

# Condition nécessaire et suffisante remplie par les Équations différentielles ordinaires sans points de Peano

par Hirosi Okamura

(Reçu le 3 Juin, 1941)

Il est bien connu, depuis Peano, qu'il existe une solution (au moins) issue d'un point initial donné, pour un système normal d'équations différentielles ordinaires avec seconds membres continus, et que certaines conditions imposées aux équations, par exemple, celle de Lipschitz, sont suffisantes pour qu'un système différentiel ne possède qu'une seule solution passant par un point quelconque du domaine de définition, ou en d'autres termes, que le système soit dépourvu de points de Peano, c'est-à-dire points d'embranchement des courbes solutions du système. Quelle est, alors, la condition nécessaire et, en même temps, suffisante pour que se trouve une telle circonstance d'unicité? C'est à cette question que nous allons donner une réponse dans le présent Mémoire.

Beaucoup d'études ont été faites concernant l'unicité des solutions des équations différentielles, mais elles tiennent, presque toutes, à des conditions seulement suffisantes de l'unicité, tandis que nous savons déjà quelques conditions nécessaires et suffisantes de l'unicité en un point initial donné<sup>1</sup>; d'ailleurs, ces conditions se rattachent, soit explicitement ou non, à une solution particulière issue du point initial considéré, et quelques-unes d'elles ne sont valables qu'au cas d'une équation unique. Pourtant, il s'agit ici, comme condition nécessaire et suffisante de l'unicité réalisée partout dans un voisinage d'un point du domaine,<sup>2</sup> d'une ou deux inégalités où interviennent seulement les équations et non pas leurs solutions; ce que personne n'a établi jusqu'aujourd'hui.

La condition obtenue est presque celle que nous avons donnée autrefois, comme condition suffisante de l'unicité pour une équation

---

1. Yosie, *Jap. J. Math.* **2** (1925), p. 161; Okamura, ces *Memoirs A* **17** (1934), p. 319 [Correction, *A* **19** (1936), p. 269], *ibid.* *A* **23** (1941), p. 225.

2. Il y a là une difficulté pour établir un pareil résultat pour le domaine entier et nous nous bornerons, dans ce Mémoire, au point de vue local.

unique<sup>1</sup>, et la démonstration ne s'effectue que d'après la méthode que nous avons introduite récemment<sup>2</sup>, complétée par quelque artifice d'une certaine moyenne intégrale.<sup>3</sup>

Ainsi, nous sommes à établir la proposition suivante :

**Théorème.**—*Considérons un système différentiel réel*

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

où  $F_i$  sont fonctions continues dans un domaine  $C$  de points  $(x, y_1, \dots, y_n)$ ; et supposons que ce système n'admet qu'une seule courbe solution issue à droite d'un point initial quelconque, intérieur de  $C$ . Alors, si nous prenons un domaine<sup>4</sup>

$$V: a < x < a', \quad b_i < y_i < b'_i \quad (i=1, \dots, n)$$

qui se trouve, ainsi que sa frontière, dans l'intérieur de  $C$ , il existe une fonction  $\Phi(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$  définie pour

$$W: a < x < a', \quad b_i < y_i < b'_i, \quad b_i < z_i < b'_i \quad (i=1, \dots, n),$$

continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, par rapport à ces  $2n+1$  variables  $(x, y_1, \dots, z_n)$  dans  $W$ , et telle que

$\Phi(x, y_1, \dots, z_n) > 0$  ou  $= 0$  selon que  $|y_1 - z_1| + \dots + |y_n - z_n| > 0$  ou  $= 0$ , et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, y_1, \dots, z_n)}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, y_1, \dots, z_n)}{\partial y_i} F_i(x, y_1, \dots, y_n) \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, y_1, \dots, z_n)}{\partial z_i} F'_i(x, z_1, \dots, z_n) \leq 0. \end{aligned}$$

La réciproque est évidente : sous ces conditions, il n'existe qu'une seule courbe solution issue à droite d'un point donné mais arbitraire de  $V$ .<sup>5</sup>

On a un résultat analogue pour l'unicité à gauche, en renversant cette fois, seulement, le sens de la dernière inégalité ci-dessus. Par conséquent, en combinant ces résultats, on aura une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité à droite et à gauche dans un voisinage d'un point donné; la condition exige l'existence de deux fonctions, telles que nous venons d'indiquer.

1. Loc. cit. (1934), p. 322, Corollaire.

2. Loc. cit. (1941).

3. MM. Kakeya et Tsuji ont utilisé cet artifice dans leurs recherches relatives aux équations différentielles ordinaires [Jap. J. Math. **16** (1939), p. 71].

