

# Ueber die Dielektrizitätskonstante des magneto-aktiven ionisierten Gases.

von Isao Takahashi

(Eingegangen am 20ten März, 1941)

---

## Inhaltsübersicht.

Der vorliegende Aufsatz behandelt die hochfrequente Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit eines magneto-aktiven ionisierten Gases. Zunächst hat der Verfasser zwei Formelgruppen abgeleitet. In der ersten Gruppe ist der sog. Zusammenstoß eines Elektrons mit den Molekülen des Gases und in der zweiten die Laufzeit, die das Elektron braucht, den Versuchskondensatorraum zu durchlaufen behandelt. Für die zweite Gruppe haben wir vor allem Messungen von Dielektrizitätskonstanten ausgeführt, und dadurch gezeigt, dass die von dem Verfasser abgeleiteten Formeln auch experimentell ihre Gültigkeit haben. Unsere experimentellen Messuntersuchungen sind für die Wellenlänge 2.401m, 4m, 7.375m ausgeführt worden, dabei haben wir die Veränderung der Dielektrizitätskonstante in Form der Frequenzveränderung gemessen, die von der Veränderung der Kapazität abhängig ist. Unter Anwendung eines von dem Verfasser gemachten Messgerätes haben wir die Frequenzveränderung von Ordnung  $1/100000$  ermittelt.

Auf dem Wege der Ableitung der ersten Gruppe hat der Verfasser gezeigt, dass man, wenn man auch bei der Ableitung dieser Gruppe statt mittlerer Stosszahl  $S$  die Reibungskonstante  $f$  aus  $f = mS$  erwägt, noch ganz gleich wie in dem Fall ohne konstantes Magnetfeld das gleiche Ergebnis erzielen kann.

Und die zweite Gruppe kann unter der Annahme des konstanten Magnetfeldes  $O$  mit den Hollmann-Thomaschen Formeln übereinstimmen.

## Einleitung

Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen im ionisierten Gas und die mit ihr verknüpften Hochfrequenzcharakteristiken der Dielektrizitätskonstante und der Leitfähigkeit des ionisierten Gases sind bisher bereits

von vielen Forschern unternommen worden. (vgl. *Literatur.* (x 1, 2, 3, 4, 7, 11, 14, 15, 16, 17, 18 und 19); zwecks Vereinfachung benutzen wir im folgenden das Zeichen  $x$ )

Jedoch kann der Verfasser heutzutage leider noch nicht genügende Untersuchungen über die Hochfrequenzcharakteristiken des ionisierten Gases unter Einfluss eines konstanten Magnetfeldes sehen. Insbesondere sind über die Dielektrizitätskonstante noch fast keine bekanntgemachten, vertrauenswürdigen Arbeiten zu finden. Dieses Problem ist wahrscheinlich sehr interessant zu verfolgen, in Verbindung mit den Forschungen (x 5, 6, 21) nach Polarizationszuständen der aus der Heavyside-Schicht fallenden Raumwellen. Der vorliegende Aufsatz bezweckt eine theoretische und experimentelle Behandlung der Hochfrequenzcharakteristiken des der Wirkung eines konstanten Magnetfeldes ausgesetzten ionisierten Gases. Der Verfasser hofft, dass diese Arbeit zu den Forschungen auf diesem Gebiete einen Beitrag leisten möge.

Es ist eine bekannte Tatsache, dass bisher bei Berechnung des Hochfrequenzkonvektionsstromes in dem ionisierten Gas ohne Wirkung des konstanten Magnetfeldes eine Wechselwirkung des Elektrons mit den Molekülen des Gases als Zusammenstoß oder als Reibungsvorgang angenommen worden ist. Zwischen diessen beiden lautet eine kurze Beziehung:

$$f = mS$$

worin  $f$  die Reibungskonstante,  $S$  die mittlere Stoszzahl,  $m$  die Masse bedeutet.

Und bekanntlich ist die Wechselwirkung des Elektrons mit den Gasmolekülen unter Wirkung des konstanten Magnetfeldes bis heute lediglich als Reibungsvorgang angenommen worden. Indem wir aber dabei diese Wechselwirkung als Zusammenstoß annehmen, ist es uns gelungen, den Konvektionsstrom zu berechnen und uns gleichzeitig davon zu überzeugen, dass auch dabei die Beziehungsformel  $f = mS$  ihre Gültigkeit nicht verlieren kann. Durch Einführung dieses Ausdruckes des Konvektionsstromes in die Maxwellsche Grundgleichung haben wir allgemeine Formeln für die Dielektrizitätskonstante und die Leitfähigkeit erhalten. Um die Formel der Dielektrizitätskonstante unter jenen auch experimentell festzustellen, unternahmen wir folgende Versuche, bei denen nämlich derart angeordnet wurde, dass die Elektronen vom Glühfaden ausgehend zwischen den Elektroden eines Versuchskondensators durchlaufen und dass ferner das konstante Magnet-

feld in dieser Richtung wirken kann. Und daraus ist es ersichtlich, dass in diesem Fall das konstante Magnetfeld nicht den Gleichstrom der Elektronen, sondern lediglich die Elektronenbewegung beeinflusst, die durch das elektrische hochfrequente Feld des Kondensators hervorgerufen wird. Und dann, indem wir für die Intensitätsveränderung dieses konstanten Magnetfeldes die Kapazitätsveränderung des Kondensators in Form der davon abhängigen Frequenzänderung beobachteten, sind wir zum erwünschten Erfolg gelangt, wobei für die Hochfrequenzwellenlänge 2.401m, 4m, 7.375m das Frequenzveränderungsverhältnis  $10^{-5}$  betrug. Die vorliegende Messung erfolgte mit Sicherheit unter Anwendung des Exaktfrequenzmessers für Ultrahochfrequenzen, den der Verfasser hergestellt hat. (x 9. 10, 20)

Da bei diesem Versuche eine Laufzeit  $T$ , die das Elektron braucht, um zwischen den Kondensatorplatten durchzulaufen, berücksichtigt werden muss, haben wir auf gleichem Grunde wie bei den oben erwähnten Formeln aufs neue die  $T$  enthaltenden Formeln herausgeführt, mit welchen wir die Versuchsergebnisse miteinander verglichen haben. Nimmt man in diesen Formeln das konstante Magnetfeld  $H_0$  gleich 0 an, so können sie mit den Hollmann-Thomaschen Formeln übereinstimmen.

Ferner hatten Benner (x 12), Appleton (x 11) und Asami (x 16) die Leitfähigkeit des der Wirkung des konstanten Magnetfeldes ausgesetzten ionisierten Gases in der Form des Hochfrequenzverlusts gemessen. Benner berichtet, dass er, indem er die Gitter-Anode-Strecke einer Triode als Versuchskondensator verwendet und parallel zur Röhrenachse das Magnetfeld wirken liess, eine sog. Resonanzkurve erhielt, welche für eine gewisse Magnetfeldstärke den grössten Verlust aufweist. Asami erhielt in derselben Weise dasselbe Resultat. Aber seine grundsätzliche Zusammenfassung (x 16) lautet wie folgt. Er hat nämlich festgestellt, dass es hierbei wie bei Magnetronen einen gewissen Wert der Magnetfeldstärke gibt, wo eine erhebliche Abnahme des Stromes auftritt, und also dabei die Elektronenzahl in der Strecke ihre höchste Höhe erreicht und ferner, dass der eben besprochene grösste Verlust in der Nähe des der steilen Stromveränderung entsprechenden Magnetfeldes vorhanden ist. Bei erheblicher Veränderung der Wellenlänge findet er doch keine merkwürdige Verschiebung der Stelle des grössten Verlustes. Daraus schliesst er, dass der vorliegende Vorgang selbstverständlich keine magnetoionische Resonanz darstellt.

Appleton mass den Hochfrequenzverlust des den Versuchskondensator enthaltenden Lecherleitungssystems, indem er den Elektronenstrom zwischen den Platten des Versuchskondensators durchlaufen liess, in dessen Richtung das konstante Magnetfeld beeinflusst wurde. Und er erhielt eine Resonanzkurve für die Wellenlänge 5.46m, die die Veränderung der Hochfrequenzverluste des magnetoaktiven ionisierten Gases aufweist. Diese Kurve ist in Abb. 1 dargestellt, in welcher man bei  $H_0=20.5$  Gauss den grössten Verlust (x 11) findet. Hierbei hat Appleton aber die Elektronlaufzeit  $T$  zwischen den Platten des Versuchskondensators nicht berücksichtigt.

