数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 24-29

数列 $(n\alpha + f(n))$ の discrepancy について

鹿児島国際大学　大久保　幸夫 (Yukio Ohkubo)
The International University of Kagoshima

1　導入

実数 x に対して，$\lfloor x \rfloor$ は x より小さい最大の整数を，$\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を，また $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ は x の小数部分を表すとする。更に，表記 $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ と $e(x) = \exp(2\pi i x)$ を使う。関係 $f \ll g$ または $f = O(g)$ は，ある絶対定数 C が存在して $|f| \le Cg$ が成り立つことを示す。まず，いくつかの discrepancy の定義，いくつかの性質，それとディオファンタス近似に関するある定義を述べる。

定義 1 ([2]). 実数列 $(x_n)_{n\ge1}$ の *L^2-discrepancy* $D_N^{(2)}(x_n)$ を次で定義する。

$$D_N^{(2)}(x_n) = \left(\int_0^1 R_N^2(x)dx\right)^{1/2},$$

ここで，$R_N(x) = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{[0,x)}(x_n)$，$\chi_{[0,x)}(x_n) = 1$ *if* $\{x_n\} \in [0,x)$，$\chi_{[0,x)}(x_n) = 0$ *otherwise*,
即ち，$R_N(x) = ($区間 $[0,x)$ に含まれる $\{x_n\}, n = 1,\dots,N$ の個数$)/N$.

通常の discrepancy は次で定義される。

定義 2 ([2]). 実数列 $(x_n)_{n\ge1}$ の *discrepancy* D_N は

$$D_N(x_n) = \sup_{0\le x\le1}|R_N(x)|.$$

$L^2 - discrepancy$ と通常の discrepancy の間の関係として次が知られている（H. Niederreiter, [4]）：

$$\frac{1}{\sqrt{12}}D_N^{3/2}(x_n) \le D_N^{(2)}(x_n) \le D_N(x_n).$$

Parseval の等式より，次の等式が得られる (Niederreiter, [4])：

$$\left(D_N^{(2)}(x_n)\right)^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\{x_n\} - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e(hx_n)\right|^2. \tag{1}$$

定義 3 ([3]). α を無理数とする。ある $K > 0$ が存在して，すべての正の整数 q に対して $\|\alpha q\| \ge K/q$ が成り立つとき，α は *constant type* であるという。一方，ある $c = c(\tau, \alpha) > 0$ が存在し，すべての正整数 q に対して，$\|\alpha q\| \ge c/q^\tau$ となる実数 τ の下限が η となるとき，α は *type* η であるという（上のような τ が存在しない時は *infinite type* であるという）。

注意：(1) 無理数 α が constant type $\Leftrightarrow$ 無理数 α が有界な部分商を持つ連分数である，すなわち，連分数展開 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ に対して $a_i \le C$ $(i \ge 1)$ 。(2) Dirichlet の定理によると，無理数の type η は $\eta \ge 1$ を満たす。(3) Roth の定理によると，あらゆる実代数的無理数は type $\eta = 1$ である。

1999 年，[5] において我々は次のことを示した。無理数 α が type η で β が非零実数ならば，あらゆる $\varepsilon > 0$ に対して，ある正定数 $C(\alpha, \beta)$ が存在し

$$D_N(\alpha n + \beta \log n) \le C(\alpha, \beta) N^{-2/(2\eta+1)+\varepsilon}$$

がいえる。また，α が constant type ならば，ある正定数 $C'(\alpha, \beta)$ が存在し

$$D_N(\alpha n + \beta \log n) \le C'(\alpha, \beta) N^{-2/3} \log N \tag{2}$$

がいえる。

一般に，つぎのことが知られている。任意の無限数列 (x_n) に対して，ある $c > 0$ が存在し無限に多くの N について

$$D_N^{(2)}(x_n) \ge c N^{-1} (\log N)^{1/2}$$

が成り立つ（Roth，[7]）。

無理数 α の連分数展開は有界な部分商を持つとする。そのとき，

$$D_N^{(2)}(\alpha n) = O(N^{-1} \log N) \tag{3}$$

が成り立ち，この評価は最良である（Niederreiter，[4]）。

1985 年 Proinov [6] は，α が有界部分商を持つ連分数に展開できれば，symmetrisized (αn)-列 $(y_n) = (\alpha, -\alpha, 2\alpha, -2\alpha, \dots)$ に対して

$$D_N^{(2)}(y_n) = O(N^{-1} (\log N)^{1/2})$$

がいえることを示した。すなわち，対称化によって discrepancy の評価が (3) と比較して $(\log N)^{1/2}$ だけよくなっていることがわかる。