4. On pourrait prendre un domaine plus général sans changement essentiel de nos raisonnements, mais nous n'insisterons pas sur ce point peu important pour le problème local où nous nous plaçons.

5. Parce que, pour deux solutions  $y_i = y_i(x)$ ,  $z_i(x)$ , la fonction  $\Phi[x, y_1(x), \dots, z_n(x)]$  n'est pas croissante par rapport à  $x$ , étant égale à 0 pour  $x$  initial, donc elle doit être identiquement nulle, d'où les identités  $y_i(x) = z_i(x)$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Nous allons démontrer ce Théorème, et après cela nous en ajouterons quelques exemples particuliers.

### I.—Démonstration du Théorème.

1. Nous nous bornerons, pour plus de clarté, au cas  $n=1$  ( $y, z, b, b'$  au lieu de  $y_1, z_1, b_1, b'_1$ ) et laissons de côté le cas général qui est tout à fait analogue à ce cas simple.

Considérons alors les équations simultanées

$$(F) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad \frac{dz}{dx} = F(x, z),$$

qui n'admet, d'après hypothèse, qu'une courbe solution issue à droite d'un point du domaine de définition, et, en particulier, une seule courbe située, jusqu'au bout, sur le plan  $y=z$ , partant à droite d'un point de ce plan.

Prenons un domaine fermé

$$V_1: \quad a-\varepsilon \leq x \leq a'+\varepsilon, \quad b-\varepsilon \leq y \leq b'+\varepsilon$$

avec  $\varepsilon$  positif mais assez petit, tel que  $V_1$  est contenu, avec sa frontière, dans l'intérieur de  $C$ , contenant  $V$  dans son intérieur, et prenons aussi un domaine fermé

$$W_1: \quad a-\varepsilon \leq x \leq a'+\varepsilon, \quad b-\varepsilon \leq y \leq b'+\varepsilon, \quad b-\varepsilon \leq z \leq b'+\varepsilon.$$

Cela étant, construisons, suivant les définitions que nous avons données récemment<sup>1</sup>, la fonction  $D(P, Q)$  pour le système (F) et pour le domaine  $W_1$ ,  $P$  et  $Q$  étant deux points quelconques de  $W_1$ . Cette fonction  $D(P, Q)$  jouit, comme nous avons indiqué<sup>1</sup>, des trois propriétés suivantes: 1°  $D(P, Q)$  est une fonction finie et continue de deux points quelconques  $P$  et  $Q$  de  $W_1$  et s'annule si et seulement si  $P$  et  $Q$  se trouvent sur une même courbe solution de (F), courbe située dans  $W_1$  (frontière comprise), sinon  $D(P, Q) > 0$ ; 2°  $D(P, Q)$  est une fonction décroissante de l'abscisse ( $x$ ) de  $Q$ , lorsqu'on fait varier le point  $Q$  sur une même courbe solution de (F), restant à droite de  $P$ ; 3°  $D(P, Q)$  satisfait à la condition de Lipschitz

$$|D(P, Q) - D(P, Q')| \leq Q \overline{Q'} \quad \text{pour } Q \text{ et } Q' \text{ d'une même abscisse } (x),$$

$\overline{QQ'}$  désignant la longueur du segment  $QQ'$ .

2. Nous introduisons ensuite une fonction  $\delta(Q)$ ,  $Q$  étant un point arbitraire de  $W_1$ , telle que  $\delta(Q)$  soit le minimum de  $D(P, Q)$  pour toutes les positions du point  $P$  pris sur le plan  $y=z$ , ayant son abscisse ( $x$ ) inférieure ou égale à celle de  $Q$ , c'est-à-dire,  $P$  étant à gauche de  $Q$ . Alors, par la nature des fonctions continues, il existe un point  $P$  de  $W_1$ , sur le plan  $y=z$  et à gauche de  $Q$ , tel que

1. Loc. cit. (1941). § II.

$D(P, Q) = \delta(Q)$ ; donc, d'après hypothèse et d'après la propriété de  $D(P, Q)$  (1°, n° 1),  $\delta(Q)$  s'annule si et seulement si le point  $Q$  vient sur le plan  $y=z$ , sinon  $\delta(Q) > 0$ . De plus,  $\delta(Q)$  est une fonction continue de  $Q$ , décroissante par rapport à l'abscisse ( $x$ ) de  $Q$  lorsque  $Q$  se meut sur une même courbe solution de (F), et enfin, elle vérifie la condition de Lipschitz

$$|\delta(Q) - \delta(Q')| \leq \overline{QQ'} \text{ pour deux points } Q \text{ et } Q' \text{ de même abscisse } (x).$$

Par conséquent, si nous posons

$$\varphi(x, y, z) = \delta(Q), \quad Q: (x, y, z),$$

la fonction  $\varphi(x, y, z)$  est, à peu près, ce que nous cherchons et il nous reste à la substituer par une autre  $\Phi(x, y, z)$ , douée des dérivées continues, conservant les propriétés essentielles de  $\varphi$ .