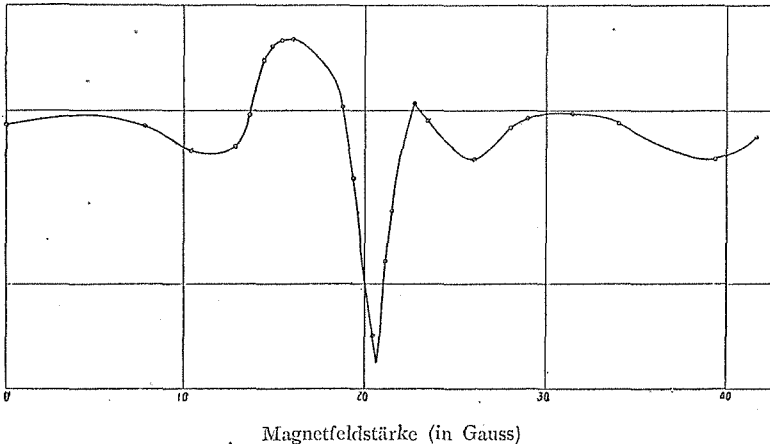


Abb. 1 Nachweis der magnetoionischen Resonanz (Appleton)

Ferner stellte er fest, dass andere Schwankungen als  $H_0=20.5$  Gauss in der Abbildung durch die unvollkommene Schirmung der bei Messung verwendeten Lecherleitung hervorgerufen werden müssten. Asami hat auch dasselbe Experiment gemacht und dadurch festgestellt, dass auch bei diesem Falle solche Kurven wie eine Resonanzkurve erhältlich sind, und dass sie die sekundären Vorgänge unvermeidlich enthalten, die die durch die Wirkung des Magnetfeldes bedingten Veränderungen der Elektronenanzahl und -verteilung hervorrufen (x 16)

### § 1. Elektronenbewegung.

Berechnen wir hier die Geschwindigkeit der Elektronenbewegung unter Wirkung des konstanten Magnetfeldes  $H_0$ , des konstanten elektrischen Feldes  $F_0$ , des elektrischen Wechselfeldes  $E=E_0 e^{j\omega t}$ . Die Bewegungsgleichung des Elektrons lautet:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e(\mathbf{F}_0 + \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}) + \frac{e}{c} [\mathbf{V}\mathbf{H}_0] \quad \dots\dots (1)$$

worin  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, t_0)$  die Geschwindigkeit bedeutet, mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{V}|_{t=t_0} = \mathbf{V}(t_0, t_0) = \mathbf{V}_0$ . Benutzt man folgende Bezeichnungen:

$$\mathbf{F}_0' = \frac{e}{m} \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{E}_0' = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}_0' = \frac{e}{cm} \mathbf{H}_0 \quad \dots\dots (2)$$

so gestaltet sich Gl. (1) folgendermassen:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_0' + \mathbf{E}_0' e^{j\omega t} + [\mathbf{V}\mathbf{H}_0'] \quad \dots\dots (1)'$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (1)' unmittelbar zu erhalten ist mit Schwierigkeiten verbunden; daher wollen wir statt Gl. (1)' eine allgemeine Lösung für die folgende Gleichung ermitteln, die durch das Differentiieren der Gleichung (1)' nach  $t$  abgeleitet worden ist.

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} = j\omega \mathbf{E}_0' e^{j\omega t} + \left[ \frac{d\mathbf{V}}{dt} \mathbf{H}_0' \right] \quad \dots\dots (1)''$$

Multipliziert man beide Seiten der Gl. (1)' mit  $\mathbf{H}_0'$  vektoriell, so lautet der Ausdruck:

$$\left[ \frac{d\mathbf{V}}{dt} \mathbf{H}_0' \right] = [\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0'] + [\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0'] e^{j\omega t} - \mathbf{H}_0' \mathbf{V} + (\mathbf{H}_0' \mathbf{V}) \mathbf{H}_0' \quad \dots\dots (3)$$

Ferner lautet das mit  $\mathbf{H}_0'$  multiplizierte skalare Produkt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} \mathbf{H}_0' \right) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{V}\mathbf{H}_0') = (\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0') + (\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0') e^{j\omega t} \\ \therefore (\mathbf{V}\mathbf{H}_0') &= (\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0') (t - t_0) + \frac{(\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0')}{j\omega} (e^{j\omega t} - e^{j\omega t_0}) \\ &\quad + (\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0') \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

Setzen wir Gl. (3), (4) in Gl. (1)'' ein, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} + \mathbf{H}_0'^2 \mathbf{V} &= \{ [\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0'] + (\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0' (t - t_0) \} \\ &\quad - \frac{(\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{j\omega} e^{j\omega t_0} + \left\{ j\omega \mathbf{E}_0' + [\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0'] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{j\omega} \right\} e^{j\omega t} + (\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0' \quad \dots\dots (5) \end{aligned}$$

Es genügt also dabei, wenn man die allgemeine Lösung der Gl. (5) sucht und folgende Anfangsbedingungen berücksichtigt:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}(t_0, t_0) &= \mathbf{V}_0 \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} \Big|_{t=t_0} &= \mathbf{F}_0' + \mathbf{E}_0' e^{j\omega t_0} + [\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0'] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (6)$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (5) folgt:

$$\begin{aligned} V(t, t_0) = & \mathbf{C}_1 e^{jH_0' t} + \mathbf{C}_2 e^{-jH_0' t} + \frac{[\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0'] + [\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0'] \mathbf{H}_0'(t-t_0)}{H_0'^2} \\ & - \frac{(\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{j\omega H_0'^2} e^{j\omega t_0} + \frac{j\omega \mathbf{E}_0' + [\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0'] + \frac{(\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{j\omega}}{H_0'^2 - \omega^2} e^{j\omega t} \\ & + \frac{(\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{H_0'^2} \end{aligned}$$

worin  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  die Integrationskonstanten bedeuten. Bestimmt man  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  derart, dass sie die Bedingung (6) befriedigen, so lautet der Ausdruck  $V(t, t_0)$ :

$$\begin{aligned} V(t, t_0) = & \mathbf{A}_1 e^{-jH_0' t_0} e^{jH_0' t} + \mathbf{A}_2 e^{jH_0' t_0} e^{-jH_0' t} \\ & + \frac{[\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0'] + (\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'(t-t_0)}{H_0'^2} + \mathbf{B}_1 e^{-j(H_0' - \omega)t_0} e^{jH_0' t} \\ & + \mathbf{B}_2 e^{j(H_0' + \omega)t_0} e^{-jH_0' t} + \frac{j\omega \mathbf{E}_0' + [\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0'] + \frac{(\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{j\omega}}{H_0'^2 - \omega^2} e^{j\omega t} \\ & - \frac{(\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{j\omega H_0'^2} e^{j\omega t_0} + \mathbf{D}_1 e^{-jH_0' t_0} e^{jH_0' t} \\ & + \mathbf{D}_2 e^{jH_0' t_0} e^{-jH_0' t} + \frac{(\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{H_0'^2} \quad \dots\dots(7) \end{aligned}$$

worin

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{F}_0'}{jH_0'} - \frac{(\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{jH_0'^3} - \frac{[\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0']}{H_0'^2} \right\} \\ \mathbf{A}_2 = & \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mathbf{F}_0'}{jH_0'} + \frac{(\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{jH_0'^3} - \frac{[\mathbf{F}_0' \mathbf{H}_0']}{H_0'^2} \right\} \\ \mathbf{B}_1 = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{E}_0'}{j(H_0' - \omega)} - \frac{(\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{jH_0'^2(H_0' - \omega)} - \frac{[\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0']}{H_0'(H_0' - \omega)} \right\} \\ \mathbf{B}_2 = & \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mathbf{E}_0'}{j(H_0' + \omega)} + \frac{(\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{jH_0'^2(H_0' + \omega)} - \frac{[\mathbf{E}_0' \mathbf{H}_0']}{H_0'(H_0' + \omega)} \right\} \\ \mathbf{D}_1 = & \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{V}_0 - \frac{(\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{H_0'^2} + \frac{[\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0']}{jH_0'} \right\} \\ \mathbf{D}_2 = & \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{V}_0 - \frac{(\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0') \mathbf{H}_0'}{H_0'^2} - \frac{[\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0']}{jH_0'} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

## § 2. Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit eines Magnetoaktiven ionisierten Gases.

Zunächst versuchen wir den Konvektionsstrom zu errechnen. (Der

Verfasser hat bereits seine Arbeit (x 8) darüber veröffentlicht.) Dazu nehmen wir wie folgt an:

- (i) Es ist nur das freie Elektron, welches zum Strom beiträgt.
- (ii) Die unter Einfluss der elektromagnetischen Wellen dem Elektron gegebene und zum Strom beitragende Geschwindigkeit kann beim Zusammenstoß des Elektrons mit den Molekülen des Gases in die Wärmebewegung übergehen, und somit gleich Null werden.
- (iii) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Elektron in  $t$ -Sekunden ohne Zusammenstoß geht, ist  $e^{-St}$ , wobei  $S$  die mittlere Stoßzahl bedeutet.

