Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (V)

Par **Sikazô Kodama**

(Reçu en Avril 19, 1941)

---

1. Nous donnons, dans ce mémoire, une application des théorèmes fondamentaux[1] dans la classe quasi-analytique de fonctions de deux variables à certaines équations aux dérivées partielles.

Étant donnée, en général, une suite double $\{M_{s,t}\}$ $\begin{pmatrix} s=0, 1, 2, \dots \\ t=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ de quantités positives ; désignons, comme plus haut, par C_M une classe de fonctions $f(y_1, y_2)$ indéfiniment dérivables dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant y_1 \leqslant a \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant b \end{pmatrix}$, et satisfaisant aux conditions

$$(1.1) \qquad |f^{(s+t)}(y_1, y_2)| \leqslant k^{s+t} M_{s,t} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant y_1 \leqslant a\,;\ s=0, 1, 2, \dots \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant b\,;\ t=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix},$$

où k est, comme on le sait, une constante dépendant seulement du choix de la fonction $f(y_1, y_2)$. On sait, de plus, que la condition nécessaire et suffisante pour que cette classe C_M soit quasi-analytique est que la série double

$$(1.2) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^*_{s,t}}$$

soit divergente, où $\{\beta^*_{s,t}\}$ est la minorante de M. Faber de la suite double donnée $\{\beta_{s,t} = \sqrt[s+t]{M_{s,t}}\}$.

Pour notre objet suivant, posons en particulier

$$M_{s,t} = (k_1 s)!\ (k_1 t)! \qquad (s, t \geqslant 1)$$

où $k_1 > 1$ et où $(k_1 s)! = [k_1 s]!$ et $(k_1 t)! = [k_1 t]!$. Alors on a

$$\begin{aligned} \sum \sum \frac{1}{\sqrt[s+t]{M_{s,t}}} &= \sum \sum \frac{1}{\sqrt[s+t]{(k_1 s)!\ (k_1 t)!}} \\ &\leqslant \sum \sum \frac{1}{\sqrt[s+t]{(k_1 s \div e)^{k_1 s} (k_1 t \div e)^{k_1 t}}} \\ &= \left(\frac{e}{k_1}\right)^{k_1} \sum \sum s^{-\frac{k_1 s}{s+t}} t^{-\frac{k_1 t}{s+t}}. \end{aligned}$$

---

1. Voir S. Kodama: Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables I (Memoirs of the College of Science, Kyoto, Series A, Vol. 22 (1939) pp. 269—316).

Or, pour toute la valeur positive entière >1 de ρ, on a

$$\rho^{k_1} < (\rho+1)^{\frac{(\rho+1)k_1}{2\rho}} (\rho-1)^{\frac{(\rho-1)k_1}{2\rho}};$$

$$(\rho+\sigma-1)^{\frac{(\rho+\sigma-1)k_1}{2\rho}} (\rho-\sigma+1)^{\frac{(\rho-\sigma+1)k_1}{2\rho}} < (\rho+\sigma)^{\frac{(\rho+\sigma)k_1}{2\rho}} (\rho-\sigma)^{\frac{(\rho-\sigma)k_1}{2\rho}}$$

$$(\sigma:\ \text{entier};\ 1 \leqslant \sigma \leqslant \rho-1;\ \rho \geqslant 2),$$

$$\rho^{\frac{\rho k_1}{2\rho-1}} (\rho-1)^{\frac{(\rho-1)k_1}{2\rho-1}} < (\rho+1)^{\frac{(\rho+1)k_1}{2\rho-1}} (\rho-2)^{\frac{(\rho-2)k_1}{2\rho-1}} \qquad (\rho \geqslant 2),$$

$$(\rho+\sigma-1)^{\frac{(\rho+\sigma-1)k_1}{2\rho-1}} (\rho-\sigma)^{\frac{(\rho-\sigma)k_1}{2\rho-1}} < (\rho+\sigma)^{\frac{(\rho+\sigma)k_1}{2\rho-1}} (\rho-\sigma-1)^{\frac{(\rho-\sigma-1)k_1}{2\rho-1}}$$

$$(\sigma:\ \text{entier};\ 1 \leqslant \sigma \leqslant \rho-2;\ \rho \geqslant 3).$$

Donc la série double $\sum\sum \frac{1}{\beta^*_{s,t}}$ peut s'écrire sous la forme;

$$\frac{1}{1^{k_1}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}k_1}} + \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{5}k_1} 3^{\frac{3}{5}k_1}} + \frac{1}{3^{k_1}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{2^{\frac{2}{3}k_1}} + \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{5}k_1} 3^{\frac{3}{5}k_1}} + \frac{1}{3^{k_1}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{7}k_1} 4^{\frac{4}{7}k_1}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{5}k_1} 3^{\frac{3}{5}k_1}} + \frac{1}{3^{k_1}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{7}k_1} 4^{\frac{4}{7}k_1}} + \frac{1}{4^{k_1}} + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1^{k_1}} + \frac{2}{2^{\frac{2}{3}k_1}} + \frac{3}{2^{k_1}} + \frac{4}{2^{\frac{2}{5}k_1} 3^{\frac{3}{5}k_1}} + \frac{5}{3^{k_1}} + \ldots\ldots$$

$$= 2\left\{\frac{1}{1^{k_1}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}k_1}} + \frac{2}{2^{k_1}} + \frac{2}{2^{\frac{2}{5}k_1} 3^{\frac{3}{5}k_1}} + \frac{3}{3^{k_1}} + \ldots\ldots\right\} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{k_1}}.$$

En utilisant ici l'inégalité

$$\rho^{k_1} < (\rho+1)^{\frac{(\rho+1)k_1}{2\rho+1}} \rho^{\frac{\rho k_1}{2\rho+1}},$$

la dernière série peut encore se majorer par la suivante:

$$2\sum_{1}^{\infty} \frac{2\rho}{\rho^{k_1}} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{k_1}} = 4\sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{k_1-1}} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{k_1}},$$

qui converge certainement pour $k_1 > 2$. On voit donc que la série double (1.2) converge pour $k_1 > 2$.

On voit de même que la série double (1.2) diverge pour $1 < k_1 \leqslant 2$.

§ 1. L'équation $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x_1^m \partial x_2^n} = \dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial y_1^p \partial y_2^q}$

2. Prenons les mn fonctions

$$f_{ij}(y_1, y_2) \qquad \begin{pmatrix} i=0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ j=0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

appartenant à la classe C_M où l'on suppose que $M_{s,t} = (k_1 s)!\ (k_1 t)!$, c'est-à-dire, définies dans le domaine $\begin{pmatrix} 0 \leqslant y_1 \leqslant a \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant b \end{pmatrix}$, indéfiniment dérivables et satisfaisant aux conditions (1.2). Supposons, de plus, qu'elles satisfassent aux conditions

$$(2.1)\qquad f_{ij}^{(s+t)}(0,0)=0 \qquad \begin{pmatrix} i=0,1,2,\ldots,m-1 \\ j=0,1,2,\ldots,n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s=0,1,2,\ldots \\ t=0,1,2,\ldots \end{pmatrix},$$

et que la série double (1.2) soit convergente, de sorte qu'on ait $k_1 > 2$. Déterminons deux entiers positifs fixes mais quelconques p et q tels que

$$(2.2)\qquad 2\max(p,q)<\min(m,n).$$

Définissons de ces mn fonctions $f_{ij}(y_1,y_2)$ les fonctions en nombre infini $\begin{pmatrix} \rho=1,2,3,\ldots \\ \sigma=1,2,3,\ldots \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

$$(2.3)\qquad f_{\rho m+i,j}(y_1,y_2)=\frac{\partial^p}{\partial y_1^p}f_{(\rho-1)m+i,j}(y_1,y_2)=f^{(p+0)}_{(\rho-1)m+i,j}(y_1,y_2)$$
$$=\cdots\cdots\cdots=f_{ij}^{(\rho p+0)}(y_1,y_2),$$

$$(2.4)\qquad f_{i,\rho n+j}(y_1,y_2)=\frac{\partial^q}{\partial y_2^q}f_{i,(\rho-1)n+j}(y_1,y_2)=f^{(0+q)}_{i,(\rho-1)n+j}(y_1,y_2)$$
$$=\cdots\cdots\cdots=f_{ij}^{(0+\rho q)}(y_1,y_2),$$

$$(2.5)\qquad f_{\rho m+i,\rho n+j}(y_1,y_2)=\frac{\partial^{p+q}}{\partial y_1^p\partial y_2^q}f_{(\rho-1)m+i,(\rho-1)n+j}(y_1,y_2)$$
$$=f^{(p+q)}_{(\rho-1)m+i,(\rho-1)n+j}(y_1,y_2)=\cdots\cdots\cdots=f_{ij}^{(\rho p+\rho q)}(y_1,y_2),$$

$$(2.6)\qquad f_{(\rho+\sigma)m+i,\rho n+j}(y_1,y_2)=f^{(\sigma p+0)}_{\rho m+i,\rho n+j}(y_1,y_2)=f_{ij}^{\{(\rho+\sigma)p+\rho q\}}(y_1,y_2),$$

$$(2.7)\qquad f_{\rho m+i,(\rho+\sigma)n+j}(y_1,y_2)=f^{(0+\sigma q)}_{\rho m+i,\rho n+j}(y_1,y_2)=f_{ij}^{\{\rho p+(\rho+\sigma)q\}}(y_1,y_2),$$

de sorte qu'on ait en général

$$(2.8)\qquad f_{\lambda m+i,\mu n+j}(y_1,y_2)=f_{ij}^{(\lambda p+\mu q)}(y_1,y_2)$$
$$\begin{pmatrix} i=0,1,2,\ldots,m-1 \\ j=0,1,2,\ldots,n-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda=0,1,2,\ldots \\ \mu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