3. À cet effet, posons

$$\psi(x, y, z) = e^{-x}\varphi(x, y, z),$$

et puis

$$\chi(x, y, z) = \frac{1}{(2\rho)^3} \int_{x-\rho}^{x+\rho} d\xi \int_{y-\rho}^{y+\rho} d\eta \int_{z-\rho}^{z+\rho} \psi(\xi, \eta, \zeta) d\zeta$$

pour tous points  $(x, y, z)$  de  $W$  tels que  $y \neq z$ , où  $\rho$  est une fonction positive de  $|y-z|$ :

$$\rho = \rho(r) > 0 \text{ pour } r = |y-z| > 0,$$

que nous préciserons, de plus en plus, dans la suite.

Supposons d'abord que

$$\rho(r) < \varepsilon \quad (0 < r < \infty);$$

donc la fonction  $\chi(x, y, z)$  est bien définie dans  $W$  sauf sur le plan  $y=z$ .

Nous supposons ensuite que  $\rho(r)$  est une fonction continue, ainsi que sa dérivée  $\rho'(r)$ , pour  $0 < r < \infty$ . Par conséquent, la fonction  $\chi(x, y, z)$  possède toutes ses dérivées partielles du premier ordre continues, pour  $y \neq z$ , dans  $W$ .

Faisons hypothèse que  $\rho(r)$  tende vers 0 avec  $r$ , de sorte que  $\chi(x, y, z)$  est continue dans  $W$ , ayant la valeur 0 sur le plan  $y=z$ .

Enfin, restreignons  $\rho(r)$  et  $|\rho'(r)|$  à être suffisamment petites de telle sorte que soit vérifiée l'inégalité

$$\frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial y} F(x, y) + \frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial z} F(x, z) \leq 0$$

pour  $y \neq z$ .

En effet, on peut écrire

$$\chi(x, y, z) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(x + \rho\theta, y + \rho\theta_1, z + \rho\theta_2) d\theta d\theta_1 d\theta_2,$$

et, si  $(x, y, z)$  est un point de  $W$  tel que  $y \neq z$ , on aura, en prenant

un point voisin  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  sur la courbe solution de (F) issue à droite du point  $(x, y, z)$  ( $\bar{x} > x$ ), l'inégalité

$$\chi(x, y, z) \cong \chi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

d'où découle l'inégalité précédente. Pour démontrer cette dernière inégalité, on prouvera que, pour  $-1 \leq \theta, \theta_1, \theta_2 \leq 1$ ,

$$(1) \quad \begin{aligned} \phi(x + \rho\theta, y + \rho\theta_1, z + \rho\theta_2) &\cong \phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, \bar{y} + \bar{\rho}\theta_1, \bar{z} + \bar{\rho}\theta_2) \\ [\rho = \rho(r) = \rho(|y - z|), \quad \bar{\rho} = \rho(\bar{r}) = \rho(|\bar{y} - \bar{z}|)]. \end{aligned}$$

Si  $\bar{x} - x$  est assez petit, la courbe solution de (F) issue à droite du point  $(x + \rho\theta, y + \rho\theta_1, z + \rho\theta_2)$  se prolonge, indifféremment pour  $-1 \leq \theta, \theta_1, \theta_2 \leq 1$ , jusqu'au point de l'abscisse  $(x)$  égale à  $\bar{x} + \bar{\rho}\theta$ , dont nous désignerons les coordonnées par  $(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, Y, Z)$ , parce que  $(\bar{x} + \bar{\rho}\theta) - (x + \rho\theta)$  est aussi petit<sup>1</sup>; et nous avons, d'après les propriétés de  $\delta(Q)$  [ $= \varphi(x, y, z) = e^x \psi(x, y, z)$ ],

$$(2) \quad \phi(x + \rho\theta, y + \rho\theta_1, z + \rho\theta_2) \cong e^{(\bar{x} + \bar{\rho}\theta) - (x + \rho\theta)} \phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, Y, Z)$$