Somit lautet die Bewegungsgleichung des Elektrons, die von einem Zusammenstoß bis zum nächsten Zusammenstoß gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{V} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{j\omega t} + \frac{e}{cm}[\mathbf{V}\mathbf{H}_0] \quad \dots\dots(9)$$

worin  $\mathbf{V}$  eine zum Strom beitragende Geschwindigkeit und  $\mathbf{U}$  die Gesamtgeschwindigkeit bedeuten. Ist die Gesamtgeschwindigkeit  $\mathbf{U}$ , also  $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{V}$  so klein, dass man sie im Vergleich mit  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$  vernachlässigen kann, so geht (9) über in

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{E}'_0 e^{j\omega t} + [\mathbf{V}\mathbf{H}'_0] \quad \dots\dots(10)$$

Die Anfangsbedingung von  $\mathbf{V}$  ist der zweiten Annahme zu entnehmen, und zwar lautet  $\mathbf{V}(t_0, t_0) = 0$ . Daher ist die Lösung der Gleichung (10) ohne weiters aus den Gl. (7), (8) zu ermitteln unter der Voraussetzung, dass in § I  $\mathbf{F}_0 = 0$ ,  $\mathbf{V}_0 = 0$  ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t, t_0) = & \mathbf{B}_1 e^{-j(H'_0 - \omega)t_0} e^{jH'_0 t} + \mathbf{B}_2 e^{j(H'_0 + \omega)t_0} e^{-jH'_0 t} \\ & + \frac{j\omega \mathbf{E}'_0 + [\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'_0] + \frac{(\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'_0) \mathbf{H}'_0}{j\omega}}{H_0'^2 - \omega^2} e^{j\omega t} \\ & - \frac{(\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'_0) \mathbf{H}'_0}{j\omega H_0'^2} e^{j\omega t_0} \quad \dots\dots(11) \end{aligned}$$

worin

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_1 = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{E}'_0}{j(H'_0 - \omega)} - \frac{(\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'_0) \mathbf{H}'_0}{jH_0'^2(H'_0 - \omega)} - \frac{[\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'_0]}{H_0'(H'_0 - \omega)} \right\} \\ \mathbf{B}_2 = & \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mathbf{E}'_0}{j(H'_0 + \omega)} + \frac{(\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'_0) \mathbf{H}'_0}{jH_0'^2(H'_0 + \omega)} - \frac{[\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'_0]}{H_0'(H'_0 + \omega)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(12)$$

Bezeichnet man nun mit  $N$  die Gesamtanzahl der in Einheitsvolum enthaltenen Elektronen, und nimmt man  $dt_0$  so klein an, dass dasselbe Elektron nicht mehr als einmal auf Gasmoleküle treffen kann, so bet-

rägt die Anzahl der in  $dt_0$ -Sekunden an Zusammenstößen teilnehmenden Elektronen in Einheitsvolum  $NSdt_0$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Elektron während der  $(t-t_0)$ -Sekunde ohne Zusammenstoß geht, ist  $e^{-S(t-t_0)}$ . Somit wird die Anzahl der Elektronen, die zwischen  $t_0$  und  $t_0+dt_0$  den letzten Zusammenstoß abgespielt haben,  $NSe^{-S(t-t_0)}dt_0$  in Einheitsvolum. Bezeichnet man die Konvektionsstromdichte mit  $\mathbf{j}$ , so erhält man

$$\mathbf{j} = cNS \int_{-\infty}^t \mathbf{V}(t, t_0) e^{-S(t-t_0)} dt_0$$

d. h.

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \frac{e^2}{m}(S+j\omega) \mathbf{E} + \frac{e^3}{cm^2} N [\mathbf{E}\mathbf{H}_0] \\ & + \frac{e^4}{c^2 m^3} N \frac{(\mathbf{E}\mathbf{H}_0)\mathbf{H}_0}{(S+j\omega)\{(S+j\omega)^2 + \omega_0^2\}} \quad \dots\dots(13) \end{aligned}$$

wobei

$$\omega_0 = |H_0'| = \left| \frac{cH_0}{cm} \right|$$

Ferner ist die Gleichung (13) auf folgende Weise abzuleiten. Bezeichnet man mit  $\bar{\mathbf{V}}$  den mittleren Wert von  $\mathbf{V}$ , so lautet:

$$\bar{\mathbf{V}} = S \int_{-\infty}^t \mathbf{V} e^{-S(t-t_0)} dt_0 \quad \dots\dots(14)$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = & S \mathbf{V}(t, t) + S \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{V}}{dt} e^{-S(t-t_0)} dt_0 \\ & - S^2 \int_{-\infty}^t \mathbf{V} e^{-S(t-t_0)} dt_0 \end{aligned}$$

Setzt man  $\mathbf{V}(t, t) = 0$ , und Gl. (10) in diese Gleichung ein, so lautet die Gleichung für  $\bar{\mathbf{V}}$

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} + S\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{E}_0' e^{j\omega t} + [\bar{\mathbf{V}}\mathbf{H}_0'] \quad \dots\dots(15)$$

Beim Lösen der Gl. (15) unter der Annahme  $\bar{\mathbf{V}} \sim e^{j\omega t}$ , stimmt  $\mathbf{j}$ , der aus  $\mathbf{j} = Ne\bar{\mathbf{V}}$  gebildet wird, mit Gl. (13) überein. Aus dem oben Gesagten ist es verständlich, dass auch für den Fall  $\mathbf{H}_0 \neq 0$  eine Beziehung  $f = mS$  gültig sein kann. In der Gleichung (13)  $\mathbf{H}_0 = 0$  angenommen, so lautet

$$\mathbf{j} = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}}{S+j\omega} \quad \dots\dots(13)'$$



Dieses Resultat kann mit den für  $\mathbf{H}_0=0$  von anderen Forschern abgeleiteten Resultaten übereinstimmen. (x 14) Berechnet man unter Einsetzung von Gl. (13) in die Maxwell'sche Gleichung  $\text{rot}\mathbf{H}=\frac{\epsilon_0}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$  die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ , die Leitfähigkeit  $\sigma$ , so folgt

$$(\epsilon)=\begin{pmatrix} \epsilon_0-4\pi b_1+4\pi b_3 H_x^2 & 4\pi b_2 H_x & 4\pi b_3 H_x H_y & -4\pi b_2 H_y+4\pi b_3 H_x H_z \\ -4\pi b_2 H_x+4\pi b_3 H_x H_y & \epsilon_0-4\pi b_1+4\pi b_3 H_y^2 & 4\pi b_2 H_x+4\pi b_3 H_y H_z \\ 4\pi b_2 H_y+4\pi b_3 H_x H_z & -4\pi b_2 H_x+4\pi b_3 H_y H_z & \epsilon_0-4\pi b_1+4\pi b_3 H_z^2 \\ \dots\dots \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$(\sigma)=\begin{pmatrix} a_1-a_3 H_x^2 & a_2 H_x-a_3 H_x H_y & -a_2 H_y-a_3 H_x H_z \\ -a_2 H_x-a_3 H_x H_y & a_1-a_3 H_y^2 & a_2 H_x-a_3 H_y H_z \\ a_2 H_y-a_3 H_x H_z & -a_2 H_x-a_3 H_y H_z & a_1-a_3 H_z^2 \\ \dots\dots \end{pmatrix} \quad (18)$$

worin  $H_x, H_y, H_z$  die  $x-, y-, z$ -Komponente von  $\mathbf{H}_0$  bedeutet, und

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{NS(\omega^2+S^2+\omega_0^2)\frac{e^2}{m}}{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2} \\ a_2 &= \frac{-N(\omega^2-S^2-\omega_0^2)\frac{e^3}{cm^2}}{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2} \\ a_3 &= \frac{NS(3\omega^2-S^2-\omega_0^2)\frac{e^4}{c^2m^3}}{(S^2+\omega^2)\{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2\}} \\ b_1 &= \frac{N(\omega^2+S^2-\omega_0^2)\frac{e^2}{m}}{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2} \\ b_2 &= \frac{-2NS\frac{e^3}{cm^2}}{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2} \\ b_3 &= \frac{N(\omega^2-3S^2-\omega_0^2)\frac{e^4}{c^2m^3}}{(S^2+\omega^2)\{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{N(\omega^2+S^2-\omega_0^2)\frac{e^2}{m}}{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2} \\ b_2 &= \frac{-2NS\frac{e^3}{cm^2}}{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2} \\ b_3 &= \frac{N(\omega^2-3S^2-\omega_0^2)\frac{e^4}{c^2m^3}}{(S^2+\omega^2)\{(\omega^2-S^2-\omega_0^2)^2+4S^2\omega^2\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

Nimmt man einfachheitshalber den Fall  $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}_0$ , wobei  $\mathbf{E}(E, \phi, \phi), \mathbf{H}_0(\phi, H_0, \phi)$  bestehen, so lauten  $\epsilon, \sigma$  in der  $\mathbf{E}$ -Richtung:

$$\epsilon = \epsilon_0 - 4\pi b_1$$

$$\sigma = a_1$$

d. h.

$$\epsilon = \epsilon_0 - \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) + S^2}{\{(\omega + \omega_0)^2 + S^2\} \{(\omega - \omega_0)^2 + S^2\}}$$

$$\sigma = \frac{NSe^2}{m} \frac{\omega^2 + \omega_0^2 + S^2}{\{(\omega + \omega_0)^2 + S^2\} \{(\omega - \omega_0)^2 + S^2\}}$$

$$\sigma \approx \frac{NSe^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{m(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (\text{weil } S^2 \ll \omega^2, (\omega + \omega_0)^2, (\omega - \omega_0)^2)$$

Die Annäherungsformel von  $\sigma$  fällt mit der von Appleton benutzten zusammen.

