2}{4}$$
$$-\frac{\sin^2\frac{1}{2}VY}{Y^2}\int_0^X f_{1,1}(x+\xi,y+Y)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\right)d\xi$$
$$-\frac{\sin^2\frac{1}{2}UX}{X^2}\int_0^Y f_{1,1}(x+X,y+\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{V^2}{4}\int_0^X f_{1,1}(x+\xi,y)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\right)d\xi$$
$$+\frac{U^2}{4}\int_0^Y f_{1,1}(x,y+\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}\right)d\eta$$
$$-\int_0^X\int_0^Y f_{1,1}(x+\xi,y+\eta)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\right)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}\right)d\xi d\eta,$$

et l'on voit facilement que cette dernière expression tend vers une limite lorsque X et Y tendent vers l'infini, en vertu de (11.4).

Désignons maintenant par k_1 et k_2 deux constantes positives satisfaisant aux relations $\begin{vmatrix} x \end{vmatrix}\leqq k_1$, $|y|\leqq k_2$. L'intégrale double du dernier membre de (11.5) peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{4}{\pi^2 UV}\left\{\int_{-k_1}^{k_1}\int_{-k_2}^{k_2}+\int_{k_1}^{\infty}\int_{k_2}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-k_1}\int_{k_2}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-k_1}\int_{-\infty}^{-k_2}+\int_{k_1}^{\infty}\int_{-\infty}^{-k_2}\right.$$
$$\left.+\int_{k_1}^{\infty}\int_{-k_2}^{k_2}+\int_{-k_1}^{k_1}\int_{k_2}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-k_1}\int_{-k_2}^{k_2}+\int_{-k_1}^{k_1}\int_{-\infty}^{-k_2}\right\}=\sum_{j=1}^{9}I_j.$$

On a, d'abord,

$$I_2=\frac{4}{\pi^2 UV}\int_{k_1}^{\infty}\int_{k_2}^{\infty}f(x+\xi,y+\eta)\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}d\xi d\eta$$
$$=\frac{4\sin^2\frac{1}{2}Uk_1\sin^2\frac{1}{2}Vk_2}{\pi^2 UVk_1^2k_2^2}f_{1,1}(x+k_1,y+k_2)$$
$$+\frac{4\sin^2\frac{1}{2}Vk_2}{\pi^2 UVk_2^2}\int_{k_1}^{\infty}f_{1,1}(x+\xi,y+k_2)$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^3}+\frac{U\sin U\xi}{2\xi^2}\right)d\xi$$

$$+\frac{4\sin^2\frac{1}{2}Uk_1}{\pi^2 UVk_1^2}\int_{k_2}^{\infty} f_{1,1}(x+k_1, y+\eta)$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^3}+\frac{V\sin V\eta}{2\eta^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{4}{\pi^2 UV}\int_{k_1}^{\infty}\int_{k_2}^{\infty} f_{1,1}(x+\xi, y+\eta)$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^3}+\frac{U\sin U\xi}{2\xi^2}\right)$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^3}+\frac{V\sin V\eta}{2\eta^2}\right)d\xi d\eta.$$

Or on sait, grâce à (11.4), que $|f_{1,1}(x+\xi, y+\eta)|\leqslant M|(x+\xi)(y+\eta)|^{\frac{1}{p}}$. Donc on a, en vertu du théorème de M. Lebesgue et Riemann, pour les valeurs finies fixes de k_1 et k_2,

$$\lim_{U,\, V\to\infty} I_2=0.$$

On a de même, $\lim\limits_{U,\, V\to\infty} I_3=\lim\limits_{U,\, V\to\infty} I_4=\lim\limits_{U,\, V\to\infty} I_5=0.$

On a, ensuite,

$$I_6=\frac{4}{\pi^2 UV}\int_{k_1}^{\infty}\int_{-k_2}^{k_2} f(x+\xi, y+\eta)\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}d\xi d\eta$$
$$=\frac{4\sin^2\frac{1}{2}Uk_1\sin^2\frac{1}{2}Vk_2}{\pi^2 UVk_1^2k_2^2}[f_{1,1}(x+k_1, y-k_2)-f_{1,1}(x+k_1, y+k_2)]$$
$$+\frac{4\sin^2\frac{1}{2}Vk_2}{\pi^2 UVk_2^2}\int_{k_1}^{\infty}[f_{1,1}(x+\xi, y-k_2)-f_{1,1}(x+\xi, y+k_2)]$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^3}+\frac{U\sin U\xi}{2\xi^2}\right)d\xi$$
$$+\frac{4\sin^2\frac{1}{2}Uk_1}{\pi^2 UVk_1^2}\int_{-k_2}^{k_2} f_{1,1}(x+k_1, y+\eta)$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^3}+\frac{V\sin V\eta}{2\eta^2}\right)d\eta$$
$$+\frac{4}{\pi^2 UV}\int_{k_1}^{\infty}\int_{-k_2}^{k_2} f_{1,1}(x+\xi, y+\eta)$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^3}+\frac{U\sin U\xi}{2\xi^2}\right)$$
$$\times\left(\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^3}+\frac{V\sin V\eta}{2\eta^2}\right)d\xi d\eta,$$

d'où l'on tire aussi

$$\lim_{U,\, V\to\infty} I_6=0.$$

On a, de même,

$$\lim_{U,\, V\to\infty} I_7=\lim_{U,\, V\to\infty} I_8=\lim_{U,\, V\to\infty} I_9=0.$$