Étant $2<k_1<\min\left(\dfrac{m}{p},\ \dfrac{n}{q}\right)$, considérons la fonction définie dans tout le domaine de x_1 et x_2 par la série double suivante :

$$(2.9)\qquad u(x_1,x_2,y_1,y_2)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x_1^s x_2^t}{s!\ t!}f_{s,t}(y_1,y_2)$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_1^{\lambda m+i}\ x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!}f_{ij}^{(\lambda p+\mu q)}(y_1,y_2)\right\}.$$

Sous les suppositions que la série double écrite au second membre de cette égalité converge dans un domaine possible et qu'elle puisse se dériver terme à terme m fois par rapport à x_1, n fois à x_2, p fois à y_1, et q fois à y_2, on peut vérifier que

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x_1^m \partial x_2^n} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_1^{\lambda m+i}\ x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!}f_{ij}^{\{(\lambda+1)p+(\mu+1)q\}}(y_1, y_2)\right.$$
$$= \frac{\partial^{p+q}u}{\partial y_1^p \partial y_2^q},$$

ce qui prouve, sous les hypothèses faites, que la fonction (2.9) est une solution de l'équation suivante aux dérivées partielles :

$$(2.10) \qquad \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x_1^m \partial x_2^n} = \frac{\partial^{p+q}u}{\partial y_1^p \partial y_2^q}.$$

3. Maintenant on doit démontrer, quelles que soient les mn fonctions choisies $f_{ij}(y_1, y_2)$ satisfaisant aux conditions susdites, que la série double (2.9) avec les séries doubles obtenues par dérivation terme à terme h fois par rapport à y_1 et l fois à y_2, où h et l sont tous les deux entiers positifs finis, convergent absolument et uniformément dans notre domaine par l'usage de la série majorante. Considérons, pour cela, le terme général de la série double (2.9) :

$$T = \frac{x_1^{\lambda m+i} x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} f_{ij}^{(\lambda p+\mu q)}(y_1, y_2) \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, 2, \dots \\ \mu = 0, 1, 2, \dots\end{pmatrix},$$
$$\left(\begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{matrix} \text{ pour chaque valeur de } \lambda \text{ et } \mu\right).$$

Alors on a

$$|T| < \frac{|x_1|^{\lambda m+i}|x_2|^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} K^{\lambda p+\mu q} M_{\lambda p, \mu q}$$
$$= \frac{|x_1|^{\mu m+i}|x_2|^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} K^{\lambda p+\mu q}(k_1\lambda p)!\ (k_1\mu q)!,$$

K étant une constante positive finie. Si l'on désigne par s et t les plus grands entiers positifs contenus dans $k_1\lambda p$ et $k_1\mu q$ respectivement, on peut alors écrire les deux fractions $\dfrac{(k_1\lambda p)!}{(\lambda m+i)!}$ et $\dfrac{(k_1\mu q)!}{(\mu n+j)!}$ sous les formes :

$$(3.1) \qquad \frac{(k_1\lambda p)!}{(\lambda m+i)!} = \frac{s!}{(\lambda m+i)!} = \frac{1}{(s+1)(s+2)\dots(\lambda m+i)}$$
$$< \frac{1}{(k_1\lambda p)^{\lambda m+i-s}} < \frac{1}{(k_1\lambda p)^{\lambda(m-k_1p)+i}},$$

$$(3.2) \qquad \frac{(k_1\mu q)!}{(\mu n+j)!} = \frac{t!}{(\mu n+j)!} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\dots(\mu n+j)}$$
$$< \frac{1}{(k_1\mu q)^{\mu n+j-t}} < \frac{1}{(k_1\mu q)^{\mu(n-k_1q)+j}}.$$

D'où l'on tire

$$(3.3)\qquad |T| < \frac{K^{\lambda p+\mu q}|x_1|^{\lambda m+i}|x_2|^{\mu n+j}}{(k_1\lambda p)^{\lambda(m-k_1p)+i}(k_1\mu q)^{\mu(n-k_1q)+j}}$$
$$= \left[\frac{K^p|x_1|^{m+\frac{i}{\lambda}}}{(k_1\lambda p)^{m-k_1p+\frac{i}{\lambda}}}\right]^\lambda \left[\frac{K^q|x_2|^{n+\frac{j}{\mu}}}{(k_1\mu q)^{n-k_1q+\frac{j}{\mu}}}\right]^\mu$$
$$< \left[\frac{K^p|x_1|^{2m}}{(k_1\lambda p)^{m-k_1p}}\right]^\lambda \left[\frac{K^q|x_2|^{2n}}{(k_1\mu q)^{n-k_1q}}\right]^\mu.$$

Il est donc facile de voir que la série double (2.9) converge absolument et uniformément pour toutes les valeurs finies de $|x_1|$ et $|x_2|$.

Ensuite le terme général de la série double obtenue par dérivation terme à terme de (2.9) h fois par rapport à y_1 et l fois à y_2 peut s'écrire sous la forme:

$$T' = \frac{x_1^{\lambda m+i}\ x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} f_{ij}^{\{(\lambda p+h)+(\mu q+l)\}}(y_1, y_2)\,;$$

donc on a

$$|T'| < \frac{|x_1|^{\lambda m+i}|x_2|^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} K^{\lambda p+h+\mu q+l}\{k_1(\lambda p+h)\}!\ \{k_1(\mu q+l)\}!.$$

Or, pour $\lambda > \dfrac{k_1 h}{m-k_1p}$ et $\mu > \dfrac{k_1 l}{n-k_1q}$, on a

$$\lambda m+i > k_1(\lambda p+h) \quad \text{et} \quad \mu n+j > k_1(\mu q+l),$$

quelles que soient les valeurs possibles de i et j. En désignant donc par s et t les plus grands entiers contenus dans $k_1(\lambda p+h)$ et $k_1(\mu q+l)$ respectivement, on a l'inégalité suivante:

$$|T'| < \frac{K^{\lambda p+h+\mu q+l}|x_1|^{\lambda m+i}|x_2|^{\mu n+j}}{(s+1)(s+2)\dots(\lambda m+i)(t+1)(t+2)\dots(\mu n+j)}$$

On a donc

$$|T'| < \frac{(K|x_1|)^{\lambda m+i}(K|x_2|)^{\mu n+j}}{\{k_1(\lambda p+h)\}^{\lambda(m-k_1p)-k_1h+i}\{k_1(\mu q+l)\}^{\mu(n-k_1q)-k_1l+j}}$$
$$= \left[\frac{(K|x_1|)^{m+\frac{i}{\lambda}}}{\{k_1(\lambda p+h)\}^{m-k_1\frac{\lambda p+h}{\lambda}+\frac{i}{\lambda}}}\right]^\lambda \left[\frac{(K|x_2|)^{n+\frac{j}{\mu}}}{\{k_1(\mu q+l)\}^{n-k_1\frac{\mu q+l}{\mu}+\frac{j}{\mu}}}\right]^\mu$$
$$< \left[\frac{(K|x_1|)^{m+\frac{i}{\lambda}}}{(k_1\lambda p)^{m-k_1p+\frac{i}{\lambda}}}\right]^\lambda \left[\frac{(K|x_2|)^{n+\frac{j}{\mu}}}{(k_1\mu q)^{n-k_1q+\frac{j}{\mu}}}\right]^\mu$$
$$< \left[\frac{(K|x_1|^{2m}}{(k_1\lambda p)^{m-k_1p}}\right]^\lambda \left[\frac{(K|x_2|)^{2n}}{(k_1\mu q)^{n-k_1q}}\right]^\mu.$$

On voit donc de même que la série double obtenue par dérivation terme à terme h fois par rapport à y_1 et l fois à y_2 de (2.9) converge aussi absolument et uniformément pour toutes les valeurs finies de $|x_1|$ et $|x_2|$, quelles que soient les valeurs finies de h et l; c'est-à-dire la série double (2.9) peut avoir des dérivées partielles, de tous les ordres finis, qu'on peut trouver par dérivation terme à terme de la série double (2.9) elle-même. Ces dérivées partielles sont, de plus, toutes nulles pour $\begin{matrix} y_1=0 \\ y_2=0. \end{matrix}$

Après tout nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Étant données les mn fonctions $f_{ij}(y_1, y_2)$ $\begin{pmatrix} i=0, 1, 2, \dots, m-1 \\ j=0, 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix}$ définies dans le domaine $\begin{pmatrix} 0\leqslant y_1\leqslant a \\ 0\leqslant y_2\leqslant b \end{pmatrix}$, indéfiniment dérivables et satisfaisant aux conditions (1.1) *et* (2.1), *où l'on pose* $M_{s,t}=\beta_{s,t}^{s+t}=(k_1 s)!\ (k_1 t)!$ *et où la série double* (1.2) *converge* (*c'est-à-dire* $k_1>2$); *étant fixes deux entiers positifs p et q tels qu'on ait* $2\,max(p, q)<min(m, n)$ *et* $2<k_1<min\left(\dfrac{m}{p}, \dfrac{n}{q}\right)$; *et étant définies les fonctions* $f_{\lambda m+i,\, \mu n+j}(y_1, y_2)$ *en nombre infini* $\begin{pmatrix} \lambda=0, 1, 2, \dots \\ \mu=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$ *par les relations* (2.8); *alors la fonction $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ définie par* (2.9) *est une solution non identiquement nulle de l'équation aux dérivées partielles* (2.10) *pour toutes les valeurs finies de x_1 et x_2, telle qu'on ait* $u(x_1, x_2, 0, 0)=0$.

On voit donc qu'il y a une infinité de solutions selon la sélection des mn fonctions $f_{ij}(y_1, y_2)$ dans notre classe C_M donnée.