Schreibt man jetzt  $\frac{S}{\omega} = a, \frac{\omega_0}{\omega} = x$

so folgt

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 + \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2} \frac{(x+1)(x-1) - a^2}{\{(x+1)^2 + a^2\} \{(x-1)^2 + a^2\}} \\ \sigma &= \frac{NSe^2}{m\omega^2} \frac{x^2 + 1 + a^2}{\{(x+1)^2 + a^2\} \{(x-1)^2 + a^2\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

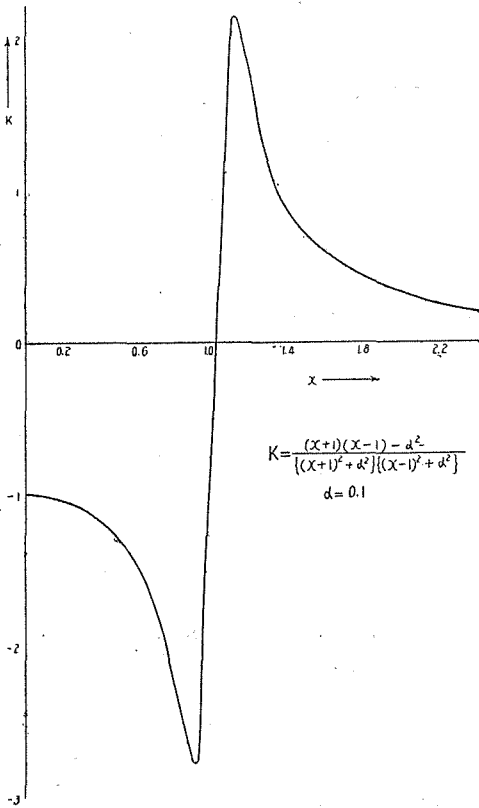


Abb. 2

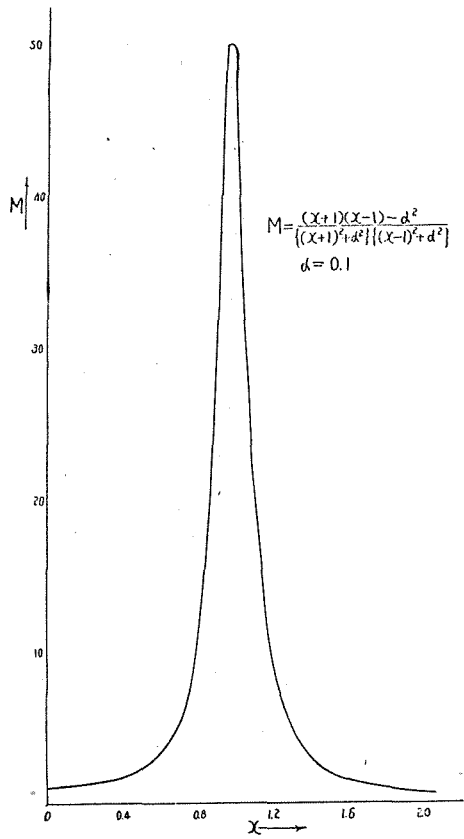


Abb. 3

Zeichnet man die Kurven der folgenden zwei Funktionen von  $x$ , so erhält man Abb. 2, und 3 (wobei  $a=0.1$ )

$$\left. \begin{aligned} K(x) &= \frac{(x+1)(x-1) - a^2}{\{(x+1)^2 + a^2\}\{(x-1)^2 + a^2\}} \\ M(x) &= \frac{x^2 + 1 + a^2}{\{(x+1)^2 + a^2\}\{(x-1)^2 + a^2\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

Abb. 2 und 3 stellen die von  $H_0$  abhängigen Veränderungen von  $\epsilon$ ,  $\sigma$  dar.

§ 3. Einflüsse des parallel zu den Elektroden eines Plattenkondensators durchlaufenden Elektronenstromes.

Angenommen, der Elektronenstrom fliesse zwischen den Platten

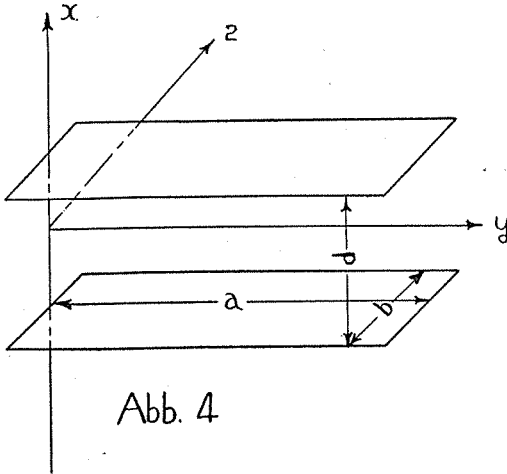


Abb. 4

des in Abb. 4 dargestellten Plattenkondensators in Richtung der  $Y$ -Achse durch,  $E$  wirke in Richtung der  $X$ -Achse,  $F_0, H_0$  in Richtung der  $Y$ -Achse. Berechnen wir aus den Gl. (7) und (8) die  $X$ -Komponente der Geschwindigkeit eines Elektrons, das in einem Augenblick  $t=t_0$  in den Kondensatorraum hineingetreten ist, so lautet sie:

$$\begin{aligned} V_x(t, t_0) &= \frac{1}{2} \frac{E_0'}{j(\omega_0 - \omega)} e^{-j(\omega_0 - \omega)t_0} e^{j\omega_0 t} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{-E_0'}{j(\omega_0 + \omega)} e^{j(\omega_0 + \omega)t_0} e^{-j\omega_0 t} \\ &+ \frac{j\omega E_0'}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

worin

$$\omega_0 = |H_0'| = \left| \frac{eH_0}{cm} \right| \dots\dots(24)$$

Bezeichnet man mit  $n$  die Anzahl des Elektrons, das in Einheitszeit in den Kondensatorraum eintreten kann, so kann der im Kondensator hervorgerufene Hochfrequenzstrom durch die folgende Gleichung ausgedrückt werden ( $x$  23):

$$J = \int_{t-T}^t \frac{ncV_x}{d} dt_0 - \frac{ncS}{d} \quad \dots\dots(25)$$

worin  $T$  die Laufzeit des Elektrons durch den Kondensatorraum bedeutet, und  $S = \left| \int_{t_0}^{t_0+T} V_x(t, t_0) dt \right|$  die X-Komponente der Elektronenverschiebung bei  $Y=a$ . Aus der Gl. (23) folgt

$$J = \frac{nc^2 E_0 e^{j\omega t}}{md} \left\{ \frac{1 - \frac{\omega}{\omega_0} e^{-j(\omega - \omega_0)T}}{2(\omega - \omega_0)^2} + \frac{1 + \frac{\omega}{\omega_0} e^{-j(\omega_0 + \omega)T}}{2(\omega + \omega_0)^2} + \frac{j\omega T}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\}$$

Drückt man jetzt den Flächeninhalt der Kondensatorplatten mit  $ab$  aus, so folgt die Stromdichte

$$\frac{J}{ab} = \frac{nc^2 E_0 e^{j\omega t}}{abdm} \left[ \left\{ \frac{1 - \frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega - \omega_0)T}{2(\omega - \omega_0)} + \frac{1 + \frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega + \omega_0)T}{2(\omega + \omega_0)^2} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} + j\omega \left\{ \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{2\omega_0(\omega - \omega_0)^2} - \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{2\omega_0(\omega + \omega_0)^2} + \frac{T}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} \right] \quad \dots\dots(26)$$

∴

$$\sigma = \frac{nc^2}{abdm} \left\{ \frac{1 + \frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega - \omega_0)T}{2(\omega - \omega_0)^2} + \frac{1 + \frac{\omega_0}{\omega} \cos(\omega + \omega_0)T}{2(\omega + \omega_0)^2} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} \quad \dots\dots(27)$$

und

$$\Delta\epsilon = \frac{4\pi nc^2 T}{abdm} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{2\omega_0 T(\omega - \omega_0)^2} - \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{2\omega_0 T(\omega + \omega_0)^2} \right\} \quad \dots\dots(28)$$

Bezeichnet man in der Gleichung (28) mit  $N$  eine mittlere Elektronendichte, so folgt

$$N = \frac{nT}{dbd} \quad \dots\dots(29)$$

Wenn die Elektronengruppe selbst keinen Fluss, d. h. hinreichend grosse

Laufzeit hat, so folgt

$$\Delta\epsilon = \frac{4\pi N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Dies kann mit dem bei Gl. (21) unter der Annahme  $S=0$  d. h.  $a=0$  erreichbaren Resultat übereinstimmen. Ueberdies bei Gl. (27), (28), angenommen,  $H_0=0$  d. h.  $\omega_0=0$  so erhält man

$$\sigma = \frac{N e^2}{m\omega} \left\{ \frac{2(1 - \cos \omega T)}{\omega T} - \sin \omega T \right\} \dots\dots(27)'$$

$$\Delta\epsilon = \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2} \left\{ \frac{2 \sin \omega T}{\omega T} - (1 + \cos \omega T) \right\} \dots\dots(28)'$$

Die Gleichungen (27)', (28)' stimmen mit den Höllmann-Thomaschen Formeln (x 22) überein.

Schreibt man Gl. (28) um, so folgt

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon = & \frac{4\pi N e^2 T}{m\omega_0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\omega_1 T} \left( 1 - \frac{\sin \omega_1 T}{\omega_1 T} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_2 T} \left( 1 - \frac{\sin \omega_2 T}{\omega_2 T} \right) \right\} \dots\dots(30) \end{aligned}$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 - \omega \\ \omega_2 &= \omega_0 + \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

Schreibt man Gl. (27) um, so folgt

$$\sigma = \frac{N e^2 T \omega}{m\omega_0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \cos \omega_1 T}{(\omega_1 T)^2} - \frac{1 - \cos \omega_2 T}{(\omega_2 T)^2} \right\} \dots\dots(32)$$

Die Funktionen, die man in den Ausdrücken von  $\Delta\epsilon$ ,  $\sigma$  findet,

$$\left. \begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{X} \left( 1 - \frac{\sin X}{X} \right) \\ G(X) &= \frac{1}{X^2} (1 - \cos X) \end{aligned} \right\} \dots\dots(33)$$

stellen die Kurven (Abb. 5, 6) dar. Der Verlauf von  $\Delta\epsilon$  mit  $H_0$  kann durch Ermitteln einer Summe der zwei  $\frac{1}{\omega_0} F(X)$ , die für  $X$  eine Differenz  $2\omega T$  besitzen, erzielt werden. Der Verlauf von  $\sigma$  mit  $H_0$  kann durch die Differenz der zwei  $\frac{1}{\omega_0} G(X)$ , die für  $X$  eine Differenz  $2\omega T$  besitzen, ermittelt werden.