On sait finalement que I_1 est l'intégrale double de M. Fejér, et l'on a

$$\lim_{U, V\to\infty} I_1 = f(x, y), \text{ presque partout.}$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{U, V\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)$$
$$\times F(u, v)e^{i(xu+yv)}dudv = f(x, y), \qquad \text{presque partout.}$$

C'est-à-dire, on a

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i(xu+yv)}dudv,$$
$$(C, 1, 1), \text{ presque partout.}$$

Notre théorème est ainsi démontré.

12. Nous avons donc, en vertu du théorème du $n°$ 8 et de celui du dernier numéro, le théorème fondamental suivant dans la classe $\mathfrak{H}^p$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$:

Si $f(x, y) \in \mathfrak{H}^p$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$, *alors*

$$(12.1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)e^{-i(xu+yv)}dudv \to F(x, y) \in L^p\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix},$$
$$(C, 1, 1), \textit{ presque partout,}$$

et cette fonction $F(x, y)$ *est la transformée de Fourier, dans* L^p, *de* $f(x, y)$, *et l'on a*

$$(12.2) \qquad f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{i(xu+yv)}dudv,$$
$$(C, 1, 1), \textit{ presque partout.}$$

Il est à remarquer ici que la fonction $F(x, y)$ *est bornée dans le cas* $\mathfrak{H}^\infty$.

§ 2. La classe $\mathfrak{H}^{*p}$

13. Soit $F(x, y)$ une fonction mesurable et appartenant à la classe $L^p\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ $[1 \leqslant p < \infty]$, et si, en plus, l'intégrale double

$$(13.1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}-1}{iu}\,\frac{e^{ivy}-1}{iv}F(u, v)dudv = I_1$$

existe comme une intégrale-L indéfinie; alors on dit que la fonction $F(x, y)$ appartient à *la classe* $\mathfrak{H}^{*p}[1 \leqslant p < \infty]$. Soit $F(x, y)$ une fonction bornée, et si la somme

$$(13.2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{e^{ixu}-1}{iu}\,\frac{e^{iyv}-1}{iv}F(u, v)dudv$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int_{1}^{\infty}\int_{-1}^{1} + \int_{-\infty}^{-1}\int_{-1}^{1}\right)\frac{e^{ixu}}{iu}\,\frac{e^{iyv}-1}{iv}F(u, v)dudv$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\int_{1}^{\infty}+\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{-1}\right)\frac{e^{ixu}-1}{iu}\frac{e^{iyv}}{iv}F(u,v)dudv$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int_{1}^{\infty}\int_{1}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-1}\int_{1}^{\infty}+\int_{1}^{\infty}\int_{-\infty}^{-1}+\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1}\right)$$
$$\times\frac{e^{ixu}}{iu}\frac{e^{iyv}}{iv}F(u,v)dudv=I_2$$

est sommable-$(C, 1, 1)$ et si cette somme existe comme une intégrale-L indéfinie ; alors on dit que la fonction $F(x,y)$ appartient à *la classe* $\mathfrak{H}^{*\infty}$.

Démontrons maintenant le théorème suivant:

Si $F(x,y)\in\mathfrak{H}^{*p}[1\leqslant p\leqslant\infty]$, *et si*

$$(13.3)\qquad f(x,y)=\frac{\partial^2 I_1}{\partial x\partial y}\qquad (\textit{pour}\ 1\leqslant p<\infty),$$
$$=\frac{\partial^2 I_2}{\partial x\partial y}\qquad (\textit{pour}\ p=\infty),$$

alors la fonction $f(x,y)$ *appartient à la classe* $\mathfrak{H}^p[1\leqslant p\leqslant\infty]$, *et la fonction* $F(x,y)$ *est la transformée de Fourier, dans* L^p, *de la fonction* $f(x,y)$.

Considérons tout d'abord le cas où $1\leqslant p<\infty$. Comme on a $F(x,y)\in\mathfrak{H}^{*p}$ par hypothèse, l'intégrale double I_1 existe comme une intégrale-L indéfinie, et donc elle converge uniformément dans tout domaine fini. On a donc