et

$$(3) \quad \begin{aligned} &|\phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, Y, Z) - \phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, \bar{y} + \bar{\rho}\theta_1, \bar{z} + \bar{\rho}\theta_2)| \\ &\leq e^{-(\bar{x} + \bar{\rho}\theta)} \sqrt{[Y - (\bar{y} + \bar{\rho}\theta_1)]^2 + [Z - (\bar{z} + \bar{\rho}\theta_2)]^2}. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de démontrer que

$$(4) \quad e^{(\bar{x} + \bar{\rho}\theta) - (x + \rho\theta)} \phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, Y, Z) \cong \phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, \bar{y} + \bar{\rho}\theta_1, \bar{z} + \bar{\rho}\theta_2)$$

et

$$(5) \quad (\bar{x} + \bar{\rho}\theta) - (x + \rho\theta) > 0,$$

parce que les inégalités (2) et (4) entraînent (1). Or, l'inégalité (4) revient, au moyen de (3) et (5), à une autre telle que

$$(6) \quad \begin{aligned} &[(\bar{x} + \bar{\rho}\theta) - (x + \rho\theta)] \phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, Y, Z) \\ &\cong e^{-(\bar{x} + \bar{\rho}\theta)} \sqrt{[Y - (\bar{y} + \bar{\rho}\theta_1)]^2 + [Z - (\bar{z} + \bar{\rho}\theta_2)]^2}. \end{aligned}$$

Pour réaliser l'inégalité (5), il suffit que l'on ait

$$\left| \frac{\bar{\rho} - \rho}{\bar{x} - x} \right| < 1,$$

mais ce premier membre tend, pour  $\bar{x} \rightarrow x + 0$ , vers la quantité

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\rho}{dx} \right| &= \left| \frac{d\rho}{dr} \frac{dr}{dx} \right| = |\rho'(r)| \left| \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right| \\ &= |\rho'(r)| \cdot |F(x, y) - F(x, z)|, \end{aligned}$$

qui est plus petite que 1 si nous prenons  $\rho'(r)$  assez petit pour  $0 < r < \infty$ , ce qui est possible. Quant à l'autre inégalité (6), c'est-à-dire

$$e^{\bar{x} + \bar{\rho}\theta} \phi(\bar{x} + \bar{\rho}\theta, Y, Z) \cong \frac{1}{(\bar{x} + \bar{\rho}\theta) - (x + \rho\theta)} \sqrt{[Y - (\bar{y} + \bar{\rho}\theta_1)]^2 + [Z - (\bar{z} + \bar{\rho}\theta_2)]^2}.$$

dont le premier membre tend vers

1. Cf. la formule (5) suivante.

$$e^{x+\rho\theta}\psi(x+\rho\theta, y+\rho\theta_1, z+\rho\theta_2) = \varphi(x+\rho\theta, y+\rho\theta_1, z+\rho\theta_2)$$

pour  $\bar{x} \rightarrow x+0$ , uniformément par rapport à  $(\theta, \theta_1, \theta_2)$ , le second membre ne surpasse pas

$$\sqrt{\left(\frac{Y-(\bar{y}+\bar{\rho}\theta_1)}{(\bar{x}+\bar{\rho}\theta)-(x+\rho\theta)}\right)^2 + \left(\frac{Z-(\bar{x}+\bar{\rho}\theta_2)}{(\bar{x}+\bar{\rho}\theta)-(x+\rho\theta)}\right)^2},$$

où

$$\frac{Y-(\bar{y}+\bar{\rho}\theta_1)}{(\bar{x}+\bar{\rho}\theta)-(x+\rho\theta)} = \frac{Y-(y+\rho\theta_1)}{(\bar{x}+\bar{\rho}\theta)-(x+\rho\theta)} - \frac{\frac{\bar{y}-y}{\bar{x}-x} + \frac{\bar{\rho}-\rho}{\bar{x}-x}\theta_1}{1 + \frac{\bar{\rho}-\rho}{\bar{x}-x}\theta_1}$$

qui tend, pour  $\bar{x} \rightarrow x+0$ , vers

$$F(x+\rho\theta, y+\rho\theta_1) - \frac{F(x, y) + \frac{d\rho}{dx}\theta_1}{1 + \frac{d\rho}{dx}\theta_1}$$

avec

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho'(r) \frac{y-z}{r} [F(x, y) - F(x, z)] \quad (r = |y-z|),$$

uniformément par rapport à  $(\theta, \theta_1, \theta_2)$ , et de même pour

$$\frac{Z-(\bar{z}+\bar{\rho}\theta_2)}{(\bar{x}+\bar{\rho}\theta)-(x+\rho\theta)}.$$