Wie aus Abb. 5 ersichtlich, liegen das Maximum und das Minimum von  $F(X)$  in  $X=\pi$  und  $X=-\pi$  vor. Und ferner zeigt die Abbildung, dass beim Wert über  $X=\frac{5}{2}\pi$  die Änderung von  $F(X)$  sehr langsam wird. Damit kann bei genügend grossem Wert  $2\omega T$ , der

Verlauf von  $\Delta\epsilon$  mit  $H_0$  in der Hauptsache durch  $\frac{1}{\omega_0} F(\omega_1 T)$  bestimmt werden.

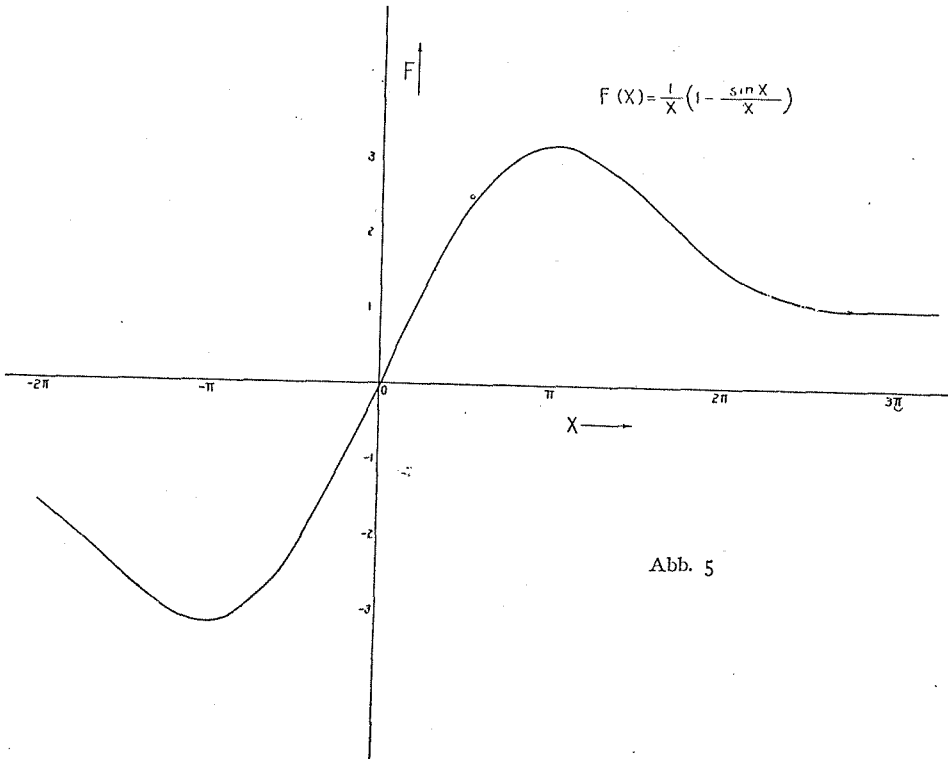


Abb. 5

#### § 4. Messmethoden und ihre Theorien.

Zunächst lässt man die Elektronen, die von dem Glühfaden emittiert werden, zwischen den Platten eines Versuchskondensators durchlaufen. Die elektrische Kapazität des Kondensators ändert sich entsprechend der Veränderung der Dielektrizitätskonstante, die durch die Änderung des in Richtung dieses Elektronenstromes wirkenden konstanten Magnetfeldes hervorgerufen wird. Wenn man damit diesen Kondensator als ein Teil des Schwingkondensators im Schwingungskreis arbeiten lässt, so erhält man der Änderung der Dielektrizitätskonstante entsprechend eine Veränderung der Schwingfrequenz.

Wir haben eine spezielle Röhre, die den oben gesprochenen Versuchskondensator und die Glühelktronenquelle enthält, hergestellt. An die Enden der kapazitiven Lecherleitung, die parallel zu der Sch-

wingungsspule des Schwingkreises angeschaltet ist, haben wir diesen Versuchskondensator angeschlossen. Die Veränderungen der Schwingfrequenz wurden bei veränderten Stärken des in der Richtung des Elektronenstromes angelegten konstanten Magnetfeldes unter Verwendung eines von dem Verfasser gemachten Exaktfrequenzmessers für Ultrahochfrequenzen gemessen.

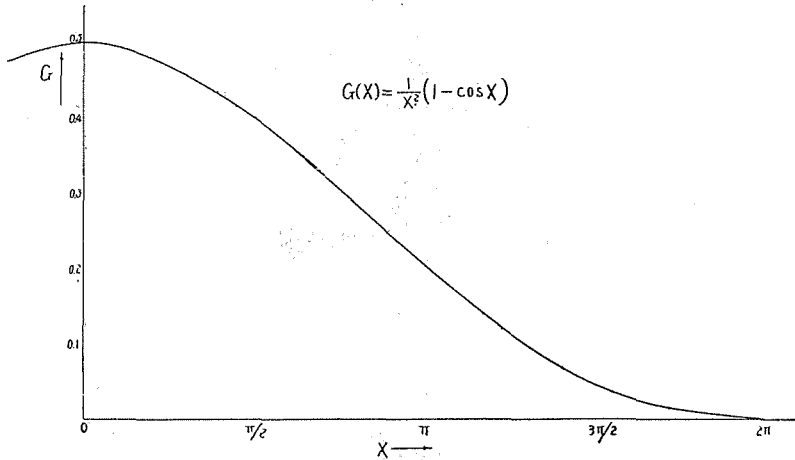


Abb. 6.

Abb. 7 zeigt das Bild der oben erwähnten Spezialröhre. All ihre Elektroden bestehen aus nichtmagnetischem Stoffe. Abb. 8 zeigt das Schaltbild des Experimentes, Abb. 9 und 10 seine Anordnungen. In Abb. 8 bezeichnet man mit  $L_1$  die Schwingungsspule, mit  $R_1$  eine Schwingröhre UN-955, mit  $L_2$  kapazitive Lecherleitung, mit  $R_2$  die Spezialröhre, mit  $L_3$  die Spulen, die ein veränderliches Magnetfeld herstellen, das in Richtung des Elektronenstromes wirkt. Die Elektrodenanlage der Spezialröhre ist in Abb. 8 dargestellt, wobei der Flächeninhalt der Platte des Versuchskondensators  $25 \times 2 \text{ cm}^2$  und dessen Plattenstrecke 0.8 cm beträgt. Die Elektronen, die vom Glühfaden  $H$  emittiert werden, können von der Spannung  $-E_g$  des Steuergitters  $g_1$  in der Menge gesteuert werden. Sie können dann von der ersten Anode  $A_1$  beschleunigt, ferner vom Konzentrationsgitter  $g_2$  zusammengebündelt in den Versuchskondensatorraum hineinlaufen und auf der zweiten Anode  $A_2$  landen.

Bei vorliegender Messung, um die Einflüsse des konstanten Magnetfeldes auf den Elektronenstrom in der Schwingröhre UN-955 zu vermeiden, haben wir die Lecherleitung benutzt, die ihren Elektronenstrom vom Magnetfeld abständiglich fern zu halten erlaubt. Bez-

eichnet man nun mit  $\lambda$  die Wellenlänge, mit  $l$  die Länge der Lecherleitung, so kann die Eingangsimpedanz  $Z_0$  der die Ende-Abschlussimpedanz  $Z$  besitzenden Lecherleitung durch den Ausdruck gezeigt werden,

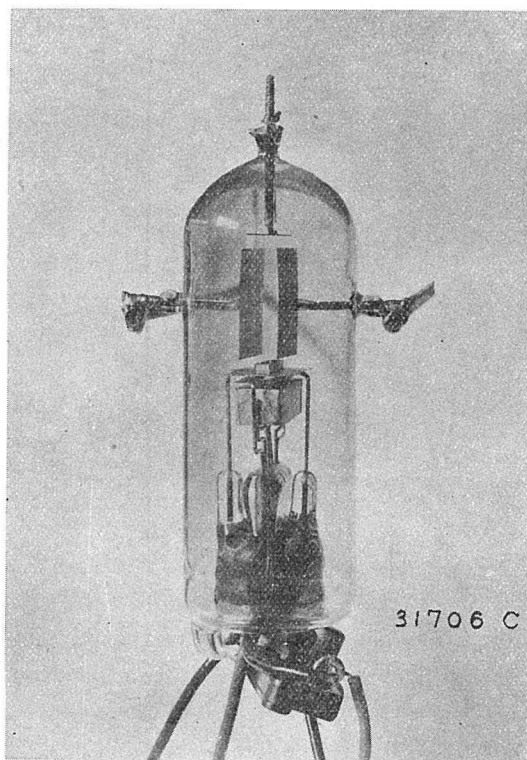


Abb. 7 Spezialröhre

$$Z_0 = W \frac{\left(1 + \frac{Z}{W}\right)e^{kl} - \left(1 - \frac{Z}{W}\right)e^{-kl}}{\left(1 + \frac{Z}{W}\right)e^{kl} + \left(1 - \frac{Z}{W}\right)e^{-kl}}$$

worin  $W$  den Wellenwiderstand der Lecherleitung,  $k$  die Fortpflangungskonstante bedeuten.