$$F(x,y;U,V)=\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)$$
$$\times f(u,v)e^{-i(xu+yv)}dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\frac{d}{du}\left\{\left(1-\frac{|u|}{U}\right)e^{-ixu}\right\}\frac{d}{dv}\left\{\left(1-\frac{|v|}{V}\right)e^{-iyv}\right\}$$
$$\times f_{1,1}(u,v)dudv$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\frac{d}{du}\left\{\left(1-\frac{|u|}{U}\right)e^{-ixu}\right\}\frac{d}{dv}\left\{\left(1-\frac{|v|}{V}\right)e^{-iyv}\right\}dudv$$
$$(13.4)\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}-1}{i\xi}\frac{e^{iy\eta}-1}{i\eta}F(\xi,\eta)d\xi d\eta$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)d\xi d\eta\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\frac{d}{du}\left\{\left(1-\frac{|u|}{U}\right)e^{-ixu}\right\}$$
$$\times\frac{d}{dv}\left\{\left(1-\frac{|v|}{V}\right)e^{-iyv}\right\}\frac{e^{ix\xi}-1}{i\xi}\frac{e^{iy\eta}-1}{i\eta}dudv$$
$$=\frac{4}{\pi^2UV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)\frac{\sin^2\frac{1}{2}U(\xi-x)}{(\xi-x)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}V(\eta-y)}{(\eta-y)^2}d\xi d\eta$$
$$=\frac{4}{\pi^2UV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi+x,\eta+y)\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}d\xi d\eta.$$

Pour le cas où $p=1$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y;\ U,V)|dxdy$$
$$\leqslant\frac{4}{\pi^2 UV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}d\xi d\eta$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi+x,\eta+y)|dxdy\leqslant M;$$

et l'on a, $\mathfrak{A}$ désignant un ensemble quelconque,

$$\iint_{\mathfrak{A}}|F(x,y;\ U,V)|dxdy$$
$$\leqslant\frac{4}{\pi^2 UV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2}U\xi}{\xi^2}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}V\eta}{\eta^2}d\xi d\eta$$
$$\times\iint_{\mathfrak{A}}|F(\xi+x,\eta+y)|dxdy.$$

Or on sait, par hypothèse, pue $F(x,y)\in L\begin{pmatrix}-\infty,\infty\\-\infty,\infty\end{pmatrix}$. On peut donc, pour $\varepsilon(>0)$ assez petite donnée à l'avance, trouver une quantité δ, indépendante de ξ et de η, telle qu'on ait

$$\iint_{\mathfrak{A}}|F(\xi+x,\eta+y)|\,dxdy\leqslant\varepsilon,\qquad \text{si } m(\mathfrak{A})\leqslant\delta.$$

Il en résulte que

$$\iint_{\mathfrak{A}}|F(x,y;\ U,V)|dxdy\leqslant\varepsilon,$$

ce qui prouve que $f(x,y)\in\mathfrak{H}^1$.

Pour le cas où $1<p<\infty$, on a, grâce à l'inégalité généralisée de Hölder,

$$|F(x,y;\ U,V)|\leqslant\frac{4}{\pi^2 UV}$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{2}U\xi}{\xi}\,\frac{\sin\frac{1}{2}V\eta}{\eta}F(\xi+x,\eta+y)\right|^p d\xi d\eta\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{2}U\xi}{\xi}\,\frac{\sin\frac{1}{2}V\eta}{\eta}\right|^q d\xi d\eta\right\}^{\frac{1}{q}}\qquad\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$$
$$\leqslant\frac{N}{(UV)^{\frac{1}{q}}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{2}U\xi}{\xi}\,\frac{\sin\frac{1}{2}V\eta}{\eta}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times F(\xi+x,\eta+y)\right|^p d\xi d\eta\right\}^{\frac{1}{p}};$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y;\ U,V)|^p dxdy$$
$$\leqslant\frac{M}{|UV|^{p-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+\xi,y+\eta)|^p dxdy$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\frac{1}{2}U\xi}{\xi} \frac{\sin\frac{1}{2}V\eta}{\eta} \right|^p d\xi d\eta;$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y; U, V)|^p dx dy \leqslant M,$$

ce que prouve que $f(x, y) \in \mathfrak{H}^p[1 < p < \infty]$.

On voit ainsi que $f(x, y)$ appartient à la classe $\mathfrak{H}^p[1 \leqslant p < \infty]$. Il reste donc à affirmer que la fonction $F(x, y)$ est la transformée de Fourier, dans L^p, de la fonction $f(x, y)$. Il suffit, pour cela, de voir que

$$F(x, y; U, V) \to F(x, y), \qquad \text{presque partout};$$

et ceci est manifeste en vertu de (13.4).

Si l'on utilise I_2 au lieu de I_1, on peut alors affirmer que l'intégrale correspondante converge aussi par un argument analogue, et que $f(x, y) \in \mathfrak{H}^\infty$.

Notre théorème est donc démontré.

14. *Si* $f(x, y) \in \mathfrak{H}^p$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$, *alors* $F(x, y) \in \mathfrak{H}^{*p}$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$.

