Sur l'Existence de Solutions pour une Équation différentielle ordinaire

par **Hirosi Okamura**

(Reçu le 7 Novembre, 1941)

Nous avons établi récemment une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système normal d'équations différentielles ordinaires avec seconds membres continus n'admette qu'une solution unique à droite d'un point initial, pris arbitrairement dans un voisinage d'un point intérieur du domaine de définition.[1] Pour le cas d'une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=F(x,\ y) \tag{1}$$

avec une fonction F continue dans un domaine D de points (x, y), la condition exprime l'existence d'une fonction $\Phi(x, y, z)$, qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans un domaine formé de tous points (x, y, z) correspondant à deux points (x, y) et (x, z) contenus dans un voisinage d'un point considéré de D, et telle que

$$\Phi(x,\ y,\ z)>0 \text{ ou } =0 \text{ selon que } |y-z|>0 \text{ ou } =0 \tag{2}$$

et

$$\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial y}F(x,\ y)+\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial z}F(x,\ z)\leqq 0. \tag{3}$$

Dans le présent mémoire, nous supposerons que cette condition soit réalisée d'avance et nous donnerons une généralisation de la méthode de Cauchy-Lipschitz pour démontrer l'existence d'une solution dans ce cas. On sait, en réalité, la dite existence, d'après Peano, néanmoins nos raisonnements sont très simples et c'est une généralisation ultime dans un certain sens, parce que, si l'on se place dans des circonstances plus étendues, on ne peut plus assurer l'unicité des solutions. En outre, la conception utilisée dans cette méthode nous permet de démontrer l'existence d'une ou plusieurs solutions en un point singulier, ou des solutions asymptotiques, d'une équation différentielle, ce que nous exposerons aussi dans la suite.

---

1. Okamura, ces Memoirs A **24** (1942), p. 21.

Il est à remarquer que des résultats analogues subsisteront pour un système différentiel de plusieurs équations simultanées.

I.—Méthode de Cauchy-Lipschitz.

Supposons, pour fixer les idées, que, dans l'équation (1), $F(x, y)$ soit une fonction continue dans un rectangle fermé

$$R: 0 \leqq x \leqq a, \quad |y| \leqq b,$$

avec $a \leqq \frac{b}{M}$ $(a, b, M > 0)$, tel que $|F(x, y)| \leqq M$ dans R, et que l'on ait une fonction $\Phi(x, y, z)$, continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, pour $0 \leqq x \leqq a$, $|y| \leqq b$, $|z| \leqq b$ et satisfaisant aux conditions (2) et (3) dans la même région des variables (x, y, z).

Alors, pour établir la solution de (1) issue à droite de l'origine (0, 0), la méthode de Cauchy-Lipschitz consiste à former, comme solution approximative, une ligne polygonale issue de l'origine, telle que, dans son équation

$$y = \varphi(x) \quad [0 \leqq x \leqq a, \ \varphi(0) = 0]$$

on ait

$$|\varphi'(x) - F[x, \varphi(x)]| < \varepsilon$$

pour $0 \leqq x \leqq a$ (sauf, bien entendu, un nombre fini de points x correspondant à des points anguleux de la ligne polygonale) avec la borne d'erreur $\varepsilon (>0)$ arbitrairement assignée, ce qui est possible, évidemment, d'une infinité de manières, et puis à démontrer la convergence de cette fonction vers une solution $y(x)$ de (1) avec le décroissement indéfini de ε, au moyen de la condition de Lipschitz imposée à la fonction $F(x, y)$. Mais cette dernière condition n'est nullement nécessaire, et on peut démontrer la convergence de $\varphi(x)$, par l'hypothèse de l'existence de Φ faite tout à l'heure, comme il suit.

Soient, en effet, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux telles solutions approximatives avec la même borne d'erreur ε comme ci-dessus. Alors on a

$$\Phi[0, \varphi(0), \psi(0)] = \Phi(0, 0, 0) = 0 \qquad [\text{par } (2)]$$

et

$$\Phi[x, \varphi(x), \psi(x)] = \int_0^x \frac{d}{dx}\Phi[x, \varphi(x), \psi(x)]dx$$

$$= \int_0^x \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\psi'(x)\right]_{\substack{y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)}} dx$$

$$\leqq \int_0^x \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial y}[\varphi'(x) - F(x, y)] + \frac{\partial \Phi}{\partial z}[\psi'(x) - F(x, z)]\right\}_{''} dx$$

$$[\text{par } (3)]$$

$$\leqq \int_0^x \left(\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| \right)_{\prime\prime} \varepsilon dx$$

$$\leqq 2K\varepsilon x \leqq 2K\varepsilon a$$

en supposant que $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| < K$, $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| < K$ dans R. La dernière quantité $2K\varepsilon a$ tend vers zéro avec ε, donc d'après la condition (2) et la continuité de Φ, on a