$$k = \alpha + jm, \quad \alpha = \frac{R}{2W}, \quad m = \frac{2\pi}{\lambda}$$

worin  $\alpha$  die Dämpfungskonstante,  $m$  der Winkelmaß,  $R$  der Widerstand pro Längen-einheit ist. Erwägt man jetzt den Fall  $\alpha=0$  und  $Z = \frac{1}{j\omega C}$  des kondensators  $C$ , so lautet:



$$Z_0 = jW \frac{\sin ml - \frac{1}{W\omega C} \cos ml}{\cos ml + \frac{1}{W\omega C} \sin ml}$$

Somit, wenn  $\sin ml < \frac{1}{W\omega C} \cos ml$  für  $ml$  im ersten Quadrant gültig ist, so wird  $Z_0$  kapazitiv. Verändert man den Wert von  $C$  in der oben geschriebenen Gleichung, so folgt:

$$\Delta Z_0 = jW \frac{W\omega c}{(W\omega C \cos ml + \sin ml)^2} \frac{\Delta C}{C} \quad \dots\dots(34)$$

Führt man die Ersatzkapazität  $C'$  von  $Z_0$  ein,

$$Z_0 = \frac{1}{j\omega C'} \quad \therefore \Delta Z_0 = -Z_0 \frac{\Delta C'}{C'}$$

$$\therefore \Delta Z_0 = -jW \frac{W\omega C \sin ml - \cos ml}{W\omega C \cos ml + \sin ml} \frac{\Delta C'}{C'} \quad \dots\dots(35)$$

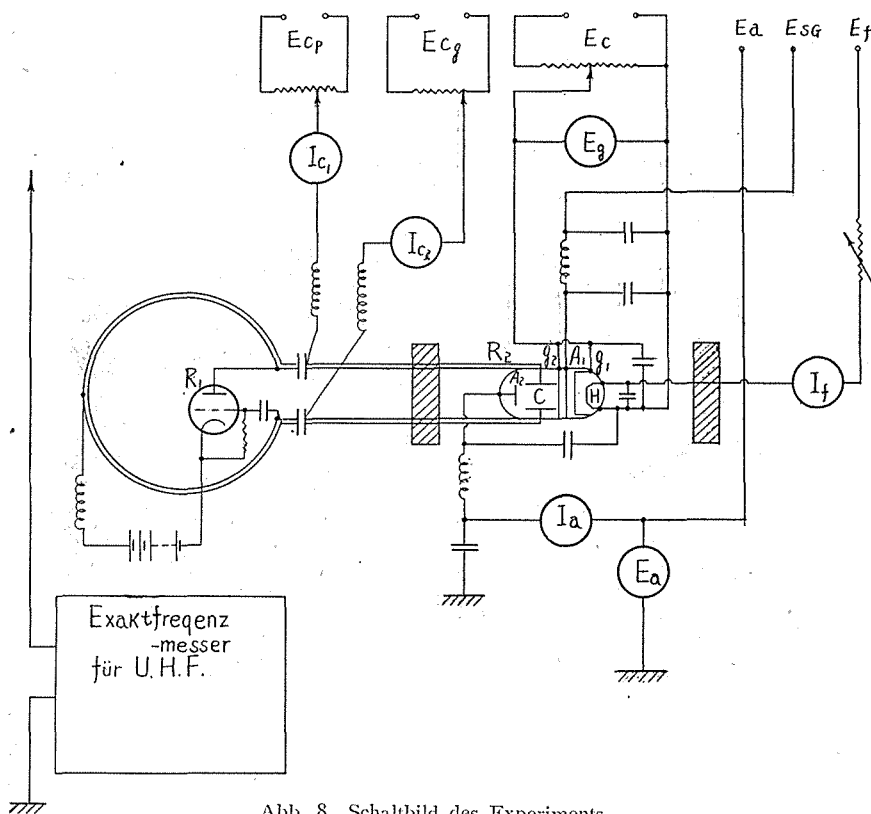


Abb. 8 Schaltbild des Experiments

aus Gl. (34), (35) folgt:

$$\frac{\Delta C'}{C'} = \frac{W\omega C}{(W\omega C \cos ml + \sin ml)(\cos ml - W\omega C \sin ml)} \times \frac{\Delta C}{C} \quad \dots\dots(36)$$

Das Frequenzveränderungsverhältnis des aus elektrischer Kapazität und zu dieser parallel liegender Induktivität bestehenden Schwingkreises hat folgende Beziehung zu dem Kapazitätsveränderungsverhältnis.

$$\frac{\Delta C'}{C'} = - \frac{2\Delta f}{f}$$

Setzt man darin Gl. (36) ein, so

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{C} &= \frac{(W\omega C \cos ml + \sin ml)(W\omega C \sin ml - \cos ml)}{W\omega C} \frac{2\Delta f}{f} \\ &= A \frac{\Delta f}{f} \quad \dots\dots(37) \end{aligned}$$

Somit steht das Veränderungsverhältnis der Frequenz im Verhältnis zu dem der Kapazität.

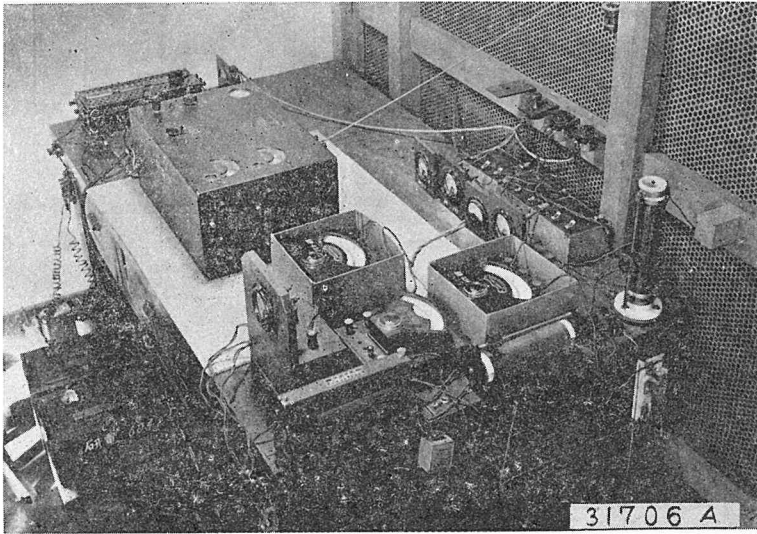


Abb. 9 Anordnung des Experiments I

Ferner um das Bündel der Elektronenströme noch vollkommen zu machen, haben wir, wie in Abb. 8 dargestellt, über die Lecherleitung den Versuchskondensatorplatten negative Vorspannungen gelegt. Auf diese Weise haben wir die Veränderung der Dielektrizitätskonstante, die vom Magnetfeld beeinflusst wird, in die von der Kapazitäts-

änderung abhängige Frequenzänderung verwandelt, und dadurch ist es uns gelungen, die Frequenzänderung unter Benutzung des Exaktfrequenzmessers für U. H. F. zu messen.

In Abb. 7 zeigt die oberste Elektrode die zweite Anode  $A_2$ , unter welcher sich ein Versuchskondensator  $C$ , und darunter wieder das Konzentratronsgitter  $g_2$ , die erste Anode  $A_1$ , das Steuergitter  $g_1$  und der Glühfaden  $H$  befinden. Ein grosses Messgerät, das die Leser links in Abb. 9 sehen, ist der oben häufig genannte Exaktfrequenzmesser für Ultrahochfrequenzen, Abb. 10 veranschaulicht, wie die Spezialröhre zwischen den Magnetpolen angeordnet ist, und wie die Lecherleitung an die Klemmen des Versuchskondensators der Spezialröhre angeschlossen ist.

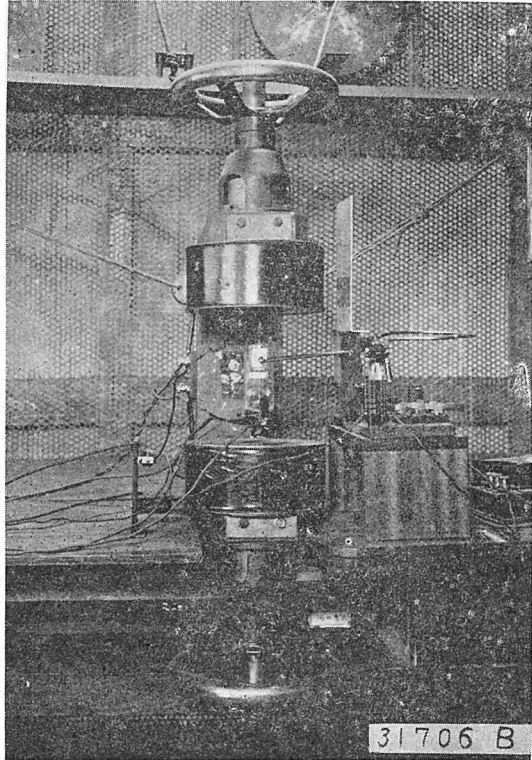


Abb. 10 Anordnung des Experiments 2

Um nun dem Bedürfnis der Ueberlegung der nachstehend zu erwähnenden Messergebnisse zu entsprechen, wollen wir hierbei eine Annäherungsformel für die Elektronenlaufzeit einführen. Der Einfachheit

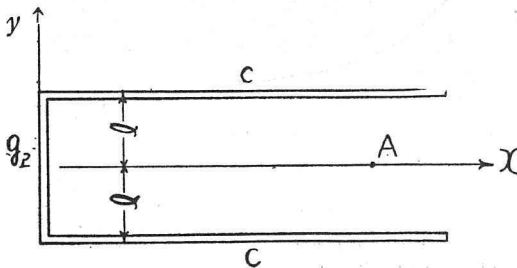


Abb. 11

halber nehmen wir vorzugsweise einen in Abb. 7 dargestellten, aus  $g_2$ - $C$ - $A_2$  bestehenden Raum der Spezialröhre, wie in Abb. 11, als zweidimensionell an.