On a, en effet, dans le cas où $1 \leqslant p < \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}-1}{iu} \frac{e^{iyv}-1}{iv} F(u, v) du dv$$

$$(14.1) \quad = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{U, V\to\infty} \int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V} \left(1 - \frac{|u|}{U}\right)\left(1 - \frac{|v|}{V}\right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}-1}{iu} \frac{e^{iyv}-1}{iv} e^{-i(\xi u+\eta v)} du dv.$$

Or

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i(\xi u+\eta v)} du dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \frac{d}{d\xi}\left(\frac{e^{i\xi u}}{iu}\right) \frac{d}{d\eta}\left(\frac{e^{i\eta v}}{iv}\right) du dv,$$

et l'on a

$$\int_0^x\int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \frac{e^{ixu}-1}{iu} \frac{e^{iyv}-1}{iv} du dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}-1}{iu} \frac{e^{iyv}-1}{iv}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) e^{-i(us+vt)} ds dt \right\} du dv$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{U, V\to\infty} \int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V} \left(1 - \frac{|s|}{U}\right)\left(1 - \frac{|t|}{V}\right) f(s, t) ds dt$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}-1}{iu}\frac{e^{iyv}-1}{iv}e^{-i(su+tv)}dudv.$$

On voit donc que l'expression (14.1) est égale à $\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)d\xi d\eta$. Il en résulte que $F(x,y)\in \mathfrak{H}^{*p}$ $[1\leqslant p<\infty]$.

On peut aussi affirmer que cette proposition est réalisée pour le cas où $p=\infty$.

15. Il est aussi à remarquer la proposition suivante :

Soit $F(x,y)\in L^p\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ $[1\leqslant p\leqslant\infty]$, *et si l'intégrale double*

$$(15.1)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{i(xu+yv)}dudv$$

converge partout vers $f(x,y)$ *qui est finie partout et qui est intégrable-L dans tout domaine fini; alors on a* $F(x,y)\in\mathfrak{H}^{*p}$, *et cette fonction* $F(x,y)$ *est la transformée de Fourier, dans* L^p, *de la fonction* $f(x,y)$.

On a, en effet, grâce à $F(x,y)\in L^p$, par une part de l'hypothèse,

$$(15.2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(x,y)|}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$$
$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y)|^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|^q dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant M.$$

En utilisant donc l'autre part de l'hypothèse, on peut, avec M. Pollard, affirmer que

$$\int_0^x\int_0^y dsdt\int_0^s\int_0^t f(u,v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{e^{ixu}-ixu-1}{u^2}\frac{e^{iyv}-iyv-1}{v^2}F(u,v)dudv$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int_1^{\infty}\int_{-1}^{1}+\int_{-\infty}^{-1}\int_{-1}^{1}\right)\frac{e^{ixu}}{u^2}\frac{e^{iyv}-iyv-1}{v^2}F(u,v)dudv$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\int_1^{\infty}+\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{-1}\right)\frac{e^{ixu}-ixu-1}{u^2}\frac{e^{iyv}}{v^2}F(u,v)dudv$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}+\int_{-\infty}^{-1}\int_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\int_{-\infty}^{-1}+\int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1}\right)\frac{e^{ixu}}{u^2}\frac{e^{iyv}}{v^2}F(u,v)dudv$$
$$+\text{termes finis}.$$

Il en résulte que

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_{-8}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixu}-1}{iu}\frac{e^{iyv}-1}{iv}F(u,v)dudv,$$

ce qui prouve notre proposition.

§ 3. La classe L^{*p}

16. Désignons, pour abréger, par $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p L^{p'}$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant p' \leqslant \infty]$ le fait associé $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p$ et $f(x,y) \in L^{p'}$, et par L^{*p} la classe $\mathfrak{H}^p L^p$.

Pour la classe $\mathfrak{H}^p L^{p'}$ démontrons le théorème suivant:

Si $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p L^{p'}$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant p' \leqslant \infty]$, alors la fonction $f(x,y)$ a sa transformée de Fourier $F(x,y)$ dans L^p, et cette fonction $F(x,y)$ appartient à la classe $\mathfrak{H}^{p'} L^p$, et de plus, la fonction $f(-x,-y)$ est la transformée de Fourier, dans $L^{p'}$, de la fonction $F(x,y)$.

Considérons, en effet, tout d'abord le cas où $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant p' \leqslant \infty$. Dans les théorèmes des $n^\circ 9$ et 10, posons

$$G(\xi,\eta)=\begin{cases} 1, & \begin{pmatrix} 0 \leqslant \xi \leqslant x \\ 0 \leqslant \eta \leqslant y \end{pmatrix}, \\ 0, & \text{(ailleurs)}. \end{cases}$$

Alors on a

$$g(-u,-v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,\eta)e^{-i(u\xi+v\eta)}\,d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^x\int_0^y e^{-i(u\xi+v\eta)}\,d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-e^{-ixu}}{iu}\,\frac{1-e^{-iyv}}{iv},$$

d'où il résulte que

$$(16.1)\qquad \int_0^x\int_0^y F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-ixu}}{iu}\,\frac{1-e^{-iyv}}{iv}f(u,v)\,dudv.$$

Or on a, d'une part, $f(x,y) \in L^{p'}$ par hypothèse. On voit donc, grâce à la proposition du dernier numéro, que $f(x,y) \in \mathfrak{H}^{*p'}$. D'où il résulte, en vertu du théorème du $n^\circ 13$, que $F(x,y) \in \mathfrak{H}^{p'}$.