4. On peut aussi discuter ce problème dans le cas où la clssse C_M est quasi-analytique, antrement dit, où la série double (1.2) diverge (c'est-à-dire $1<k_1\leqslant 2$), en remarquant seulement qu'on doit fixer deux entiers positifs p et q tels que $\max(p, q)<\min(m, n)$ et $1<k_1<\min\left(\dfrac{m}{p}, \dfrac{n}{q}\right)$. Et l'on voit que la solution est identiquement nulle sous les conditions (2.1).

§ 2. L'équation $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x_1^m \partial x_2^n}=\sum\limits_{s=0}^{p}\sum\limits_{t=0}^{q} a_{s,t}\dfrac{\partial^{(p-s)+(q-t)}u}{\partial y_1^{p-s}\partial y_2^{q-t}}$

5. Étant données, comme plus haut, les mn fonctions $f_{ij}(y_1, y_2)$ appartenant à la classe C_M où l'on suppose que la série double (1.2) converge; et étant fixes deux entiers positifs p et q tels que $2\max(p, q)<\min(m, n)$; définissons cette fois-ci de ces mn fonctions $f_{ij}(y_1, y_2)$ $\begin{pmatrix} i=0, 1, 2, \dots, m-1 \\ j=0, 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix}$ les fonctions en nombre infini $\begin{pmatrix} \rho=1, 2, 3, \dots \\ \sigma=1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$

satisfaisant aux conditions (2.1), en utilisant les $(p+1)(q+1)$ constantes données $a_{s,t}\begin{pmatrix} s=0, 1, 2, \ldots, p \\ t=0, 1, 2, \ldots, q\end{pmatrix}$ de la manière suivante:

$$f_{m+i,j}(y_1, y_2)=\sum_{h_1=0}^{p} a_{h_1,q} f_{ij}^{\{(p-h_1)+0\}}(y_1, y_2),$$

$$(5.1)\qquad f_{\rho m+i,j}(y_1,y_2)=\sum_{h_\rho=0}^{p} a_{h_\rho,q} f_{(\rho-1)m+i,j}^{\{(p-h_\rho)+0\}}(y_1, y_2)$$

$$=\sum_{h_{\rho-1},h_\rho=0}^{p} a_{h_{\rho-1},q}a_{h_\rho,q} f_{(\rho-2)m+i,j}^{\{(2p-h_{\rho-1}-h_\rho)+0\}}(y_1, y_2)$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_\rho=0}^{p}\left(\prod_{\xi=1}^{\rho} a_{h_\xi,q}\right) f^{\left\{\left(\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi\right)+0\right\}}(y_1, y_2),$$

$$f_{i,n+j}(y_1, y_2)=\sum_{l_1=0}^{q} a_{p,l_1} f_{ij}^{\{0+(q-l_1)\}}(y_1, y_2),$$

$$(5.2)\qquad f_{i,\rho n+j}(y_1, y_2)=\sum_{l_\rho=0}^{q} a_{p,l_\rho} f_{i,(\rho-1)n+j}^{\{0+(q-l_\rho)\}}(y_1, y_2)$$

$$=\sum_{l_{\rho-1},l_\rho=0}^{q} a_{p,l_{\rho-1}}a_{p,l_\rho} f_{i,(\rho-2)n+j}^{\{0+(2q-l_{\rho-1}-l_\rho)\}}(y_1, y_2)$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_\rho=0}^{q}\left(\prod_{\xi=1}^{\rho} a_{p,l_\xi}\right) f^{\left\{0+\left(\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi\right)\right\}}(y_1, y_2),$$

$$(5.3)\qquad f_{m+i,n+j}(y_1, y_2)=\sum_{h_1=0}^{p}\sum_{l_1=0}^{q} a_{h_1,l_1} f_{ij}^{\{(p-h_1)+(q-l_1)\}}(y_1, y_2),$$

$$(5.4)\qquad f_{\rho m+i,\rho n+j}(y_1, y_2)=\sum_{h_\rho=0}^{p}\sum_{l_\rho=0}^{q} a_{h_\rho,l_\rho} f_{(\rho-1)m+i,((\rho-1)n+j}^{\{(p-h_\rho)+(q-l_\rho)\}}(y_1, y_2)$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_\rho=0}^{p}\ \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_\rho=0}^{q}\left(\prod_{\xi=1}^{\rho} a_{h_\xi,l_\xi}\right)$$

$$\times f_{ij}^{\left\{\left(\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi\right)+\left(\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi\right)\right\}}(y_1, y_2),$$

$$(5.5)\qquad f_{(\rho+\sigma)m+i,\rho n+j}(y_1, y_2)$$

$$=\sum_{h_{\rho+1},h_{\rho+2},\ldots,h_{\rho+\sigma}=0}^{p}\left(\prod_{\eta=1}^{\sigma} a_{h_{\rho+\eta},q}\right) f_{\rho m+i,\rho n+j}^{\left\{\left(\sigma p-\sum_{\eta=1}^{\sigma} h_{\rho+\eta}\right)+0\right\}}(y_1, y_2)$$

$$=\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{\rho+\sigma}=0}^{p}\ \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_\rho=0}^{q}\left\{\left(\prod_{\xi=1}^{\rho} a_{h_\xi,l_\xi}\right)\left(\prod_{\eta=1}^{\sigma} a_{h_{\rho+\eta},q}\right)\right\}$$

$$\times f_{ij}^{\left\{\left((\rho+\sigma)p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi-\sum_{\eta=1}^{\sigma} h_{\rho+\eta}\right)+\left(\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi\right)\right\}}(y_1, y_2),$$

$$(5.6)\qquad f_{\rho m+i,(\rho+\sigma)n+j}(y_1, y_2)$$

$$= \sum_{l_{\rho+1}, l_{\rho+2}, \ldots, l_{\rho+\sigma}=0}^{q} \left(\prod_{\eta=1}^{\sigma} a_{p, l_{\rho+\eta}}\right) f_{\rho m+i, \rho n+j}^{\left\{0+\left(\sigma q-\sum_{\eta=1}^{\sigma} l_{\rho+\eta}\right)\right\}}(y_1, y_2)$$

$$= \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_\rho=0}^{p} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{\rho+\sigma}=0}^{q} \left\{\left(\prod_{\xi=1}^{\rho} a_{h_\xi l_\xi}\right)\left(\prod_{\eta=1}^{\sigma} a_{p, l_{\rho+\eta}}\right)\right\}$$

$$\times f_{ij}^{\left\{\left(\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi\right)+\left([\rho+\sigma]q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi-\sum_{\eta=1}^{\sigma} l_{\rho+\eta}\right)\right\}}(y_1, y_2).$$

Pour abréger, nous désignons ces fonctions par $f_{\lambda m+i, \mu n+j}(y_1, y_2)$, qui satisfont aux relations suivantes :

$$(5.7) \qquad f_{\lambda m+i, \mu n+j}(y_1, y_2) = \sum_{s=0}^{p} \sum_{t=0}^{q} a_{s, t} f_{(\lambda-1)m+i, (\mu-1)n+j}^{\{(p-s)+(q-t)\}}(y_1, y_2) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, 3, \cdots \\ \mu = 1, 2, 3, \cdots \end{pmatrix}.$$

Étant $2 < k_1 < \min\left(\dfrac{m}{p}, \dfrac{n}{q}\right)$, considérons la fonction définie dans tout le domaine de x_1 et x_2 par la série double suivante :

$$(5.8) \qquad u(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x_1^s x_2^t}{s!\ t!} f_{s,t}(y_1, y_2)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_1^{\lambda m+i} x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} \times f_{\lambda m+i, \mu n+j}(y_1, y_2)\right\}.$$

Supposons encore que la série double écrite au second membre de cette égalité converge dans le domaine $\begin{pmatrix} -\infty < \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} < +\infty \\ 0 \leqslant y_1 \leqslant a \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant b \end{pmatrix}$ et qu'elle puisse se dériver terme à terme m fois par rapport à x_1, n fois à x_2, p fois à y_1 et q fois à y_2. Alors on a, d'une part,

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x_1^m \partial x_2^n} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_1^{\lambda m+i} x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} \times f_{(\lambda+1)m+i, (\mu+1)n+j}(y_1, y_2)\right\}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_1^{\lambda m+i} x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} \times \left(\sum_{s=0}^{p} \sum_{t=0}^{q} a_{s,t} f_{\lambda m+i, \mu n+j}^{\{(p-s)+(q-t)\}}(y_1, y_2)\right)\right\}$$

$$= \sum_{s=0}^{p} \sum_{t=0}^{q} a_{s,t} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_1^{\lambda m+i} x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} \times f_{\lambda m+i, \mu n+j}^{\{(p-s)+(q-t)\}}(y_1, y_2)\right\}\right);$$

et l'on a, d'autre part,

$$\sum_{s=0}^{p}\sum_{t=0}^{q} a_{s,t}\frac{\partial^{(p-s)+(q-t)}u}{\partial y_1^{p-s}\partial y_2^{q-t}}$$
$$=\sum_{s=0}^{p}\sum_{t=0}^{q} a_{s,t}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_1^{\lambda m+i}x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\,(\mu n+j)!}f_{\lambda m+i,\,\mu n+j}^{\{(p-s)+(q-t)\}}(y_1, y_2)\right\}\right).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x_1^m\partial x_2^n}=\sum_{s=0}^{p}\sum_{t=0}^{q} a_{s,t}\frac{\partial^{(p-s)+(q-t)}u}{\partial y_1^{p-s}\partial y_2^{q-t}}, \tag{5.9}$$

ce qui affirme, sous les hypothèses faites, que la fonction (5.8) est une solution de l'équation aux dérivées partielles (5.9).