一般に，symmetrisized (x_n)-列 (y_n) とは $y_{2n-1} = x_n$，$y_{2n} = -x_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ となる数列のことである。$\{-x_n\} = 1 - \{x_n\}$ であるから，N が偶数ならば，(1) の右辺における第 1 項が 0 となり，

$$\left(D_N^{(2)}(x_n)\right)^2 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e(hx_n) \right|^2 \tag{4}$$

が成り立つ。

2 諸結果

最初に symmetrisized $(\alpha n + \beta \log n)$-列 (y_n): $y_{2n-1} = \alpha n + \beta \log n$; $y_{2n} = -(\alpha n + \beta \log n)$ $(n = 1, 2 \dots)$ の L^2-discrepancy の上からの評価について考察する。この場合，(4) より，指数和の評価が $D_N^{(2)}$ の評価に直接つながる。

指数和の評価を得るために使ういくつかの補題をあげる。

補題 1 ([9, Lemma 4.4]). $f(x)$ を実数値関数，$f'(x)$ を区間 $[a,b]$ で単調な関数で，ある $0<\lambda<1$ が存在し，区間 $[a,b]$ 上で $|f'(x)|\le\lambda$ とする。このとき

$$\left|\int_a^b e(f(x))dx - \sum_{a<n\le b} e(f(n))\right| = O\left(\frac{1}{1-\lambda}\right).$$

補題 2 ([8, Lemma 4.7]). $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で 増加する連続導関数 $f'(x)$ を持つ実関数とする。$A=f'(a)$，$B=f'(b)$ と置く。このとき

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) = \sum_{A-\eta<\nu<B+\eta} \int_a^b e(f(x)-\nu x)dx + O(\log(B-A+2)),$$

ここで，η は 1 より小さい任意の正定数である。

補題 3 (Atkinson's saddle point lemma, [1]). $f(z)$ と $\varphi(z)$ は複素関数，$[a,b]$ は実区間で次の条件が満たされるとする。

(i) $a\le x\le b$ に対して $f(x)$ は実数値をとり，$f''(x)>0$,

(ii) ある $a\le x\le b$ で定義された正の微分可能関数 $\mu(x)$ が存在し，$a\le x\le b$, $|z-x|\le\mu(x)$ に対して $f(z)$ と $\varphi(z)$ は解析的である,

(iii) $[a,b]$ で定義された関数 $F(x)>0$, $\Phi(x)>0$ が存在し，$a\le x\le b$, $|z-x|\le\mu(x)$ に対して,

$$\varphi(z)\ll\Phi(x),\quad f'(z)\ll F(x)\mu^{-1}(x),$$

$$(f''(z))^{-1}\ll\mu^2(x)F^{-1}(x)$$

が成り立つ。

任意の実数 k に対して，$f'(x)+k$ が $[a,b]$ に零点 x_0 を持つとする。a, x_0, b における $f(x)$ と $\varphi(x)$ の値を添字 a, 0, b によってそれぞれあらわすとする。このとき

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \varphi(x)e(f(x)+kx)dx \\
&= \varphi_0(f_0'')^{-1/2}e(f_0+kx_0+1/8) \\
&+O\left(\int_a^b \Phi(x)\exp[-C|k|\mu(x)-CF(x)]dx+|d\mu(x)|\right)+O\left(\Phi_0\mu_0F_0^{-3/2}\right) \\
&+O\left(\Phi_a(|f_a'+k|+(f_a'')^{1/2})^{-1}\right)+O\left(\Phi_b(|f_b'+k|+(f_b'')^{1/2})^{-1}\right).
\end{aligned}$$

関数 $f'(x)+k$ が $a\le x\le b$ で零点を持たなければ，上の式の x_0 を含む項は削除される。

これらの補題を応用すると，次の指数和の評価を得ることができる。

定理 1. α を無理数，$\beta<0$ とする。N と $h>0$ を整数，$c_h=-\beta h/\{\alpha h\}$ とする。もし $1\le c_h\le N$ ならば

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} e(h(\alpha n+\beta\log n)) = \frac{(-\beta h)^{1/2}}{\{\alpha h\}}e(\beta h(\log c_h-1)+1/8) \\
&+O\left((-\beta h)^{1/2}\log(-\beta h+2)\right)+O\left(\{\alpha h\}^{-1}\right)+O\left((1-\{\alpha h\})^{-1}\right).
\end{aligned}$$