On a, d'autre part, $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p$ par hypothèse. On a donc $F(x,y) \in L^p$. On voit ainsi que $F(x,y) \in \mathfrak{H}^{p'} L^p$. Il en résulte que $f(-x,-y) \in L^{p'}$.

Prenons ensuite le cas où $p=\infty$, $1 \leqslant p' \leqslant \infty$. Comme on a dans ce cas

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{U,V\to\infty}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)$$

$$\times f(u,v)e^{-i(xu+yv)}\,dudv,$$

la convergence étant bien entendu bornée, on voit que

$$\int_0^x\int_0^y F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi}\lim_{U,V\to\infty}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)\left(1-\frac{|v|}{V}\right)f(u,v)$$

$$\times \frac{1-e^{-ixu}}{iu} \frac{1-e^{-iyv}}{iv} dudv.$$

On peut donc retrouver de même le résultat voulu.

Notre théorème est ainsi démontré.

17. On peut en déduire le théorème suivant :

Si $f(x,y) \in L^{*p}$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$, *alors* $F(x,y) \in L^{*p}$.

Ce théorème est fondamental pour la classe L^{*p} parce qu'il y a une propriété réciproque entre la fonction et sa transformée de Fourier. Il y a bien entendu une classe des fonctions réciproques en elles-mêmes, mais nous n'y touchons pas ici. Toutefois, il est à remarquer que $L^{*p} \subset L^p$ pour $1 \leqslant p \leqslant 2$, mais qu'il ne s'en suit pas nécessairement que $L^{*p} \subset L^p$ pour $p > 2$. Malgré cela on peut affirmer la proposition suivante :

Si $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p$ $[1 < p < \infty]$, si $F(x,y)$ est la transformée de Fourier, dans L^p, de la fonction $f(x,y)$, et si

$$(17.1) \qquad \mathfrak{F}(x,y\,;\,U,V) = \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{U} \int_{-V}^{V} f(u,v) e^{-i(xu+yv)} dudv\,;$$

alors on a

$$(17.2) \qquad \lim_{U,V\to\infty} \int_{-U}^{U} \int_{-V}^{V} |F(x,y) - \mathfrak{F}(x,y\,;\,U,V)|^p dxdy = 0,$$

ce qui affirme que la fonction $F(x,y)$ est aussi la transformée ordinaire de Fourier, dans L^p, de $f(x,y)$. Inversement, si la fonction $f(x,y)$ satisfait à la relation (17.2), alors $f(x,y) \in \mathfrak{H}^p$, et la fonction $F(x,y)$ est la transformée, au sens jusqu'à présent, de Feurier, dans L^p de la fonction $f(x,y)$.

III. La Quasi-analyticité faisant usage des transformées de Fourier

§ 1. Une classe quasi-analytique dans L^{*p}

18. Soit $\phi(u,v)$ une fonction positive, dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} 0, \infty \\ 0, \infty \end{pmatrix}$ et saisfaisant, pour chaque valeur positive d'un paramètre ν, au condition

$$u\frac{d}{du}\phi(u,\nu u) \uparrow \infty \qquad \text{avec } u \to \infty.$$

Désignons, comme dans le $n^\circ 3$, par $N(u,\nu u)$ la partie entière du produit $u\dfrac{d\phi(u,\nu u)}{du}$, alors on a

$$\phi(1,\nu) + \int_1^R \frac{N(u,\nu u)}{u} du \leqslant \phi(R,r)$$
$$< \phi(1,\nu) + \log R + \int_1^R \frac{N(u,\nu u)}{u} du,$$

où $r=\nu R$. Or on sait qu'on peut construire une fonction entière $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n}R^m r^n$ (où $C_{m,n}\geqslant 0$ et où $\lim_{m+n\to\infty} \sqrt[m+n]{C_{m,n}}=0$), telle qu'on ait

$$\log T(R, r)=\int_1^R \frac{N(u, \nu u)}{u}du,$$

où $T(R, r)=\max_{m,n\geqq 0} C_{m,n}R^m r^n=C_{\lambda,\mu}R^\lambda r^\mu$, $N(R, r)=\lambda(R, r)+\mu(R, r)$.
On a donc

$$\phi(1, \nu)+\log T(R, r)\leqslant\phi(R, r)<\phi(1, \nu)+\log\{RT(R, r)\}.$$

On voit donc que deux intégrales doubles

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \log T(R, r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2} \quad \text{et} \quad \int_1^\infty\int_1^\infty \phi(u, v)\frac{du}{u^2}\frac{dv}{v^2}$$

divergent ou convergent en même temps.

Considérons maintenant la fonction $f(x, y)$ appartenant à la classe $L^{*p}\begin{pmatrix}-\infty, \infty\\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$ $[1\leqslant p\leqslant\infty]$, indéfiniment dérivable dans ce domaine, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(18.1) \qquad f^{(m+n)}(0, 0)=0 \qquad \begin{pmatrix}m=0, 1, 2, \ldots\\ n=0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix},$$

$$(18.2) \qquad |F(\pm u, \pm v)|\leqslant Ae^{-\phi(u, v)} \qquad (\text{A : constante}),$$

où $F(u, v)$ est la transformée de Fourier de $f(x, y)$, c'est-à-dire

$$F(u, v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-i(ux+vy)}dxdy.$$

Si l'intégrale double

$$(18.3) \qquad \int_1^\infty\int_1^\infty \phi(u, v)\frac{du}{u^2}\frac{dv}{v^2}$$

diverge, alors la fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle.