6. On doit donc démontrer, comme au n° 3, quelles que soient les mn fonctions choisies $f_{ij}(y_1, y_2)$ satisfaisant aux conditions susdites, que la série double (5.8) avec les séries doubles obtenues par dérivation terme à terme h fois par rapport à y_1 et l fois à y_2, où h et l sont tous les deux entiers positifs finis, convergent absolument et uniformément dans notre domaine. Or le terme général de notre série double (5.8) prend les trois types suivantes :

$$T_1=\frac{x_1^{\rho m+i}x_2^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\,(\rho n+j)!}f_{\rho m+i,\,\rho n+j}(y_1, y_2) \tag{6.1}$$
$$\begin{pmatrix} i=0,1,2,\dots,m-1\,; & \rho=0,1,2,\dots \\ j=0,1,2,\dots,n-1\,; & \end{pmatrix}$$
$$=\frac{x_1^{\rho m+i}x_2^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\,(\rho n+j)!}\sum_{h_1,h_2,\dots,h_\rho=0}^{p}\ \sum_{l_1,l_2,\dots,l_\rho=0}^{q}\left(\prod_{\xi=1}^{\rho}a_{h_\xi,l_\xi}\right)$$
$$\times f_{ij}^{\left\{\left(\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho}h_\xi\right)+\left(\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho}l_\xi\right)\right\}}(y_1, y_2),$$

$$T_2=\frac{x_1^{(\rho+\sigma)m+i}x_2^{\rho n+j}}{\{(\rho+\sigma)m+i\}!\,(\rho n+j)!}f_{(\rho+\sigma)m+i,\,\rho n+j}(y_1, y_2) \tag{6.2}$$
$$\begin{pmatrix} i=0,1,2,\dots,m-1\,; & \rho=0,1,2,\dots \\ j=0,1,2,\dots,n-1\,; & \sigma=1,2,3,\dots \end{pmatrix}$$
$$=\frac{x_1^{(\rho+\sigma)m+i}x_2^{\rho n+j}}{\{(\rho+\sigma)m+i\}!\,(\rho n+j)!}\sum_{h_1,h_2,\dots,h_{\rho+\sigma}=0}^{p}\ \sum_{l_1,l_2,\dots,l_\rho=0}^{q}$$
$$\times\left\{\left(\prod_{\xi=1}^{\rho}a_{h_\xi,l_\xi}\right)\left(\prod_{\eta=1}^{\sigma}a_{h_{\rho+\eta},q}\right)\right\}$$
$$\times f_{ij}^{\left\{\left((\rho+\sigma)p-\sum_{\xi=1}^{\rho}h_\xi-\sum_{\eta=1}^{\sigma}h_{\rho+\eta}\right)+\left(\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho}l_\xi\right)\right\}}(y, y_2),$$

$$T_3=\frac{x_1^{\rho m+i}x_2^{(\rho+\sigma)n+j}}{(\rho m+i)!\,\{(\rho+\sigma)n+j\}!}f_{\rho m+i,\,(\rho+\sigma)n+j}(y_1, y_2) \tag{6.3}$$
$$\begin{pmatrix} i=0,1,2,\dots,m-1\,; & \rho=0,1,2,\dots \\ j=0,1,2,\dots,n-1\,: & \sigma=1,2,3,\dots \end{pmatrix}$$
$$=\frac{x_1^{\rho m+i}x_2^{(\rho+\sigma)n+j}}{(\rho m+i)!\,\{(\rho+\sigma)n+j\}!}\sum_{h_1,h_2,\dots,h_\rho=0}^{p}\ \sum_{l_1,l_2,\dots,l_{\rho+\sigma}=0}^{q}$$

$$\times\left\{\left(\prod_{\xi=1}^{\rho} a_{h_\xi,\, l_\xi}\right)\left(\prod_{\eta=1}^{\sigma} a_{p,\, l_{\rho+\eta}}\right)\right\}$$
$$\times f_{ij}^{\left\{\left(\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi\right)+\left((\rho+\sigma)q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi-\sum_{\eta=1}^{\sigma} l_{\rho+\eta}\right)\right\}}(y_1, y_2).$$

Pour le terme T_1, on a

$$|T_1|=\left|\frac{x_1^{\rho m+i}x_2^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!}\sum_{h_1, h_2, \dots, h_\rho=0}^{p}\ \sum_{l_1, l_2, \dots, l_\rho=0}^{q}\left(\prod_{\xi=1}^{\rho} a_{h_\xi,\, l_\xi}\right)\right.$$
$$\left.\times f_{ij}^{\left\{\left(\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi\right)+\left(\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi\right)\right\}}(y_1, y_2)\right|$$
$$<\frac{|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!}\sum_{h_1, h_2, \dots, h_\rho=0}^{p}\ \sum_{l_1, l_2, \dots, l_\rho=0}^{q}\left(\prod_{\xi=1}^{\rho}|a_{h_\xi,\, l_\xi}|\right)$$
$$\times K^{\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi+\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi} M_{\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi,\ \rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi}$$
$$<\frac{|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!}\sum_{h_1, h_2, \dots, h_\rho=0}^{p}\ \sum_{l_1, l_2, \dots, l_\rho=0}^{q}$$
$$\times\left(\prod_{\xi=1}^{\rho}|a_{h_\xi,\, l_\xi}|\right)K^{\rho p+\rho q}\left\{k_1\left(\rho p-\sum_{\xi=1}^{\rho} h_\xi\right)\right\}!\ \left\{k_1\left(\rho q-\sum_{\xi=1}^{\rho} l_\xi\right)\right\}!,$$

K étant une constante positive finie. Désignons par $\bar{K}$ un nombre positif fixe mais quelconque tel que

$$|a_{s,t}|<\bar{K} \qquad \begin{pmatrix} s=0, 1, 2, \dots, p \\ t=0, 1, 2, \dots, q \end{pmatrix},$$

et posons

$$N_{\lambda,\mu}=\bar{K}(p+1)^{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}(q+1)^{\frac{\mu}{\lambda+\mu}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda=1, 2, 3, \dots \\ \mu=1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$|T_1|<\frac{|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!}K^{\rho p+\rho q}\bar{K}^{2\rho}(p+1)^\rho(q+1)^\rho(k_1\rho p)!\ (k_1\rho q)!$$
$$=|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{\rho n+j}K^{\rho p+\rho q}N_{\rho,\rho}^{2\rho}\frac{(k_1\rho p)!\ (k_1\rho q)!}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!};$$

et, comme on fait fixes deux entiers h et $l\geqslant 0$, on a, pour $\rho>\dfrac{k_1 h}{m-k_1 p}$ et $\rho>\dfrac{k_1 l}{n-k_1 q}$,

$$\left|\frac{\partial^{h+l}T_1}{\partial y_1^h\partial y_2^l}\right|=\left|\frac{x_1^{\rho m+i}x_2^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!}f^{(h+l)}_{\rho m+i,\, \rho n+j}(y_1, y_2)\right|$$
$$<\frac{|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{\rho n+j}}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!}K^{\rho p+h+\rho q+l}\bar{K}^{2\rho}(p+1)^\rho(q+1)^\rho$$
$$\times\{k_1(\rho p+h)\}!\ \{k_1(\rho q+l)\}!$$
$$<|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{\rho n+j}K^{\rho m+i+\rho n+j}N_{\rho,\rho}^{2\rho}\frac{\{k_1(\rho p+h)\}!\ \{k_1(\rho q+l)\}!}{(\rho m+i)!\ (\rho n+j)!}.$$

On a pareillement, pour les autres termes, T_2 et T_3 et pour ses dérivées,

$$|T_2| < \frac{|x_1|^{(\rho+\sigma)m+i}|x_2|^{\rho n+j}}{\{(\rho+\sigma)m+i\}!\ (\rho n+j)!} K^{(\rho+\sigma)p+\rho q}\overline{K}^{2\rho+\sigma}$$
$$\times (p+1)^{\rho+\sigma}(q+1)^{\rho}\{k_1(\rho+\sigma)p\}!\ (k_1\rho q)!$$
$$= |x_1|^{(\rho+\sigma)m+i}|x_2|^{\rho n+j}K^{(\rho+\sigma)p+\rho q}N^{2\rho+\sigma}_{\rho+\sigma,\rho}\frac{\{k_1(\rho+\sigma)p\}!\ (k_1\rho q)!}{\{(\rho+\sigma)m+i\}!\ (\rho n+j)!},$$

$$\left|\frac{\partial^{h+l}T_2}{\partial y_1^h\partial y_2^l}\right| = \left|\frac{x_1^{(\rho+\sigma)m+i}x_2^{\rho n+j}}{\{(\rho+\sigma)m+i\}!\ (\rho n+j)!}f^{(h+l)}_{(\rho+\sigma)m+i,\,\rho n+j}(y_1, y_2)\right|$$
$$< \frac{|x_1|^{(\rho+\sigma)m+i}|x_2|^{\rho n+j}}{\{(\rho+\sigma)m+i\}!\ (\rho n+j)!}K^{(\rho+\sigma)p+h+\rho q+l}\overline{K}^{2\rho+\sigma}$$
$$\times (p+1)^{\rho+\sigma}(q+1)^{\rho}\{k_1([\rho+\sigma]p+h)\}!\ \{k_1(\rho q+l)\}!$$
$$< |x_1|^{(\rho+\sigma)m+i}|x_2|^{\rho n+j}K^{(\rho+\sigma)m+i+\rho n+j}N^{2\rho+\sigma}_{\rho+\sigma,\rho}$$
$$\times \frac{\{k_1([\rho+\sigma]p+h)\}!\ \{k_1(\rho q+l)\}!}{\{(\rho+\sigma)m+i\}!\ (\rho n+j)!},$$