Ces dernières quantités deviennent inférieures, en module, à une fonction positive et continue de  $r = |y-z| > 0$ , et arbitraire, par un choix convenable de  $\rho(r)$ , grâce à la continuité uniforme de  $F$ . Cependant, la limite précédente  $\varphi(x+\rho\theta, y+\rho\theta_1, z+\rho\theta_2)$  est, en supposant  $\rho(r) < \frac{r}{2}$  par exemple, supérieure à une fonction positive et continue de  $r$  pour  $r > 0$ , parce que la fonction  $\varphi(x, y, z)$  est continue dans  $W_1$  (frontière incluse) et positive pour  $r > 0$ . En somme, il suffit de prendre  $\rho(r)$  et  $|\rho'(r)|$  suffisamment petits.

4. La fonction  $\chi(x, y, z)$  remplit toutes les conditions exigées à  $\Phi(x, y, z)$  sauf l'existence et la continuité des dérivées pour  $y=z$ . Pour compléter ce dernier point, il suffit d'adopter<sup>1</sup>, au lieu de  $\chi(x, y, z)$ , la fonction  $\omega[\chi(x, y, z)]$  de  $\chi$ , où

$$\omega(u) = \int_0^u \omega'(u) du, \quad \omega'(u) > 0 \quad (u > 0),$$

la dérivée  $\omega'(u)$  étant continue pour  $u \geq 0$  et infiniment petite avec  $u$  de telle manière que

1. Cf. loc. cit. (1941), p. 231.

$$\omega'(u) = o\left(\frac{1}{\max_{\chi(x, y, z)=u} [|\chi'_x(x, y, z)|, |\chi'_y(x, y, z)|, |\chi'_z(x, y, z)|]}\right).$$

Alors la fonction

$$\Phi(x, y, z) = \omega[\chi(x, y, z)]$$

possède les dérivées continues et nulles pour  $y=z$ , et satisfait tout à fait à l'énoncé du Théorème. C. q. f. d.

## II.—Exemples.

L'existence d'une telle fonction  $\Phi$ , comme dans l'énoncé du Théorème, peut se justifier directement pour les cas particuliers suivants :

1. Dans le cas de la condition de Lipschitz :

$$|F_i(x, y_1, \dots, y_n) - F_i(x, z_1, \dots, z_n)| \leq K\sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \dots + (y_n - z_n)^2}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

on peut poser

$$\Phi(x, y_1, \dots, y_n) = e^{-2nKx} [(y_1 - z_1)^2 + \dots + (y_n - z_n)^2].$$

2. Un cas d'une équation différentielle ordinaire sans points de Peano qui ne rentre pas à celui de Lipschitz est donné par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

où  $f(x, y)$  est une fonction douée de dérivées continues  $f'_x(x, y)$  et  $f'_y(x, y)$ ,  $f'_y(x, y) \neq 0$ , dans un domaine. On a, en effet, la solution générale

$$f(x, y) = \text{const.}$$

Alors, on peut prendre, dans l'énoncé du Théorème,

$$\Phi(x, y, z) = [f(x, y) - f(x, z)]^2.$$

3. Un autre exemple intéressant est dû à M. Carathéodory<sup>1</sup> ; c'est le système suivant :

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y',$$

où la fonction  $f(x, y)$  est supposée continue, avec ses dérivées premières, dans un domaine. Si nous supposons ces dérivées bornées, en module, par  $L$ , on peut adopter, dans le Théorème ( $y_1 = y, y_2 = y'$ ), que

$$\Phi(x, y, y', z, z') = e^{-4Lx} \{4L^2(y - z)^2 + [y' - f(x, y) - z' + f(x, z)]^2\},$$

parce que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y' \right)$$

1. Variationsrechnung (1936), p. 17.

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \left( \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \right) \\
& = {}_4L e^{-4Lx} \{ -4L^2(y-z)^2 - [y' - f(x, y) - z' + f(x, z)]^2 \\
& \quad + 2L(y-z)(y' - z') \} \\
& = {}_4L e^{-4Lx} \{ -4L^2(y-z)^2 - (y' - z')^2 + 2(y' - z')[f(x, y) - f(x, z)] \\
& \quad - [f(x, y) - f(x, z)]^2 + 2L(y-z)(y' - z') \} \\
& \leq {}_4L e^{-4Lx} \{ -4L^2(y-z)^2 - (y' - z')^2 + 2L|y' - z'| \cdot |y - z| \\
& \quad + 2L|y - z| \cdot |y' - z'| \} \\
& = -{}_4L e^{-4Lx} (2L|y - z| + |y' - z'|)^2 \\
& \leq 0.
\end{aligned}$$


---