On a, en effet, d'une part

$$\begin{aligned}|F(\pm u, \pm v)| &\leqslant Ae^{-\phi(u, v)}\leqslant A\exp\{-\phi(1, \nu)-\log T(u, v)\}\\ &=\frac{A}{T(u, v)}\leqslant\frac{A}{C_{p,q}u^p v^q}\end{aligned}$$

pour toutes valeurs positives entières de p et q, et l'on a, d'autre part

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{i(xu+yv)}dudv.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}|f^{(m+n)}(x, y)| &= \left|\frac{i^{m+n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)u^m v^n e^{i(xu+yv)}dudv\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)u^m v^n|\,dudv\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}m=0, 1, 2, \ldots\\ n=0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}.$$

En prenant ici $p=m+2$, $q=n+2$, on voit que

$$|f^{(m+n)}(x,y)|\leqslant\frac{A}{C_{m+2,\,n+2}}\qquad\begin{pmatrix}m=0,1,2,\ldots\\ n=0,1,2,\ldots\end{pmatrix}.$$

Considérons donc la fonction $\varphi(x,y)=\int_0^x\int_0^y d\xi d\eta\int_0^\xi\int_0^\eta f(u,v)dudv.$ Alors, en posant $M_{m,n}=1/C_{m+2,\,n+2}$ $\begin{pmatrix}m\geqslant 0\\ n\geqslant 0\end{pmatrix}$, on voit que cette fonction $\varphi(x,y)$ satisfait aux conditions suivantes:

$$|\varphi^{(m+n)}(x,y)|\leqslant AM_{m,n}\qquad\begin{pmatrix}-\infty\leqslant x\leqslant\infty\,;\ m=0,1,2,\ldots\\ -\infty\leqslant y\leqslant\infty\,;\ n=0,1,2,\ldots\end{pmatrix},$$

$$\varphi^{(m+n)}(0,0)=0\qquad\begin{pmatrix}m=0,1,2,\ldots\\ n=0,1,2,\ldots\end{pmatrix},$$

et de plus, l'intégrale double $\int_1^\infty\int_1^\infty\log T(R,r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$ diverge. On voit donc, en vertu du théorème extensif de MM. Denjoy et Carleman que la fonction $\varphi(x,y)$ est identiquement nulle, ce qui prouve que $f(x,y)$ l'est aussi.

19. Supposons, au contraire, que l'intégrale double (18.3) converge. Alors, comme on le voit plus haut, l'intégrale double

$$\int_1^\infty\int_1^\infty\log T(R,r)\frac{dR}{R^2}\frac{dr}{r^2}$$

converge aussi. On peut donc, en vertu du théorème fondamental du n°18 de mon Mémoire (I), construire une fonction $f_1(x,y)$, non identiquement nulle, indéfiniment dérivable dans un certain domaine $\begin{pmatrix}a\leqslant x\leqslant a_1\\ b\leqslant y\leqslant b_1\end{pmatrix}$, non négative et vérifiant les relations

$$\begin{aligned}f_1^{(m+n)}(a,b)&=f_1^{(m+n)}(a,b_1)=f_1^{(m+n)}(a_1,b)\\ &=f_1^{(m+n)}(a_1,b_1)=0\quad\begin{pmatrix}m=0,1,2,\ldots\\ n=0,1,2,\ldots\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$|f_1^{(m+n)}(x,y)|<M_{m,n}\qquad\begin{pmatrix}a\leqslant x\leqslant a_1\,;\ m=0,1,2,\ldots\\ b\leqslant y\leqslant b_1\,;\ n=0,1,2,\ldots\end{pmatrix}.$$

Posons donc

$$f(x,y)=\begin{cases}f_1(x,y), & \begin{pmatrix}a\leqslant x\leqslant a_1\\ b\leqslant y\leqslant b_1\end{pmatrix},\\ 0, & \text{(ailleurs)},\end{cases}$$

et considérons la transformée de Fourier de cette fonction $f(x,y)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}F(u,v)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a_1}\int_b^{b_1}f_1(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy.\end{aligned}$$

Il est alors aisé de voir que

$$|F(u, v)| \leqslant \frac{1}{2\pi|u|^m|v|^n}\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} \times |f_1^{(m+n)}(x, y)|\,dxdy \leqslant A\frac{M_{m,n}}{|u|^m|v|^n},$$

d'où l'on tire

$$|F(u, v)| \leqslant \min_{m,n\geq 0}\frac{AM_{m,n}}{|u|^m|v|^n} = \frac{A}{T(|u|, |v|)} \leqslant Ae^{-\phi(|u|, |v|)}$$