$$|T_3| < \frac{|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{(\rho+\sigma)n+j}}{(\rho m+i)!\ \{(\rho+\sigma)n+j\}!}K^{\rho p+(\rho+\sigma)q}\overline{K}^{2\rho+\sigma}$$
$$\times (p+1)^{\rho}(q+1)^{\rho+\sigma}(k_1\rho p)!\ \{k_1(\rho+\sigma)q\}!$$
$$= |x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{(\rho+\sigma)n+j}K^{\rho p+(\rho+\sigma)q}N^{2\rho+\sigma}_{\rho,\rho+\sigma}\frac{(k_1\rho p)!\ \{k_1(\rho+\sigma)q\}!}{(\rho m+i)!\ \{(\rho+\sigma)n+j\}!},$$

$$\left|\frac{\partial^{h+l}T_3}{\partial y_1^h\partial y_2^l}\right| = \left|\frac{x_1^{\rho m+i}x_2^{(\rho+\sigma)n+j}}{(\rho m+i)!\ \{(\rho+\sigma)n+j\}!}f^{(h+l)}_{\rho m+i,\,(\rho+\sigma)n+j}(y_1, y_2)\right|$$
$$< \frac{|x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{(\rho+\sigma)n+j}}{(\rho m+i)!\ \{(\rho+\sigma)n+j\}!}K^{\rho p+h+(\rho+\sigma)q+l}\overline{K}^{2\rho+\sigma}$$
$$\times (p+1)^{\rho}(q+1)^{\rho+\sigma}\{k_1(\rho p+h)\}!\ \{k_1([\rho+\sigma]q+l\}!$$
$$< |x_1|^{\rho m+i}|x_2|^{(\rho+\sigma)n+j}K^{\rho m+i+(\rho+\sigma)n+j}N^{2\rho+\sigma}_{\rho,\rho+\sigma}$$
$$\times \frac{\{k_1(\rho p+h)\}!\ \{k_1([\rho+\sigma]q+l)\}!}{(\rho m+i)!\ \{(\rho+\sigma)n+j\}!}.$$

On voit donc que ces inégalités peuvent s'écrire unitairement sous les formes :

$$(6.4)\qquad \left|\frac{x_1^{\lambda m+i}x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!}f_{\lambda m+i,\,\mu n+j}(y_1, y_2)\right|$$
$$< |x_1|^{\lambda m+i}|x_2|^{\mu n+j}K^{\lambda p+\mu q}N^{\lambda+\mu}_{\lambda,\mu}\frac{(k_1\lambda p)!\ (k_1\mu q)!}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!},$$

$$(6.5)\qquad \left|\frac{x_1^{\lambda m+i}x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!}f^{(h+l)}_{\lambda m+i,\,\mu n+j}(y_1, y_2)\right|$$
$$< |x_1|^{\lambda m+i}|x_2|^{\mu n+j}K^{\lambda m+i+\mu n+j}N^{\lambda+\mu}_{\lambda,\mu}\frac{\{k_1(\lambda p+h)\}!\ \{k_1(\mu q+l)\}!}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!}.$$

Par conséquent, on peut voir, comme au n° 3, que la série double

(5.8) avec les séries doubles obtenues par dérivation terme à terme h fois par rapport à y_1 et l fois à y_2 convergent absolument et uniformément pour toutes les valeurs finies de $|x_1|$ et $|x_2|$, quelles que soient les valeurs finies de h et l. Ces dérivées partielles sont, de même, toutes nulles pour $\begin{matrix} y_1=0 \\ y_2=0 \end{matrix}$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Étant données les mn fonctions $f_{ij}(y_1, y_2)$ $\begin{pmatrix} i=0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ j=0, 1, 2, \ldots, n=1 \end{pmatrix}$ *définies dans le domaine* $\begin{pmatrix} 0\leqslant y_1\leqslant a \\ 0\leqslant y_2\leqslant b \end{pmatrix}$, *indéfiniment dérivables et satisfaisant aux conditions* (1.1) *et* (2.1), *où l'on pose* $M_{s,t}=\beta_{s,t}^{s+t}=(k_1s)!\,(k_1t)!$ *et où la série double* (1.2) *converge* (*c'est-à-dire* $k_1>2$); *étant fixes deux entiers positifs* p *et* q *tels qu'on ait* $2\,max(p, q)< min(m, n)$ *et* $2<k_1<min\left(\frac{m}{p}, \frac{n}{q}\right)$; *et étant définies les fonctions* $f_{\lambda m+i,\, \mu n+j}(y_1, y_2)$ *en nombre infini* $\begin{pmatrix} \lambda=0, 1, 2, \ldots \\ \mu=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ *par les relations* (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) *et* (5.6); *alors la fonction* $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ *définie par* (5.8) *est une solution non identiquement nulle de l'équation aux dérivées partielles* (5.9) *pour toutes les valeurs finies de* x_1 *et* x_2, *telle qu'on ait* $u(x_1, x_2, o, o)=0$.

On voit donc que le théorème du n° 3 est certainement un cas particulier de ce théorème, et qu'il y a de même une infinité de solutions selon la sélection des mn fonctions $f_{ij}(y_1, y_2)$ dans notre classe C_M donnée.

7. Comme on a dit au n° 4, on peut aussi discuter ce problème dans le cas où la classe C_M est quasi-analytique, sous les mêmes remarques, et l'on peut obtenir la même conclusion qu'au n° 4.

§ 3. Un théorème

8. Démontrons maintenant le théorème suivant:

Quelles que petites que soient les valeurs positives de ε *et de* δ, *on peut toujours trouver, dans les solutions données plus haut de l'équation aux dérivées partielles* (5.9), *une solution telle qu'on ait*

$$\phi(x_1, x_2)= \max_{\substack{0\leq y_1\leq a \\ 0\leq y_2\leq b}} |u(x_1, x_2, y_1, y_2)| \tag{8.1}$$

$$= O\left(\exp.\left\{A|x_1|^{\frac{2m}{m-2p}+\varepsilon}+B|x_2|^{\frac{2n}{n-2q}+\delta}\right\}\right),$$

où A *et* B *sont toutes les deux des constantes positives finies.*

Si l'on prend, en effet, des mn fonctions $f_{ij}(y_1, y_2)$ $\begin{pmatrix} i=0,1,2,\dots, m-1 \\ j=0,1,2,\dots, n-1 \end{pmatrix}$ indéfiniment dérivables et satisfaisant aux conditions :

$$(8.2) \qquad |f_{ij}^{(s+t)}(y_1, y_2)| < k^{s+t}(k_1 s)!\ (k_1 t)! \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant y_1 \leqslant a\,;\ s=0,1,2,\dots \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant b\,;\ t=0,1,2,\dots \end{pmatrix},$$

$$(8.3) \qquad f_{ij}^{(s+t)}(0, 0) = 0 \qquad \begin{pmatrix} s=0,1,2,\dots \\ t=0,1,2,\dots \end{pmatrix},$$

où $2 < k_1 < \min\left(\dfrac{m}{p}, \dfrac{n}{q}\right)$, si l'on définit les fonctions $f_{\lambda m+i,\, \mu n+j}(y_1, y_2)$ en nombre infini $\begin{pmatrix} \lambda=0,1,2,\dots \\ \mu=0,1,2,\dots \end{pmatrix}$ comme plus haut, et si l'on construit la fonction

$$(8.4) \qquad u(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_1^{\lambda m+i}x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} \times f_{\lambda m+i,\, \mu n+j}(y_1, y_2)\right\},$$

alors on sait que cette fonction est une solution de l'équation (5.9).

Ainsi qu'on a déjà désifiné par $[s]$ le plus grand entier $\leqslant s$, désignons par $[\![s]\!]$ le plus petit entier $\geqslant s$. On a alors

$$\phi(x_1, x_2) = \max_{\substack{0 \leq y_1 \leq a \\ 0 \leq y_2 \leq b}} \left|\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_1^{\lambda m+i}x_2^{\mu n+j}}{(\lambda m+i)!\ (\mu n+j)!} \times f_{\lambda m+i,\, \mu n+j}(y_1, y_2)\right\}\right|$$

$$\leqslant \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} K^{\lambda p+\mu q} C_{\lambda,\mu}^{\lambda+\mu} |x_1|^{2\lambda m} |x_2|^{2\mu n} \frac{(k_1\lambda p)!\ (k_1\mu q)!}{(\lambda m)!\ (\mu n)!},$$

où $C_{\lambda,\mu} = N_{\lambda,\mu}(mn)^{\frac{1}{\lambda+\mu}}$. Donc on a

$$(8.5) \qquad \phi(x_1, x_2) \leqslant \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{K^{\lambda p+\mu q} C_{\lambda,\mu}^{\lambda+\mu}}{[\![(m-k_1 p)\lambda]\!]!\ [\![(n-k_1 q)\mu]\!]!} |x_1|^{2\lambda m} |x_2|^{2\mu n},$$

et l'on peut distinguer les quatre cas suivants :

Premier cas : $s = [\![(m-k_1 p)\lambda]\!]$ *et* $t = [\![(n-k_1 q)\mu]\!]$. On peut trouver, dans ce cas, λ et μ tels qu'on ait

$$\lambda \leqslant \frac{s}{m-k_1 p} \quad \text{et} \quad \mu \leqslant \frac{t}{n-k_1 q}.$$