系 1. α は無理数, β は非負の実数, N と $h>0$ は整数とするとき,

$$\sum_{n=1}^{N} e(h(\alpha n+\beta\log n)) \ll \frac{(-\beta h)^{1/2}}{\{\alpha h\}} + (-\beta h)^{1/2}\log(-\beta h+2) + \frac{1}{1-\{\alpha h\}}.$$

もし $-\beta h/\{\alpha h\} > N$ ならば

$$\sum_{n=1}^{N} e(h(\alpha n+\beta\log n)) \ll (-\beta h)^{1/2}\log(-\beta h+2).$$

これらの結果より, 次の $D_N^{(2)}$ の上からの評価を得る。

定理 2. 無理数 α が *constant type* で, β が非零実数ならば, *symmetrisized* $(\alpha n+\beta\log n)$-列 (y_n) に対して

$$D_N^{(2)}(y_n) \ll (|\beta|+1)^{1/2}N^{-2/3}$$

が成り立つ。

注意：この評価式と (2) を比較すると, $\log N$ が消え, その分良くなっていることがわかる。

次に, $D_N^{(2)}$ の下からの評価を得るために $(\alpha n+\beta\log n)$ の別種の対称化を考える。

定理 3. $z_n = \alpha\lfloor (n+1)/2\rfloor + \beta(-1)^n\log\lfloor (n+1)/2\rfloor$, $n=1,2,\ldots$, すなわち

$$z_n = \alpha,\ \alpha,\ 2\alpha-\beta\log 2,\ 2\alpha+\beta\log 2,\ 3\alpha-\beta\log 3,\ 3\alpha+\beta\log 3,\ldots.$$

α が *type* η の無理数で, β が非零実数ならば, あらゆる $\varepsilon>0$ に対して, ある $C'(\eta,\varepsilon,\beta)>0$ が存在し, 無限に多くの自然数 N について

$$D_N^{(2)}(z_n) \geq C'(\eta,\varepsilon,\beta)N^{-3/(2\eta+2)-\varepsilon}$$

が成り立つ。

α が無理数で, β が非零実数ならば, 無限に多くの N について

$$D_N^{(2)}(z_n) \geq C''(\beta)N^{-3/4}$$

が成り立つ。

3 数値実験

最後に, いくつかの数値実験結果を述べる。そのために, L^2-discrepancy を explicit に表す次の公式を応用する。

もし, $0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\cdots\leq x_N\leq 1$ ならば,

$$(D_N^{(2)}(x_n))^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n-\frac{2n-1}{2N}\right)^2 + \frac{1}{12N^2}$$

が成り立つ (Niederreiter, [4])。

この等式を使い L^2-discrepancy を計算した。$D_N^{(2)}(\sqrt{2}n+\log n)$, $N=1,2,\ldots,1000$ と曲線 $y=\frac{1}{2}x^{-2/3}$, $y=\frac{1}{2}x^{-3/4}$ を描いたものが (図 1) である。また, 数列 $(\sqrt{2}n)$ と $(\sqrt{2}n+\log n)$ に対する L^2-discrepancy $D_N^{(2)}$, $N=1,2,\ldots,20000$ をグラフ化したものが (図 2) である。