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \eta \qquad (0 \leqq x \leqq a)$$

avec une borne η dépendant seulement de ε et infiniment petite en même temps que ε. Ce résultat suffit à conclure la convergence uniforme de $\varphi(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$ vers une fonction $y(x)$ pour $\varepsilon \to 0$ et $y(x)$ est la solution voulue parce que, comme limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'inégalité

$$\left| \varphi(x) - \int_0^x F[x,\ \varphi(x)]dx \right| \leqq \varepsilon x,$$

on a

$$y(x) = \int_0^x F[x,\ y(x)]dx.$$

La solution issue à droite de l'origine (0, 0) est unique et notre condition contient, comme cas particulier, celle de Lipschitz, ce que nous avons indiqué à plusieurs reprises (loc. cit.).

II.—Existence de solutions asymptotiques.

En vue d'applications ou d'extensions naturelles des idées précédentes, nous nous placerons maintenant dans les hypothèses suivantes :

Étant donnée l'équation (1), supposons que la fonction $F(x, y)$ soit continue dans un domaine V,[1] qui renferme dans son intérieur, pour $a < x < b$ (a, b : finis ou infinis), une courbe

$$y = \psi(x) \quad (a < x < b)$$

où la fonction $\psi(x)$ soit continue, ainsi que sa dérivée $\psi'(x)$, pour $a < x < b$ et que la partie du domaine V entre deux parallèles $x = a'$, $x = b'$, soit bornée pour tout choix de a' et b' tel que $a < a' < b' < b$. Supposons ensuite qu'il existe une fonction $\Phi(x, y, z)$ de telle façon que :

1° $\Phi(x, y, z)$ soit continue dans un domaine W de points (x, y, z) correspondant à deux points (x, y) et (x, z) de V et satisfasse à la condition (2) dans W, et que ses dérivées partielles Φ'_x, Φ'_y et Φ'_z

1. Pour appliquer le résultat, on doit choisir convenablement le domaine V plus ou moins étroit (ou large) selon le but.

soient continues dans W sauf des points (x, y, z) tels que $y=z$, c'est-à-dire qu'elles sont continues dans la partie de W telle que $y\neq z$, et elles vérifient l'inégalité (3) (pour $y\neq z$, bien entendu);

2° on ait, dans W,

$$|\Phi'_z(x, y, z)|\leqq L(x) \quad (a<x<b,\ y\neq z),$$

où la fonction $L(x)$ est telle que le produit $L(x)|\psi'(x)-F[x, \psi(x)]|$ soit sommable pour $a<x<b'<b$, c'est-à-dire

$$\int_a^{b'} L(x)|\psi'(x)-F[x,\ \psi(x)]|\,dx<\infty \qquad \text{pour } a<b'<b\,;$$

3° la fonction $\Phi[x, y, \psi(x)]$ possède une succession de valeurs aux limites continue sur la frontière de V pour $a<x<b$, donc on peut considérer que la fonction $\Phi[x, y, \psi(x)]$ est continue dans V et sur la frontière de V pour $a<x<b$, et l'on a, pour tout point $(\bar{x}, \bar{y})$ sur la frontière de V $(a<\bar{x}<b)$, l'inégalité

$$\Phi[\bar{x},\ \bar{y},\ \psi(\bar{x})]\geqq\omega(\bar{x})>0$$

avec une fonction $\omega(x)$ continue et positive pour $a<x<b$.

Sous ces hypothèses, nous démontrerons les deux propositions suivantes (A et B).

A.—*Si, pour un point* (x_0, y_0) *intérieur de* V $(a<x_0<b)$, *on a*

$$\Phi[x_0,\ y_0,\ \psi(x_0)]+\int_{x_0}^{x} L(x)|\psi'(x)-F[x,\ \psi(x)]|\,dx<\omega(x) \qquad \textit{pour } x_0\leqq x<b,$$

alors la solution (unique) de l'équation (1) *partant à droite du point* (x_0, y_0) *peut se prolonger jusque* $x=b$, *passant dans l'intérieur de* V.