D'où l'on tire, pour $|x_1| \geqslant 1$ et $|x_2| \geqslant 1$,

$$\phi(x_1, x_2) \leqslant \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} K^{\lambda p+\mu q} C_{\lambda,\mu}^{\lambda+\mu} \frac{|x_1|^{2\lambda m} |x_2|^{2\mu n}}{s!\ t!}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{s!\ t!}(K^p C_{\lambda,\mu} |x_1|^{2m})^{\lambda} (K^q C_{\lambda,\mu} |x_2|^{2n})^{\mu}$$

$$\leqq \sum\!\!\!\sum \frac{1}{s!\,t!}(K^p C_{\lambda,\mu}|x_1|^{2m})^{\frac{s}{m-k_1p}}$$
$$\times (K^q C_{\lambda,\mu}|x_2|^{2n})^{\frac{t}{n-k_1q}},$$

où le symbole de la dernière sommation double $\sum\!\!\!\sum$ est assujetti aux termes correspondants aux seules valeurs de λ et μ telles qu'on ait $s=[\![(m-k_1p)\lambda]\!]$ et $t=[\![(n-k_1q)\mu]\!]$ pour chaque de s et t lorsque λ et μ varient de 0 à $+\infty$. En posant donc

$$A=(K^p C_{\lambda,\mu})^{\frac{1}{m-k_1p}} \quad \text{et} \quad B=(K^q C_{\lambda,\mu})^{\frac{1}{n-k_1q}},$$

on a

$$\phi(x_1, x_2) \leqq \sum\!\!\!\sum \frac{(K^p C_{\lambda,\mu}|x_1|^{2m})^{\frac{s}{m-k_1p}}}{s!} \cdot \frac{(K^q C_{\lambda,\mu}|x_2|^{2n})^{\frac{t}{n-k_1q}}}{t!}$$
$$\leqq \exp.\left\{(K^p C_{\lambda,\mu}|x_1|^{2m})^{\frac{1}{m-k_1p}} + (K^q C_{\lambda,\mu}|x_2|^{2n})^{\frac{1}{n-k_1q}}\right\}$$
$$= \exp.\left\{A|x_1|^{\frac{2m}{m-k_1p}} + B|x_2|^{\frac{2n}{n-k_1q}}\right\}.$$

Par conséquent, quels que petits que soient les nombres positifs ε et δ, si l'on prend k_1 tel qu'on ait simultanément

$$0<\frac{2m}{m-k_1p}<\frac{2m}{m-2p}+\varepsilon, \quad \text{et} \quad 0<\frac{2n}{n-k_1q}<\frac{2n}{n-2q}+\delta,$$

on peut alors trouver (8.1) pour les valeurs suffisamment grandes de $|x_1|$ et $|x_2|$.

Deuxième cas: $[\![(m-k_1p)(\lambda-1)]\!]<s=[\![(m-k_1p)\lambda]\!]=[\![(m-k_1p)\cdot(\lambda+1)]\!]=\ldots\ldots=[\![(m-k_1p)(\lambda+h)]\!]<[\![(m-k_1p)(\lambda+h+1)]\!]$ *et* $t=[\![(n-k_1q)\mu]\!]$. On a évidemment, dans ce cas,

$$h \leqq \left[\frac{1}{m-k_1p}\right] \leqq \left[\!\!\left[\frac{1}{m-k_1p}\right]\!\!\right].$$

En remarquant donc qu'on peut écrire

$$\sum_{s} \frac{(K^p C_{\lambda,\mu}|x_1|^{2m})^{\frac{s}{m-k_1p}}}{s!} \leqq \left[\!\!\left[\frac{1}{m-k_1p}\right]\!\!\right] \sum \frac{(K^p C_{\lambda,\mu}|x_1|^{2m})^{\frac{s}{m-k_1p}}}{s!}$$
$$\leqq \left[\!\!\left[\frac{1}{m-k_1p}\right]\!\!\right] \exp.\left\{(K^p C_{\lambda,\mu}|x_1|^{2m})^{\frac{1}{m-k_1p}}\right\}$$
$$= \left[\!\!\left[\frac{1}{m-k_1p}\right]\!\!\right] \exp.\left((A|x_1|^{\frac{2m}{m-k_1p}}\right),$$

on peut aussi trouver la relation (8.1).

On peut approuver en outre cette relation (8.1) dans les autres deux cas suivants:

Troisième cas: $s=\llbracket(m-k_1p)\lambda\rrbracket$ *et* $\llbracket(n-k_1q)(\mu-1)\rrbracket<t=\llbracket(n-k_1q)\mu\rrbracket =\llbracket(n-k_1q)(\mu+1)\rrbracket=\ldots\ldots=\llbracket(n-k_1q)(\mu+l)\rrbracket<\llbracket(n-k_1q)(\mu+l+1)\rrbracket$;

Quatrième cas: $\llbracket(m-k_1p)(\lambda-1)\rrbracket<s=\llbracket(m-k_1p)\lambda\rrbracket=\llbracket(m-k_1p)\cdot(\lambda+1)\rrbracket=\ldots\ldots=\llbracket(m-k_1p)(\lambda+h)\rrbracket<\llbracket(m-k_1p)(\lambda+h+1)\rrbracket$ *et* $\llbracket(n-k_1q)\cdot(\mu-1\rrbracket<t=\llbracket(n-k_1q)\mu\rrbracket=\llbracket(n-k_1q)(\mu+1)\rrbracket=\ldots\ldots=\llbracket(n-k_1q)(\mu+l)\rrbracket<\llbracket(n-k_1q)(\mu+l+1)\rrbracket$.

Notre théorème est ainsi démontré.

§4. Le problème de l'unicité

9. Pour une application du dernier théorème on peut résoudre le problème de l'unicité des solutions de l'équation aux dérivées partielles (2.10):

$$(9.1)\qquad F(u)\equiv\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x_1^m\partial x_2^n}-\frac{\partial^{p+q}u}{\partial y_1^p\partial y_2^q}=0$$

dans le cas où la série double (1.2) converge. Pour cela, il est commode de considérer *l'équation adjointe* pouvant s'écrire sous la forme:

$$(9.2)\qquad \Phi(v)\equiv(-1)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x_1^m\partial x_2^n}-(-1)^{p+q}\frac{\partial^{p+q}u}{\partial y_1^p\partial y_2^q}=0.$$

Si ρ est une racine de l'équation

$$(9.3)\qquad i^{m+n}=\rho^{p+q}\qquad (i=\sqrt{-1}),$$

telle que $\rho=-\rho_1-i\rho_2$ ($\rho_1\geqslant0$), il est alors aisé de voir que la fonction

$$\begin{aligned}(9.4)\qquad w&\equiv\exp.\left\{\rho\mu^{\frac{m}{p}}(y_1-\eta_1)+\rho\nu^{\frac{n}{q}}(y_2-\eta_2)+i\mu(x_1-\xi_1)+i\nu(x_2-\xi_2)\right\}\\&\equiv\exp.\Big\{-\rho_1\mu^{\frac{m}{p}}(y_1-\eta_1)-\rho_1\nu^{\frac{n}{q}}(y_2-\eta_2)\\&\qquad+i\Big[\mu(x_1-\xi_1)-\rho_2\mu^{\frac{m}{p}}(y_1-\eta_1)+\nu(x_2-\xi_2)-\rho_2\nu^{\frac{n}{q}}(y_2-\eta_2)\Big]\Big\}\end{aligned}$$

vérifie formellement l'équation (9.1), considérée comme fonction de (x_1, x_2, y_1, y_2) et l'équation (9.2) comme fonction de $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. Donc la fonction

$$(9.5)\qquad U\begin{pmatrix}x_1, x_2, y_1, y_2\\ \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2\end{pmatrix}$$
$$\equiv\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\cos\left\{\mu(x_1-\xi_1)-\rho_2\mu^{\frac{m}{p}}(y_1-\eta_1)+\nu(x_2-\xi_2)-\rho_2\nu^{\frac{n}{q}}(y_2-\eta_2)\right\}\\ \qquad\times\exp.\left[-\rho_1\mu^{\frac{m}{p}}(y_1-\eta_1)-\rho_1\nu^{\frac{n}{q}}(y_2-\eta_2)\right]d\mu d\nu & \begin{pmatrix}y_1>\eta_1\\ y_2>\eta_2\end{pmatrix}\\ 0 & \text{(ailleurs)}\end{cases}$$

vérifie certainement l'équation (9.1), considérée comme fonction de (x_1, x_2, y_1, y_2) et l'équation (9.2) comme fonction de $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. Dans le cas où $\rho_1>0$, l'intégrale double converge absolument pour $\begin{pmatrix}y_1>\eta_1\\ y_2>\eta_2\end{pmatrix}$, et la convergence est uniforme sauf au voisinage de $y_1=\eta_1$ et $y_2=\eta_2$.

Il en est de même des intégrales doubles qu'on obtient en dérivant (9.5) un nombre quelconque de fois par rapport à $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$. Dans le cas où $\rho_1=0$, on ne voit pas immédiatement que l'intégrale double a un sens. On peut l'affirmer cependant (en supposant toujours $\eta_1 \neq y_1$ et $\eta_2 \neq y_2$) par une transformation de la forme

$$\int_0^\infty\int_0^\infty=\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}+\int_{h_1}^\infty\int_0^{h_2}+\int_0^{h_1}\int_{h_2}^\infty+\int_{h_1}^\infty\int_{h_2}^\infty,$$

où h_1 et h_2 sont toutes les deux prises convenablement. On voit donc de même que l'intégrale double peut être dérivée un nombre fini de fois par rapport à $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$. Il est à remarquer ici que si $\rho_1<0$ on doit prendre $\begin{pmatrix} y_1<\eta_1 \\ y_2<\eta_2 \end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix} y_1>\eta_1 \\ y_2>\eta_2 \end{pmatrix}$. Par cette raison, la fonction U est appellée la *solution fondamentale* de notre équation.