Unter der Voraussetzung, dass die Raum-

ladung Null ist, befriedigt das elektrische Potential in diesem Raum die Beziehung :

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Für  $\varphi = X(x)Y(y)$  folgen :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= a^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -a^2 \end{aligned} \right\}$$

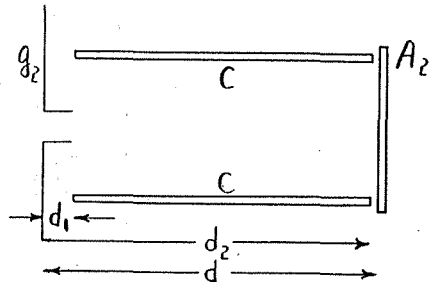


Abb. 12

Die Ursache dazu, dass man in der ersten Gleichung  $a^2$  schreibt, besteht darin, dass die Lösung in der  $x$ -Richtung aperiodisch sein soll. Wenn man nach dem Ablösen dieser Gleichungen die Grenzbedingungen  $X=0$  für  $x=0$  benutzt, so erhält man

$$\varphi = C(e^{ax} - e^{-ax}) \cos(\alpha y + a)$$

Ferner benutzt man  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$  für  $y=0$  und  $\varphi=0$  für  $y=l$ , folgen

$$\alpha = 0, \quad a = \frac{1}{l} \cos^{-1} 0$$

$$\therefore \varphi = C(e^{ax} - e^{-ax}) \cos(\alpha y)$$

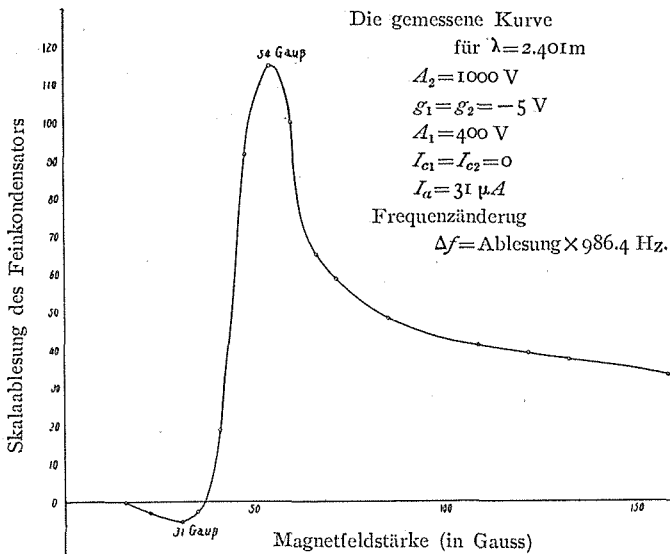


Abb. 13

Dann folgt eine Bewegungsgleichung eines sich längs der  $x$ -Achse bewegenden Elektrons

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=0}$$

$$\therefore \frac{d^2 x}{dt^2} = k(e^{ax} + e^{-ax}), \quad k = \frac{e}{m} a C \quad \dots\dots(38)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2k}{a}} \sqrt{e^{ax} - e^{-ax} + K}$$

$$K = \frac{a}{2k} V_0^2 \quad \dots\dots(39)$$

worin  $V_0$  die Anfangsgeschwindigkeit für  $x=0$  bedeutet. Die Laufzeit  $T$  eines im Versuchskondensatorraum stattfindenden Elektrons kann unter Anwendung der Gl. (39) auf den in Abb. 12 dargestellten wirklichen Aufbau ermittelt werden.

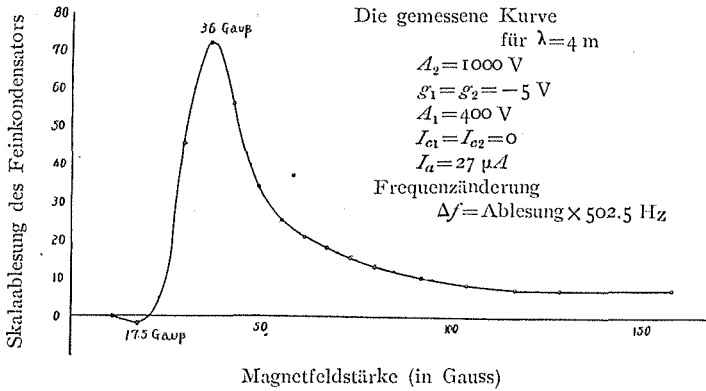


Abb. 14

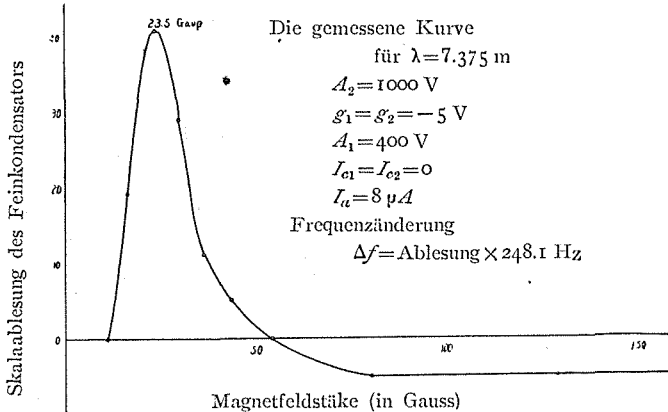


Abb. 15

$$T = \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt{\frac{a}{2k}} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{\sqrt{e^{ax} - e^{-ax} + K}}$$

In der Praxis ist jedoch die genaue Berechnung von  $V_0$  immer mit Schwierigkeiten verbunden; daher wollen wir zunächst die untere und obere Grenze von  $T$  betrachten. Diese sind  $T_1$  für  $V_0=0$  und  $T_2$ , die für die denkbar grösste Anfangsgeschwindigkeit stattfindet. Der wirkliche Wert  $T$  muss zwischen diesen zwei Grenzen liegen.

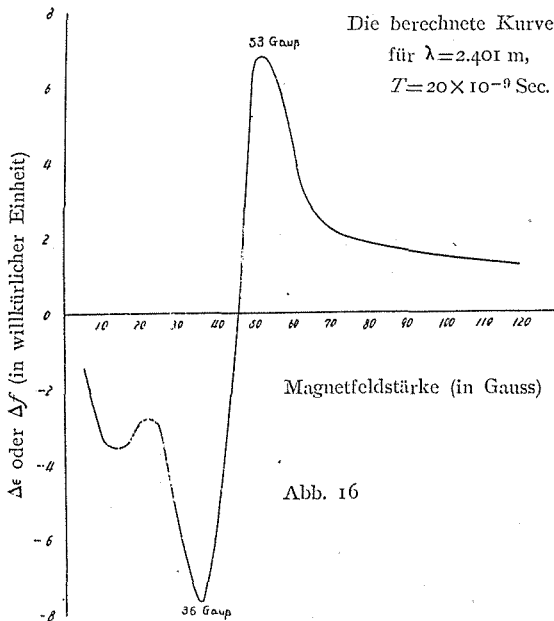
$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{a}{2k}} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{\sqrt{e^{ax} - e^{-ax}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2ak}} \left( 2e^{-\frac{1}{2}ad_1} - 2e^{-\frac{1}{2}ad_2} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}ad_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}ad_2} \right) \dots\dots(40) \end{aligned}$$

Wenn man zum Berechnen von  $T_2$   $e^{ax}=y$  setzt und  $K \gg y > 1$  als praktisch annimmt, dann erhält man das folgende Ergebnis

$$T_2 = \sqrt{\frac{a}{2kK}} (d_2 - d_1) \dots\dots(41)$$

Auf diese Weise muss der wirkliche Wert  $T$

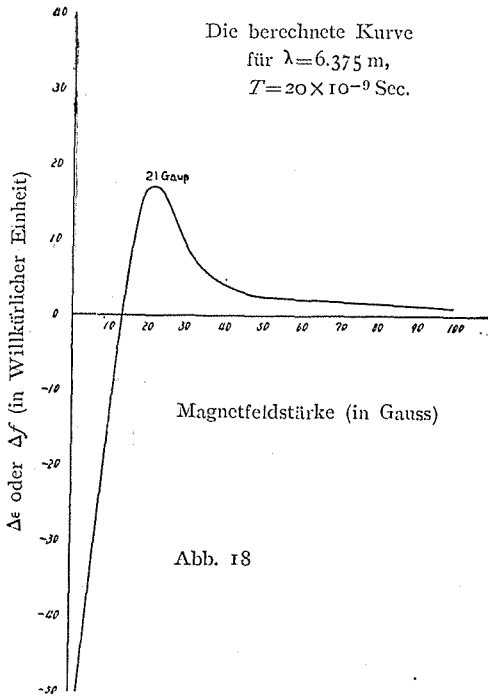
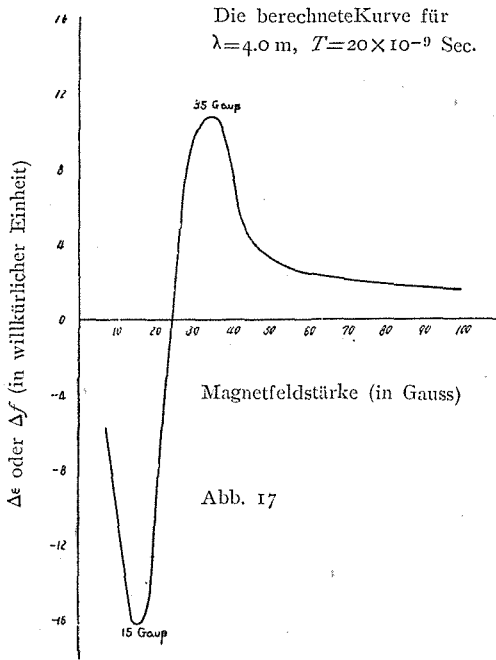
$$T_1 > T > T_2 \dots\dots(42)$$



befriedigen.