En remarquant que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(u, v)u^m v^n|\,dudv \leqslant AM_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

on voit que la transformée de Fourier de $F(u, v)$, c'est-à-dire

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{i(xu+yv)}dudv$$

est indéfiniment dérivable et nulle sauf le domaine $\begin{pmatrix} a, a_1 \\ b, b_1 \end{pmatrix}$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant[1]:

Soit $\phi(u,v)$ une fonction positive, dérivable dans le domaine $\begin{pmatrix} 0, \infty \\ 0, \infty \end{pmatrix}$ et satisfaisant, pour chaque valeur positive d'un paramètre ν, à la condition $u\frac{d}{du}\phi(u, \nu u) \uparrow \infty$ avec $u \to \infty$. Soit C une classe de fonctions $f(x, y)$ appartenant à la classe $L^{*p}\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$ $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$, indéfiniment dérivables dans ce domaine, et satisfaisant à la condition suivante:

$$|F(u, v)| \leqslant Ae^{-\phi(|u|, |v|)},$$

où $F(u, v)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(x, y)$. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que la classe C soit quasi analytique est que l'intégrale double (18.3) diverge.

20. Nous pouvons immédiatement en déduire le corollaire suivant:

Soit $\phi(u,v)$ une fonction satisfaisant aux conditions du dernier théorème, et soit $f(x, y)$ une fonction appartenant à la classe L^{*p} $\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$ et satisfaisant à la condition suivante

$$|f(x, y)| \leqslant Ae^{-\phi(|x|, |y|)} \qquad (\textit{où } A \textit{ est une constante}).$$

Alors la divergence de l'intégrale double

$$(20.1) \qquad \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\phi(x, y)\frac{dx}{x^2}\frac{dy}{y^2}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les relations

---

1. On voit ainsi que ce théorème étend, dans un certain sens, notre théorème dans la classe L^2 déjà exposé dans mon Mémoire (III). Mais tous les deux sont utilisables.

$$(20.2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)x^m y^n dxdy=0 \qquad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\ldots \\ n=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

impliquent que la fonction $f(x,y)$ est identiqnment nulle.

Il est d'abord clair que la condition est suffisante en vertu du théorème précédent. Ensuite, la condition est aussi nécessaire. Soit, en effet, $F(u,v)$ la transformée de Fourier de la fonction $f(x,y)$. On voit alors, en vertu du théorème fondamental du $n^\circ 18$, que $F(u,v) \in L^{*p}$ parce que $f(x,y) \in L^{*p}$ par hypothèse. Et la transformée de Fourier de cette fonction est $f(x,y)$ elle-même, qui satisfait à la condition $|f(x,y)| \in Ae^{-\phi(|x|,|y|)}$ par hypothèse. Or on a, grâce à (20.1),

$$F^{(m+n)}(0,0)=\frac{i^{m+n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)x^m y^n \,dxdy=0$$
$$\begin{pmatrix} m=0,1,2,\ldots \\ n=0,1,2,\ldots \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que $F(u,v)$ est identiquement nulle, et donc $f(x,y)$ l'est aussi. Notre corollaire est ainsi démontré.

§ 2. Antre forme du théorème du $n^\circ 19$

21. Démontrons maintenant le théorème suivant:

La conclusion du théorème du $n^\circ 19$ est aussi valable quand les conditions

$$|F(u,v)| \leqslant Ae^{-\phi(u,v)} \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{\phi(u,v)}{u^2v^2}dudv=\infty$$

sont remplacées par

$$(21.1)\qquad \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{du}{u^2}\frac{dv}{v^2}\log\int_u^{\infty}\int_v^{\infty}|F(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta=-\infty.$$

Pour la démonstration on doit remarquer le lemme suivant:

Soit $f(x,y)$ une fonction appartenant à la classe L^{*p} $[1 \leqslant p \leqslant \infty]$, et soit $F(u,v)$ la transformée de Fourier de $f(x,y)$. Si la fonction $f(x,y)$ est nulle presque partout dans un certain domaine, alors on peut toujours trouver une fonction $f_1(x,y)$ non équivalente à nul sans que $f(x,y)$ le soit, mais nulle dans un rectangle $\begin{pmatrix} -2U \leqslant x \leqslant 2U \\ -2V \leqslant y \leqslant 2V \end{pmatrix}$, et satisfaisant à la condition

$$(21.2)\qquad |f_1(x,y)| \leqslant \frac{N}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

où N est une constante positive finie, avec sa transformée de Fourier vérifiant la condition

$$(21.3)\qquad |F_1(u,v)| \leqslant \frac{N}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

Pour affirmer ce lemme, soit la fonction $f(x, y)$ nulle dans un rectangle dont les côtés sont des longueurs $4U$ et $4V$. Alors il est clair que la fonction

$$(21.4) \qquad g(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|\xi|}{U}\right)\left(1-\frac{|\eta|}{V}\right)f(x+\xi, y+\eta)d\xi d\eta$$

est nulle dans le rectangle $\begin{pmatrix} -U, & U \\ -V, & V \end{pmatrix}$. Or on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U}\int_{-V}^{V}\left(1-\frac{|x|}{U}\right)\left(1-\frac{|y|}{V}\right)e^{-i(ux+vy)}dxdy$$
$$=\frac{8}{\pi UV}\frac{\sin^2\frac{1}{2}Uu}{u^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}Vv}{v^2}.$$