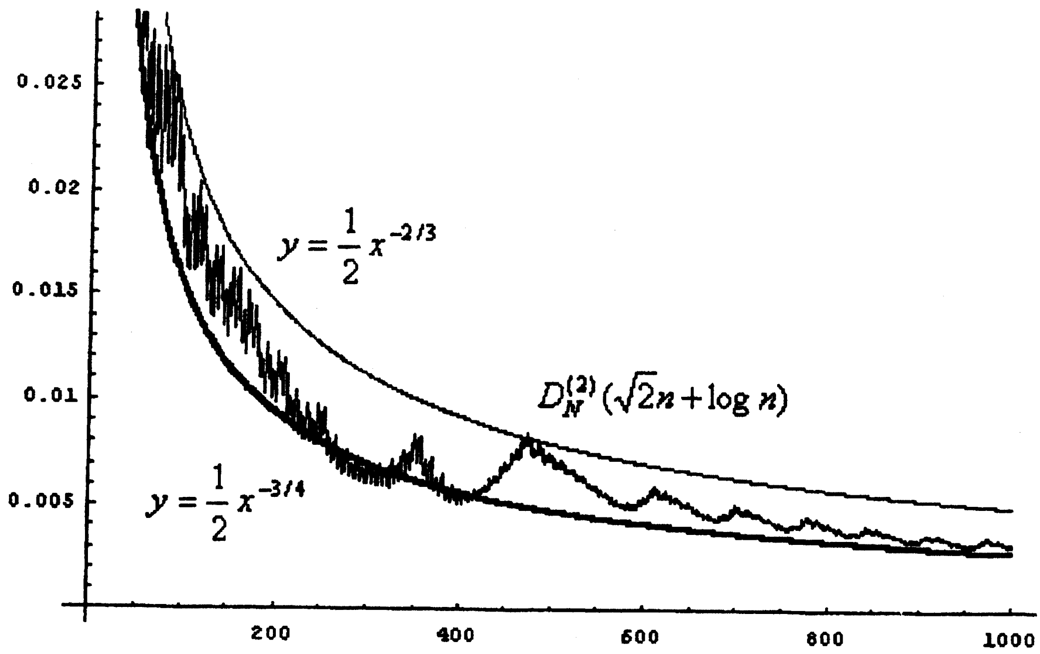

図 1: L^2-discrepancy for the first 1000 points

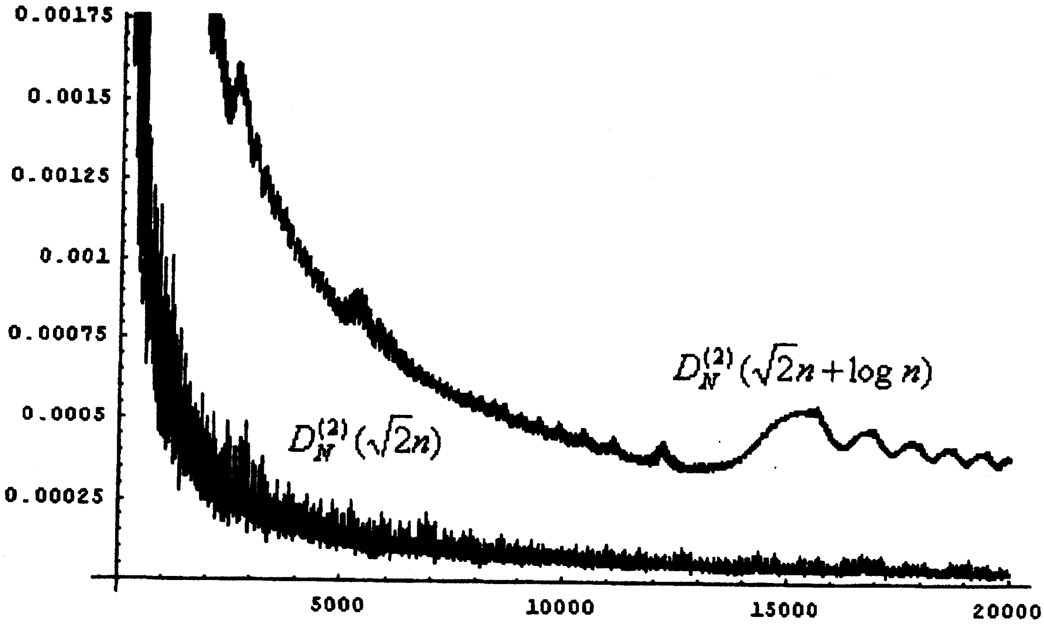

図 2: L^2-discrepancy for the first 20000 points

参考文献

[1] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta Math., 81 (1949), 353–376.

[2] M. Dromata and R. F. Tichy, Sequences, Discrepancies and applications, Springer (Berlin, 1997).

[3] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniform Distribution of Sequences, John Wiley and Sons, (New York, 1974).

[4] H. Niederreiter, Application of diophantine approximations to Numerical integration, Diophantine Approximation and Its Applications, in C. F. Osgood (Ed.), Academic Press, (New York, 1973), 129–199.

[5] Y. Ohkubo, Notes on Erdös-Turán inequality, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 67 (1999), 51-57.

[6] P. D. Proinov, On the L^2 discrepancy of some infinite sequences, Serdica, 11 (1985), 3–12.

[7] K. F. Roth, On irregularities of distribution, Mathematika, 1 (1954), 73–79.

[8] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, (Oxford, 1986).

[9] A. Zygmund, Trigonometric Series Vol.I, Cambridge University Press, (Cambridge, 1979).

Yukio Ohkubo: Department of Business Administration, The International University of Kagoshima, Kagoshima-shi, 891-0191, JAPAN,
e-mail:ohkubo@eco.iuk.ac.jp