On sait, en effet, l'existence unique d'une telle solution au vosinage à droite du point $x=x_0$, en vertu du § I par exemple. Donc, il nous reste la possibilité du prolongement à droite jusque $x=b$. Soit $y=y(x)$ la solution de (1) située dans V pour $x_0\leqq x\leqq x_1<b$ et considérons la fonction $\Phi[x\ y(x), \psi(x)]$. Alors, en désignant par ξ la plus grande des valeurs x telles que $y(x)=\psi(x)$ $(x_0\leqq x\leqq x_1)$ s'il en existe, sinon en posant $\xi=x_0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\Phi[x_1,\ y(x_1),\ \psi(x_1)]-\Phi[x_0,\ y(x_0),\ \psi(x_0)]\\
&\leqq\Phi[x_1,\ y(x_1),\ \psi(x_1)]-\Phi[\xi,\ y(\xi),\ \psi(\xi)] && \text{[par (2)]}\\
&=\int_\xi^{x_1}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\psi'(x)\right]_{\substack{y=y(x)\\ z=z(x)}}dx\\
&\leqq\int_\xi^{x_1}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial z}[\psi'(x)-F(x,\ z)]\right\}_{\prime\prime}dx && \text{[par (3)]}\\
&\leqq\int_\xi^{x_1}L(x)|\psi'(x)-F[x,\ \psi(x)]|\,dx && \text{(par 2°)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi[x_1,\ y(x_1),\ \psi(x_1)] \leqq \Phi[x_0,\ y(x_0),\ \psi(x_0)] + \int_{x_0}^{x_1} L(x)\,|\,\psi'(x) - F[x,\ \psi(x)]\,|\,dx.$$

Ce second membre est une fonction continue de x_1, inférieure, par hypothèse, à la fonction continue $\omega(x_1)$, donc d'après 3°, la courbe $y=y(x)$ ne s'approche pas de la frontière de V jusque $x=b$, c. q. f. d.

B.—*Si l'on a*

$$\int_a^x L(x)\,|\,\psi'(x) - F[x,\ \psi(x)]\,|\,dx < \omega(x) \qquad \textit{pour } a < x < b,$$

alors il existe une courbe solution de (1), $y=Y(x)$ $(a<x<b)$, *située dans* V, *et* $y=Y(x)$ *est la seule solution de* (1) *telle que la courbe* $y=Y(x)$ *est située dans* V *pour* x *suffisamment voisin de* a *et telle que*

$$\lim_{x\to a} \Phi[x,\ Y(x),\ \psi(x)] = 0.$$

À cet effet, désignons par $y=y_\alpha(x)$ une solution de (1) issue à droite du point $(\alpha,\ \psi(\alpha))$, qui se prolonge jusque $x=b$ d'après A. Alors, la fonction $y_\alpha(x)$ tend, pour $\alpha\to a$, uniformément dans l'intervalle $a'\leqq x\leqq b'$ $(a<a'<b'<b)$ vers une fonction (qui est nécessairement une solution de (1)), parce que, si nous prenons deux nombres α et α' tels que $a<\alpha<\alpha'<a'$, nous avons, comme dans la démonstration de A,

$$\Phi[\alpha',\ y_\alpha(\alpha'),\ \psi(\alpha')] \leqq \Phi[\alpha,\ y_\alpha(\alpha),\ \psi(\alpha)] + \int_\alpha^{\alpha'} L(x)\,|\,\psi'(x) - F[x,\ \psi(x)]\,|\,dx,$$

où

$$\Phi[\alpha,\ y_\alpha(\alpha),\ \psi(\alpha)] = \Phi[\alpha,\ \psi(\alpha),\ \psi(\alpha)] = 0 \qquad \text{[par (2)]},$$

et l'on a par (3), comme dans A, pour $a'\leqq x<b$,

$$\begin{aligned}\Phi[x,\ y_\alpha(x),\ y_{\alpha'}(x)] &\leqq \Phi[\alpha',\ y_\alpha(\alpha'),\ y_{\alpha'}(\alpha')]\\ &= \Phi[\alpha',\ y_\alpha(\alpha'),\ \psi(\alpha')],\end{aligned}$$

donc

$$\Phi[x,\ y_\alpha(x),\ y_{\alpha'}(x)] \leqq \int_\alpha^{\alpha'} L(x)\,|\,\psi'(x) - F[x,\ \psi(x)]\,|\,dx,$$

cette quantité étant infiniment petite pour $\alpha\to a$, $\alpha'\to a$, grâce à 2°. Il s'ensuit de là, d'après (2) et la continuité de Φ, la convergence de $y_\alpha(x)$. Posons

$$Y(x) = \lim_{\alpha\to a} y_\alpha(x).$$

Alors la courbe $y=Y(x)$ se trouve dans l'intérieur de V parce que, comme limite pour $\alpha\to a$ de l'inégalité facile [par (3) et 2°]

$$\Phi[x,\ y_\alpha(x),\ \psi'(x)] \leqq \int_\alpha^x L(x)\,|\,\psi'(x) - F[x,\ \psi(x)]\,|\,dx \quad (\alpha<x<b),$$

on a

$$\Phi[x,\ Y(x),\ \psi(x)] \leqq \int_a^x L(x)\,|\psi'(x) - F[x,\ \psi(x)]|\,dx,$$

qui est $<\omega(x)$ d'après hypothèse. Par conséquent, $y = Y(x)$ est une solution de (1) située dans V.