D'où l'on tire que la transformée de Fourier de la fonction $g(x, y)$ peut s'écrire sous la forme

$$(21.5) \qquad G(u, v) = \frac{8}{\pi UV}F(u, v)\frac{\sin^2\frac{1}{2}Uu}{u^2}\frac{\sin^2\frac{1}{2}Vv}{v^2}.$$

En posant donc

$$f_1(x, y) = 4g(x, y)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2}\frac{\sin^2\frac{1}{2}y}{y^2},$$

on voit que la transformée de Fourier de cette fonction $f_1(x, y)$ peut s'écrire sous la forme

$$(21.6) \qquad F_1(u, v) = \int_{u-1}^{u+1}\int_{v-1}^{v+1}G(\xi, \eta)\{1-|u-\xi|\}\{1-|v-\eta|\}d\xi d\eta.$$

On voit donc, d'une part, que la condition (21.2) est certainement satisfaite de la définition même de la fonction $f_1(x, y)$, et d'autre part, que la condition (21.3) est aussi satisfaite, grâce aux (21.6) et (21.5); car, on a

$$(21.7) \qquad |F_1(u, v)| \leqslant \frac{N}{(1+u^2)(1+v^2)}\int_{u-1}^{u+1}\int_{v-1}^{v+1}|F(\xi, \eta)|d\xi d\eta$$
$$< \frac{N}{(1+u^2)(1+v^2)}\left[\int_{u-1}^{u+1}\int_{v-1}^{v+1}|F(\xi, \eta)|^{\frac{p}{p-1}}d\xi d\eta\right]^{\frac{p-1}{p}} \qquad [p>1]$$
$$< \frac{N}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

Il est à remarquer ici que le résultat (21.3) pour le cas où $p=1$ est aussi atteint de la borne uniforme de la fonction $F(u, v)$.

Comme il vient d'être dit à propos de la fonction $g(x, y)$, la fonction $f_1(x, y)$ est nulle dans le rectangle $\begin{pmatrix} -U, & U \\ -V, & V \end{pmatrix}$. Donc cette fonction $f_1(x, y)$ satisfait à toutes les conditions énoncées dans notre lemme, excepté qu'elle n'est pas nécessairement nulle dans le rectangle de centre d'origine. Or cette réquisition est atteinte par une transformation simple, et $F_1(u, v)$ est seulement multipliée par un facteur de la forme $e^{i(uK+vL)}$, d'où il résulte que la codition (21.3) est aussi satisfaite. Notre lemme est aussi démontré.

22. Passons ensuite à la démonstration du théorème énoncé dans le dernier numéro. Supposons que la fonction $f(x, y)$ est nulle dans un domaine mais non identiquement nulle dans tout domaine $\begin{pmatrix}-\infty, \infty \\ -\infty, \infty\end{pmatrix}$. Alors il y a, en vertu du lemme précédent, une fonction $f_1(x, y)$ non équivalente à nulle, mais nulle dans un rectangle de centre d'origine, avec sa transformée de Fourier $F_1(u, v)$ vérifiant la relation

$$|F_1(u, v)| < \frac{N}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

Si donc on transforme le second membre de l'égalité

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u, v) e^{i(xu+yv)} du dv$$

par l'intégration par parties, on a

$$\frac{f_1(x, y)}{i^2 xy} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xu+yv)} du dv \int_u^{\infty}\int_v^{\infty} F_1(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

On voit donc que la fonction $\dfrac{f_1(x, y)}{i^2 xy}$ est identiquement nulle dans un domaine, et de plus, que sa transformée de Fourier peut s'écrire sous la forme

$$F_2(u, v) = \int_u^{\infty}\int_v^{\infty} F_1(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Et l'on a, en vertu de (21.7),

$$|F_2(u, v)| < A\int_{u-1}^{\infty}\int_{v-1}^{\infty} |F(\xi, \eta)| d\xi d\eta.$$

En posant donc

$$\phi(u, v) = -\log\int_{u-1}^{\infty}\int_{v-1}^{\infty} |F(\xi, \eta)| d\xi d\eta,$$

on a immédiatement, grâce à (21.1),

$$\int_2^{\infty}\int_2^{\infty} \phi(u, v)\frac{du}{u^2}\frac{dv}{v^2} = \infty.$$

Or on a

$$|F(u, v)| < Ae^{-\phi(u, v)} \qquad \begin{pmatrix} u \geqslant 2 \\ v \geqslant 2 \end{pmatrix}.$$

On voit donc, en vertu du théorème du n°19, que la fonction $\dfrac{f_1(x, y)}{i^2 xy}$ est identiquement nulle, et donc la fonction $f_1(x, y)$ l'est aussi.

Notre théorème est donc démontré.

Je suis heureux de pouvoir exprimer mon profond remerciement au professeur M. Tosizô Matumoto, au Maître qui a bien voulu lire mon manuscrit et qui m'a fait quelques remarques très utiles.