10. En posant

$$(10.1)\qquad \Lambda=\mu(y_1-\eta_1)^{\frac{p}{m}},\qquad \lambda=\nu(y_2-\eta_2)^{\frac{q}{n}},$$
$$\sigma=\frac{x_1-\xi_1}{(y_1-\eta_1)^{p/m}},\qquad \tau=\frac{x_2-\xi_2}{(y_2-\eta_2)^{q/n}},$$

considérons l'intégrale double suivante:

$$(10.2)\qquad I_{s,t}(\sigma,\tau)\qquad \begin{pmatrix} s=0,1,2,\dots \\ t=0,1,2,\dots \end{pmatrix}$$
$$\equiv\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \Lambda^s\lambda^t\exp.\Big\{-\rho_1\Lambda^{\frac{m}{p}}-\rho_1\lambda^{\frac{n}{q}}$$
$$+i\Big(\Lambda\sigma-\rho_2\Lambda^{\frac{m}{p}}+\lambda\tau-\rho_2\lambda^{\frac{n}{q}}\Big)\Big\}d\Lambda d\lambda$$
$$\equiv\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \Lambda^s\exp.\Big\{-(\rho_1+i\rho_2)\Lambda^{\frac{m}{p}}+i\Lambda\sigma\Big\}d\Lambda$$
$$\times\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \lambda^t\exp.\Big\{-(\rho_1+i\rho_2)\lambda^{\frac{n}{q}}+i\lambda\tau\Big\}d\lambda$$
$$\equiv I_s(\sigma)I_t(\tau).$$

On a alors, pour a réel quelconque,

$$|I_s(\sigma)|\leqslant\int_0^\infty\Big|(\Lambda+ia)^s\exp.\Big\{-(\rho_1+i\rho_2)(\Lambda+ia)^{\frac{m}{p}}+i\Lambda\sigma-a\sigma\Big\}\Big|d\Lambda$$
$$\leqslant e^{-\sigma a}\int_0^\infty\Big|(\Lambda+ia)^s\exp.\Big\{-(\rho_1+i\rho_2)(\Lambda+ia)^{\frac{m}{p}}+i\Lambda\sigma\Big\}\Big|d\Lambda.$$

Or on a

$$-\Re\Big\{(\rho_1+i\rho_2)(\Lambda+ia)^{\frac{m}{p}}\Big\}\leqslant-\frac{1}{2}\Lambda^{\frac{m}{p}}+\varkappa_1 a^{\frac{m}{p}},$$

où $\varkappa_1=\max\limits_{0<\zeta<\infty}\Big\{\frac{1}{2}\zeta^{\frac{m}{p}}-\Re(\zeta+i)^{\frac{m}{p}}\Big\}$ qui est manifestement finie, et de plus, on a

$$|(A+ia)^s| \leqslant \varkappa_2 \exp.\left\{\frac{1}{4}\left(A^{\frac{m}{p}}+a^{\frac{m}{p}}\right)\right\},$$

où $\varkappa_2 = 2^{s^2} e^{-\frac{s}{2}}$, Donc on a

$$|I_s(\sigma)| \leqslant \varkappa_2 e^{-\sigma a}\int_0^\infty \exp.\left\{-\frac{1}{4}A^{\frac{m}{p}}+\left(\varkappa_1+\frac{1}{4}\right)a^{\frac{m}{p}}\right\}dA$$
$$= 2^{\frac{p}{m}}\Gamma\left(1+2^{-\frac{p}{m}}\right)\varkappa_2 \exp.\left\{-\sigma a+\left(\varkappa_1+\frac{1}{4}\right)a^{\frac{m}{p}}\right\}.$$

En prenant

$$a=\left\{\frac{\sigma}{\frac{m}{p}\left(\varkappa_1+\frac{1}{4}\right)}\right\}^{\frac{m}{m-p}},$$

on peut encore écrire l'inégalité suivante :

$$|I_s(\sigma)| < k(k_1 s)^{\frac{p}{m}s} \exp.\left\{-A|\sigma|^{\frac{m}{m-p}}\right\},$$

où k est une constante et où k_1 et A sont des constantes qui ne dépendent que de m et p. On a de même

$$|I_t(\tau)| < k(k_2 t)^{\frac{q}{n}t} \exp.\left\{-B|\tau|^{\frac{n}{n-q}}\right\},$$

où k_2 et B sont des constantes qui ne dépendent que de n et q.

Par conséquent on a l'inégalité suivante :

$$(10.3)\qquad |I_{s,t}(\sigma,\tau)| < k(k_1 s)^{\frac{p}{m}s}(k_2 t)^{\frac{q}{n}t}\exp.\left\{-A|\sigma|^{\frac{m}{m-p}} - B|\tau|^{\frac{n}{n-q}}\right\}$$

D'autre part on a immédiatement

$$(10.4)\qquad \frac{\partial^{s+t}U}{\partial\xi_1^s\partial\xi_2^t} = \Re\left[(-i)^{s+t}(y_1-\eta_1)^{-\frac{p}{m}(s+1)}(y_2-\eta_2)^{-\frac{q}{n}(t+1)} I_{s,t}(\sigma,\tau)\right]$$
$$\begin{pmatrix} y_1>\eta_1 \\ y_2>\eta_2 \end{pmatrix},$$

qui démontre, grâce à (10.3), que la dérivée partielle $\dfrac{\partial^{s+t}U}{\partial\xi_1^s\partial\xi_2^t}$ tend vers zéro avec $\eta_1\to y_1-0$ et $\eta_2\to y_2-0$ $\left(\text{pour } \begin{matrix}\xi_1\neq x_1\\ \xi_2\neq x_2\end{matrix}\right)$. On voit donc que la fonction U est continue avec ses dérivées partielles par rapport à ξ_1 et ξ_2 dans tout le domaine sauf au voisinage crucial du point ($\xi_1=x_1$, $\xi_2=x_2$, $\eta_1=y_1$, $\eta_2=y_2$).

On voit de même que les dérivées partielles de la fonction U par rapport à η_1 et η_2 (et danc à $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$) sont aussi continues dans tout le domaine sauf au voisinage crucial susdit.

11. On peut trouver les majorations des dérivées partielles de la fonction U de la manière suivante. Posons, pour cela, U sous la forme :

$$(11.1)\qquad U=(y_1-\eta_1)^{-\frac{p}{m}}(y_2-\eta_2)^{-\frac{q}{n}}\phi(\sigma,\tau),$$

où

$$(11.2)\qquad \phi(\sigma,\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(\rho_2\Lambda^{\frac{m}{p}}-\Lambda\sigma+\rho_2\lambda^{\frac{n}{q}}-\lambda\tau\right)\times\exp.\left(-\rho_1\Lambda^{\frac{m}{p}}-\rho_1\lambda^{\frac{n}{q}}\right)d\Lambda d\lambda.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_1=\Delta U &\equiv \frac{\partial^{p+q+m+n}}{\partial\xi_1{}^p\partial\xi_2{}^q\partial\eta_1{}^m\partial\eta_2{}^n}U \\ &=\frac{\partial^{m+n}}{\partial\eta_1{}^m\partial\eta_2{}^n}\left\{(-1)^{p+q}(y_1-\eta_1)^{-\frac{p}{m}-\frac{p^2}{m}}(y_2-\eta_2)^{-\frac{q}{n}-\frac{q^2}{n}}\times\frac{\partial^{p+q}\phi}{\partial\sigma^p\partial\tau^q}\right\} \\ &=(-1)^{p+q}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\eta_1{}^m\partial\eta_2{}^n}\{(y_1-\eta_1)^h(y_2-\eta_2)^l f\} \\ &\equiv(-1)^{p+q}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\eta_1{}^m\partial\eta_2{}^n}\Phi', \end{aligned}$$

où l'on pose, pour abréger,

$$h=-\frac{p}{m}(p+1),\qquad l=-\frac{q}{n}(q+1),\qquad f=\frac{\partial^{p+q}\phi}{\partial\sigma^p\partial\tau^q}.$$

Or on a

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial\eta_1}=-(y_1-\eta_1)^{h-1}(y_2-\eta_2)^l\left\{hf-\frac{p}{m}\sigma\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\},$$
$$\frac{\partial\Phi'}{\partial\eta_2}=-(y_1-\eta_1)^{h}(y_2-\eta_2)^{l-1}\left\{lf-\frac{q}{n}\tau\frac{\partial f}{\partial\tau}\right\}.$$

En introduisant ici les symboles d'opérations

$$(11.3)\qquad \mathfrak{D}_h\equiv h-\frac{p}{m}\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma},\qquad \overline{\mathfrak{D}}_l\equiv l-\frac{q}{n}\tau\frac{\partial}{\partial\tau},$$
$$D_{h,l}^{s,t}\equiv\mathfrak{D}_{h-s+1}\mathfrak{D}_{h-s+2}\cdots\mathfrak{D}_{h-1}\mathfrak{D}_h\overline{\mathfrak{D}}_{l-t+1}\overline{\mathfrak{D}}_{l-t+2}\cdots\overline{\mathfrak{D}}_{l-1}\overline{\mathfrak{D}}_l,$$

on a

$$\frac{\partial^{s+t}\Phi'}{\partial\eta_1{}^s\partial\eta_2{}^t}=(-1)^{s+t}(y_1-\eta_1)^{h-s}(y_2-\eta_2)^{l-t}D_{h,l}^{s,t}f\qquad\begin{pmatrix}s=1,2,3,\dots\\ t=1,2,3,\dots\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(11.4)\qquad U_1=(-1)^{p+q+m+n}(y_1-\eta_1)^{h-m}(y_2-\eta_2)^{l-n}D_{h,l}^{m,n}f.$$

Or on a

$$D_{h,l}^{m,n}\equiv\sum_{s=0}^m\sum_{t=0}^n a_{s,t}\sigma^s\tau^t\frac{\partial^{p+s+q+t}}{\partial\sigma^{p+s}\partial\tau^{q+t}},$$

où $a_{s,t}$ $\begin{pmatrix}s=0,1,2,\dots,m\\ t=0,1,2,\dots,n\end{pmatrix}$ est une constante, et

$$h-m=-\frac{1}{m}\{m^2+p(p+1)\},\qquad l-n=-\frac{1}{n}\{n^2+q(q+1)\}.$$

On en déduit, grâce à (10.3),

$$(11.5)\qquad |U_1| \leqslant k \exp.\left\{-A|\sigma|^{\frac{m}{m-p}} - B|\tau|^{\frac{n}{n-q}}\right\},$$

où k désigne une constante.