§ 5. Messergebnisse und ihre Betrachtungen.

Abb. 13, 14 und 15 stellen die Messergebnisse für die Wellenlänge 2.401m, 4m und 7.375m dar. Für jedes haben wir in der Abszisse die Magnetfeldstärke in Gauss und in der Ordinate die Skala des Feindrehkondensators des Exaktfrequenzmessers aufgetragen. Abb.



16, 17 und 18 veranschaulichen die den oben erwähnten gemessenen Kurven entsprechenden theoretischen an Hand der Formel (30) berechneten Kurven. Daraus kann man leicht ersehen, dass die Messungen und die Theorie in dem Verlauf der Dielektrizitätskonstante miteinander übereinstimmen. Zwar findet man zwischen den Messungen und der Theorie einen Unterschied in der Nulllinie, aber das ist darauf zurückzuführen, dass man in den Messungen die beim Vorhandensein der Elektronen für  $H_0 = 0$  stattfindende Frequenz als Null auswählt, während man in der Theorie die beim Nichtvorhandensein der Elektronen stattfindende Frequenz als Null bestimmt. Was dann bei Auftragung der berechneten Kurven in Frage kommt, betrifft die Elektronenlaufzeit  $T$ , die stets Gl. (42) befriedigen soll. Berechnet man in Gl. (40) mit den wirklichen Dimensionen :

$$d_1 = 0.8 \text{ cm}, \quad d_2 = 2.8 \text{ cm},$$

$$V_{A_2} = 1000 \text{ V}.$$

$$T_1 = 60 \times 10^{-9} \text{ sec}$$

Ebenfalls für  $T_2$  erhält man

$$T_2 = 2 \times 10^{-9} \text{ sec}$$

unter der Voraussetzung,

dass in Gl. (41) die Anfangsgeschwindigkeit für  $V_{g_2} = V_{A_1} = 400 V$ . entspricht, die die denkbar grösste Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Versucht man dabei im Gegenteil, aus den gemessenen Kurven, den Wert  $T$  zu vermuten, so kann man in jeder Kurve den folgenden gemeinsamen Wert sicher finden.  $T = 20 \times 10^{-9}$  sec Dieser Wert kann Gl. (42) befriedigen. In den berechneten Kurven haben wir  $T$ , wie oben beschrieben, ausgewählt.

Für diesen  $T$ -Wert folgt in der längsten Wellenlänge  $7.375 m$ .

$$2\omega T = 10.2 \text{ radian}$$

Der Einfluss des zweiten Gliedes in Gl. (30) erscheint als langsam veränderlicher Teil (über  $X = \frac{5}{2}\pi$ ) in Abb. 6 und somit der Veränderungsverlauf der Dielektrizitätskonstante ist daher lediglich dem ersten Glied überhaupt zu entnehmen. Also kann man leicht ersehen, dass jede berechnete Kurve an gleicher Stelle mit der entsprechenden gemessenen Kurve das Maximum und das Minimum hat und dass diese magnetoionische Resonanzstelle mit dem Sinken der Frequenz in der Richtung zum Schwachmagnetfeld übergeht.

### Zusammenfassung.

Der vorliegende Aufsatz behandelt die Dielektrizitätskonstante und die Leitfähigkeit eines magneto-aktiven ionisierten Gases. Der Verfasser kann aber, soviel er weiss, lediglich über die Leitfähigkeit die Mitteilungen der Herren Appleton (x 11), Benner (x 12) und Asami (x 16) finden. Appleton hat experimentell das Vorhandensein der magnetoionischen Resonanz festgestellt.

Ausser diesem aber können wir leider keine weiteren vertrauenswürdigen Veröffentlichungen über die Hochfrequenzcharakteristiken der Dielektrizitätskonstante finden. Dies hat den Verfasser zur vorliegenden Forschung getrieben. Ausser der Ableitung verschiedener Formeln hat der Verfasser eine vertrauenswürdige Uebereinstimmung zwischen den Formeln und den Messergebnissen festgestellt, indem er diese beiden miteinander vergleicht, in dem Fall, wo die zwischen den Versuchskondensatorplatten stattfindenden Elektronen eine endliche Laufzeit  $T$  besitzen. Daher könnten jene  $T$  nichtenthaltenden allgemeinen Formeln wohl angewendet werden, falls die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen in der Heaviside-Schicht mit Rücksicht auf die Einflüsse des Erdmagnets betrachtet wird. Herrn Prof. Nakayama ist der Verfasser für die Anregung zu dieser Arbeit und seinem fördernden Rat sehr zu Dank verpflichtet.



**Literatur.**

- 1) Eccles: On the Diurnal Variation of the Electric Waves occurring in Nature and on the Propagation of Electric Waves round the Bend of the Earth (Proc. Roy. Soc. 87 p. 79, 1912)
- 2) Salpeter: Das Reflexionsvermögen eines ionisierten Gases für elektrische Wellen (Phys. Zs 14 S. 201, 1913)
- 3) Larmor: On the Bending of Wireless electric Rays round the Earth (Phil. Mag. 48 P. 1025, 1924)
- 4) Lassen: Ueber die Ionisation der Atmosphäre und ihren Einfluss auf die Ausbreitung der kurzen Wellen der drahtlosen Telegraphie (Jahrbuch d. drahtlosen Telegr. u. Telep. 28 S. 109, 1926)
- 5) Appleton: On some direct Evidence for Downward atmospheric Reflection of Electric Rays (Proc. Roy. Soc. 109 P. 621, 1925)
- 6) Appleton: On a Method of Determining the State of Polarization of down-coming Wireless Waves (Proc. Roy. Soc. 117 P. 576, 1928)
- 7) Schekulin: Fortpflanzung einer elektromagnetischen Wellen in einem ionisierten magnetoaktiven Medium (Zs. f. H. T. 36 S. 190, 1930)
- 8) I. Takahashi: Berechnung des Konvektionstroms, den die elektromagnetische Welle im magnetoaktiven ionisierten Gas verursacht. (Japanisch veröffentlicht Juli, 1937)
- 9) I. Takahashi: Frequenzmesser für Ultrahochfrequenzen (Japanisch veröffentlicht Oktober, 1937)
- 10) I. Takahashi: Exaktfrequenzmesser für Ultrahochfrequenzen (Japanisch veröffentlicht April, 1939)
- 11) Appleton and Childs: On some Radio-Frequency Properties of Ionized Air (Phil. Mag. P. 969, Dec., 1930)
- 12) Benner: Ueber die Eigenschwingung freier Elektronen in einem konstanten Magnetfeld (Naturwiss. 17 S. 120, 1929)
- 13) Benner: Ueber die Veränderung der Dielektrizitätskonstante eines sehr verdünnten Gases durch Elektronen. (Ann. d. Phys. 3 S. 993, 1929)
- 14) Bergmann u. Düring: Experimentelle Untersuchungen der Veränderung der Dielektrizitätskonstanten eines sehr verdünnten Gases durch Elektronen (Ann. d. Phys. (5) I S. 1041, 1929)
- 15) Darrow: Contemporary Advances in Physics, XXIV High-Frequency Phenomena in Gases, First Part (Bell System Tech. Journ. P. 576, Oct., 1932)
- 16) Asami: Hochfrequenzverlust des ionisierten Gases (Japanisch veröffentlicht, in Denkihyoron April S. 403, 1935)
- 17) Appleton and Chapman: The Collisional Friction experienced by vibrating Electrons in ionized air (Proc. Phys. Soc. Lond. 44 P. 246, 1932)
- 18) Asami: Hochfrequente Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des ionisierten Gases (Japanisch veröffentlicht Juli 1937)
- 19) Khastgir and Sirajuddin: On the Dielectric constant of Space containing Electrons (Phil. Mag. 28 P. 532, 1939)
- 20) I. Takahashi: Frequenzmessverfahren, Jap. Pat. Nr. 138089.
- 21) Eckersley and Millington: The limiting polarization of medium waves reflected from the ionosphere (Proc. Phys. Soc. 51 p. 110, 1939)
- 22) Hollman u. Thoma: Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante einer Elektronenströmung (Ann. d. Phys. 32. S. 452, 1938).
- 23) Recknagel: Schwingungsanfächerung durch einen Elektronenstrahl im Felde des Plattenkondensators (Zs. f. techn. Phys. Nr. 3 S. 74, 1938).