Inversement s'il existe une solution $y = y(x)$ de (1), située dans V pour x suffisamment voisin de a, telle que

$$\varliminf_{x\to a} \Phi[x,\ y(x),\ \psi(x)] = 0,$$

on a, comme précédemment,

$$\Phi[x,\ y(x),\ y_\alpha(x)] \leqq \Phi[\alpha,\ y(\alpha),\ \psi(\alpha)] \quad (a<\alpha<x)$$

et, en faisant tendre α vers a, on arrive à l'égalité

$$\Phi[x,\ y(x),\ Y(x)] = 0$$

valable au voisinage de $x = a$, qui exige que $y(x) = Y(x)$, d'après (2), c. q. f. d.

Exemple.—Nous appliquerons ces résultats à des recherches de solutions asymptotiques dans le cas particulier suivant.[1]

Soit une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(x,\ y)$$

où $F(x,\ y)$ est continue pour $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leqq c$ $(c>0)$, vérifiant l'inégalité

$$\frac{F(x,\ y) - F(x,\ z)}{y - z} \leqq -k < 0 \quad (y \neq z,\ |y| \leqq c,\ |z| \leqq c)$$

et telle que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,\ 0) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x,\ 0) = 0.$$

Sous ces hypothèses nous démontrerons qu'il y a une famille à un paramètre de solutions asymptotiques à zéro pour $x \to +\infty$ et que, d'autre part, il existe une solution asymptotique à zéro et une seule pour $x \to -\infty$.

Posons, à cet effet, dans les résultats précédents,

$$\Phi(x,\ y,\ z) = e^{kx}|y - z|,\quad \psi(x) = 0,\quad L(x) = e^{kx},$$

---

1. Cf. Cotton, Approximations successives et équations différentielles (Mémorial des sci. math. XXVIII) (1928), p. 36-37. Il s'agit ici des solutions asymptotiques et nous ne traiterons pas le cas d'un point singulier x fini qui revient au cas précédent (x infini) par un changement de variable, comme indique M. Cotton (loc. cit., n° 16). Mais ce second cas (x fini) a été l'objet d'un travail récent de M. Haag [Bull. Sci. math. 2e sér. **60**$_1$ (1936), p. 131], qui emploie directement la méthode d'approximations successives (comme M. Cotton), tandis que notre méthode s'y applique directement aussi. Nos résultats seront un peu différents de ceux de MM. Cotton et Haag.

en prenant le domaine V défini par

$$|y|<\chi(x), \quad 0<\chi(x)\leqq c$$

avec une fonction continue $\chi(x)$ pour $-\infty<x<+\infty$. On aura alors

$$\omega(x)=\chi(x)e^{kx}.$$

Ainsi se vérifient toutes les conditions 1°–3° ($a=-\infty$, $-\infty<b\leqq+\infty$).

La condition de l'énoncé A s'exprime par l'inégalité

$$e^{kx_0}|y_0|+\int_{x_0}^{x}e^{kx}|F(x,\ 0)|\,dx<\chi(x)e^{kx} \quad \text{pour } x_0\leqq x<+\infty,$$

qui est réalisée pour x_0 suffisamment grand tel que

$$|F(x,\ 0)|<kc \quad \text{pour } x_0\leqq x<+\infty$$

et pour $|y_0|$ suffisamment petit, avec une fonction convenable $\chi(x)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi(x)=0$, parce que nous avons évidemment

$$\int_{x_0}^{x}e^{kx}|F(x,\ 0)|\,dx\begin{cases}<ce^{kx} & (x_0\leqq x<+\infty),\\ =o(e^{kx}) & (x\to+\infty).\end{cases}$$

Donc, d'après la proposition A, il y a une famille de solutions $y=y(x,\ y_0)$ à un paramètre y_0 [$y(x_0,\ y_0)=y_0$] asymptotiques à zéro pour $x\to+\infty$ [$|y(x,\ y_0)|<\chi(x)$].

D'autre part, la condition de B revient à

$$\int_{-\infty}^{x}e^{kx}|F(x,\ 0)|\,dx<\chi(x)e^{kx} \quad \text{pour } -\infty<x<b,$$

ce qui est réalisé en prenant convenablement le nombre b et en posant $\chi(x)=c$ ou bien $\chi(x)\to 0$ ($x\to-\infty$). Donc, en vertu du résultat B, il y a une seule solution asymptotique à zéro pour $x\to-\infty$.