Posons

$$U_\Theta = \varDelta U_{\Theta-1} \qquad (\Theta = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}+3),$$

où $\mathfrak{N} = 2(m-1)+2(n-1)+2(p-1)+2(q-1)$. Il est alors aisé de voir qu'on peut trouver de même l'inégalité suivante de la même forme que (11.5):

$$(11.6)\qquad |U_\Theta| \leqslant k \exp.\left\{-A|\sigma|^{\frac{m}{m-p}} - B|\tau|^{\frac{n}{n-q}}\right\}.$$

Par conséquent, si l'on désigne

$$(11.7)\qquad V = \sum_{\Theta=0}^{\mathfrak{N}+3} b_\Theta U_\Theta,$$

où b_Θ (en particulier $b_0 = 1$) sont des constantes qui seront déterminées plus loin, il est évident que cette fonction V vérifie l'équation (9.2), considérée comme fonction de $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$.

12. Nous pouvons maintenant démontrer que notre équation aux dérivées partielles (9.1) admet dans le domaine $\Omega\left(\begin{array}{c} -\infty \leqslant \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \leqslant \infty \\ 0 \leqslant y_1 \leqslant a \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant b \end{array}\right)$ une et une seule solution $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° u est égale à la fonction donnée $P(x_1, x_2, y_2)$ sur $y_1 = 0$,

2° u est égale à la fenction donnée $Q(x_1, x_2, y_1)$ sur $y_2 = 0$,

3° le produit

$$(12.1)\qquad u(x_1, x_2, y_1, y_2)\exp.\left\{-A|x_1|^{\frac{2m}{m-2p}} - B|x_2|^{\frac{2n}{n-2q}}\right\} \text{ reste fini.}$$

Il suffit, en effet, de décider que la solution, nulle sur $y_1 = 0$ et sur $y_2 = 0$ et de plus satisfaisant à la condition (12.1) est nulle partout dans notre domaine Ω. Supposons donc que la solution $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ n'est pas nulle au voisinage d'un point $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0)$ mais que cette fonction est identiquement nulle sur $y_1 = 0$ et sur $y_2 = 0$. Désignons par $\mathfrak{M}_3$ une multiplicité d'ordre 3 dans notre domaine Ω. Parce que u et V satisfont respectivement aux équations aux dérivées partielles (9.1) et (9.2), on a

$$(11.2)\qquad 0 = \iiiint_\Omega \{VF(u) - u\Phi(V)\}\, d\Omega \qquad (d\Omega \equiv d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2)$$

$$= \iiiint_\Omega \left[\left\{V\frac{\partial^{m+n}u}{\partial\xi_1{}^m\partial\xi_2{}^n} - (-1)^{m+n}u\frac{\partial^{m+n}V}{\partial\xi_1{}^m\partial\xi_2{}^n}\right\} - \left\{V\frac{\partial^{p+q}u}{\partial\eta_1{}^p\partial\eta_2{}^q} - (-1)^{p+q}u\frac{\partial^{p+q}V}{\partial\eta_1{}^p\partial\eta_2{}^q}\right\}\right] d\Omega.$$

Or on peut supposer que notre domaine Ω est limité par trois multiplicités d'ordre 3 :

$$y_1=0, \qquad y_2=0, \qquad \text{et } \mathfrak{M}_3 : y_1 = Y(x_1, x_2, y_2)$$

qui n'est pas parallèle à $y_1=0$ ou à $y_2=0$. On peut donc en déduire l'égalité suivante :

$$(12.3) \qquad 0=\iiint_{\mathfrak{M}_3}\{\mathfrak{A}\cos(N,\xi_1)+\mathfrak{B}\cos(N,\xi_2)-\mathfrak{C}\cos(N,\eta_1) - \mathfrak{D}\cos(N,\eta_2)\}\,d\mathfrak{M}_3,$$

où N désigne la normale intérieure de cette $\mathfrak{M}_3$, et où

$$(12.4)\begin{cases} \mathfrak{A} \equiv \sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left\{\dfrac{\partial^s V}{\partial\xi_1^{\,s}}\dfrac{\partial^{(m-1-s)+n}u}{\partial\xi_1^{\,m-1-s}\partial\xi_2^{\,n}}+(-1)^n\dfrac{\partial^{s+n}V}{\partial\xi_1^{\,s}\partial\xi_2^{\,n}}\dfrac{\partial^{m-1-s}u}{\partial\xi_1^{\,m-1-s}}\right\}, \\ \mathfrak{B} \equiv \sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\left\{\dfrac{\partial^t V}{\partial\xi_2^{\,t}}\dfrac{\partial^{m+(n-1-t)}u}{\partial\xi_1^{\,m}\partial\xi_2^{\,n-1-t}}+(-1)^m\dfrac{\partial^{m+t}V}{\partial\xi_1^{\,m}\partial\xi_2^{\,t}}\dfrac{\partial^{n-1-t}u}{\partial\xi_2^{\,n-1-t}}\right\}, \\ \mathfrak{C} \equiv \sum_{s_1=0}^{p-1}(-1)^{s_1}\left\{\dfrac{\partial^{s_1}V}{\partial\eta_1^{\,s_1}}\dfrac{\partial^{(p-1-s_1)+q}u}{\partial\eta_1^{\,p-1-s_1}\partial\eta_2^{\,q}}\right. \\ \qquad\qquad\qquad \left.+(-1)^q\dfrac{\partial^{s_1+q}V}{\partial\eta_1^{\,s_1}\partial\eta_2^{\,q}}\dfrac{\partial^{p-1-s_1}u}{\partial\eta_1^{\,p-1-s_1}}\right\}, \\ \mathfrak{D} \equiv \sum_{t_1=0}^{q-1}(-1)^{t_1}\left\{\dfrac{\partial^{t_1}V}{\partial\eta_2^{\,t_1}}\dfrac{\partial^{p+(q-1-t_1)}u}{\partial\eta_1^{\,p}\partial\eta_2^{\,q-1-t_1}}\right. \\ \qquad\qquad\qquad \left.+(-1)^p\dfrac{\partial^{p+t_1}V}{\partial\eta_1^{\,p}\partial\eta_2^{\,t_1}}\dfrac{\partial^{q-1-t_1}u}{\partial\eta_2^{\,q-1-t_1}}\right\}. \end{cases}$$

Si l'on détermine donc des constantes b_Θ dans (11.7) telles qu'on ait

$$(12.5)\begin{cases} V=0, \\ \dfrac{\partial^s V}{\partial\xi_1^{\,s}}=0 \quad (s=1,2,\dots,m-1), \qquad \dfrac{\partial^t V}{\partial\xi_2^{\,t}}=0 \quad (t=1,2,\dots,n-1), \\ \dfrac{\partial^{s_1}V}{\partial\eta_1^{\,s_1}}=0 \quad (s_1=1,2,\dots,p-1), \qquad \dfrac{\partial^{t_1}V}{\partial\eta_2^{\,t_1}}=0 \quad (t_1=1,2,\dots,q-1), \\ \dfrac{\partial^{s+n}V}{\partial\xi_1^{\,s}\partial\xi_2^{n}}=0 \quad (s=0,1,2,\dots,m-2), \qquad \dfrac{\partial^{m+t}V}{\partial\xi_1^{\,m}\partial\xi_2^{\,t}}=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t=0,1,2,\dots,n-2), \\ \dfrac{\partial^{s_1+q}V}{\partial\eta_1^{\,s_1}\partial\eta_2^{\,q}}=0 \quad (s_1=0,1;2,\dots,p-2), \qquad \dfrac{\partial^{p+t_1}V}{\partial\eta_1^{\,p}\partial\eta_2^{\,t_1}}=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t_1=0,1,2,\dots,q-2), \\ W\equiv(-1)^{m+n}\dfrac{\partial^{(m-1)+(n-1)}V}{\partial\xi_1^{\,m-1}\partial\xi_2^{\,n-1}}=(-1)^{p+q}\dfrac{\partial^{(p-1)+(q-1)}V}{\partial\eta_1^{\,p-1}\partial\eta_2^{\,q-1}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{partout sur } \mathfrak{M}_3) \end{cases}$$

$$=0$$

sur $\mathfrak{M}_3$, tandis que

$$(12.6)\qquad \frac{\partial W}{\partial \xi_2}\cos(N, \xi_1)+\frac{\partial W}{\partial \xi_1}\cos(N, \xi_2)-\frac{\partial W}{\partial \eta_2}\cos(N, \eta_1)$$
$$-\frac{\partial W}{\partial \eta_1}\cos(N, \eta_2)$$

est égale à la fonction $H(x_1, x_2, y_2)$ qui vérifie l'inégalité

$$|H| \leqslant k \exp.\left\{-A|\sigma|^{\frac{m}{m-p}} - B|\tau|^{\frac{n}{n-q}}\right\},$$

alors on a

$$(12.7)\qquad \iint_{\mathfrak{M}_3} uHd\mathfrak{M}_3 = 0,$$

ce qui donne[1] que la fonction u doit être nulle partout sur $\mathfrak{M}_3$. On voit ainsi que u est nulle partout sur $\mathfrak{M}_3$. Par conséquent on voit que u est nulle partout dans notre domaine Ω.

Notre problème de l'unicité des solutions de l'équation aux dérivées partielles (2.10) est ainisi démontré dans le cas où la série double (1.2) converge.

Nous tenons à la fin de ce mémoire à remercier M. le professeur Tosizô Matumoto, qui a bien voulu lire notre manuscrit et nous aider par quelques remarques très utiles dont nous avons tiré grand profit.

1. On consulte ici le mémoire de Georg Hamel: Über die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind (Inaugural-Dissertation, Göttingen 1901, pp. 1–91).