数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 37-41

Hilbert cusp form に付随する L 関数の収束性

市原由美子 (Yumiko Ichihara)
広島大学大学院工学研究科情報工学専攻
Graduate School of Engineering,
Hiroshima University

1 一変数 cusp form に付随する L 関数について

まず、一変数保型形式の L 関数についての基本的な事実を紹介する。f を $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する整数ウエイト k の正規化された Hecke eigen cusp form とする。この時、∞ での Fourier 級数表示として、$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z}$ と書くことができる。この f を用いて、f に付随する L 関数を次のように定義する。

$$L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

これは $Re(s)>(k+1)/2$ で絶対収束している。この絶対収束性は Ramanujan 予想 $a_n \ll n^{(k-1)/2}$ が得られているので、その評価からすぐに導ける。しかし、これは、そんなに大袈裟な事実を持ち出さなくとも、Rankin の 1939 年の結果である Fourier 係数の大きさの平均の漸化式からすぐに分かることである。Rankin によって得られた漸化式は次の通り。([7] 参照)

$$\sum_{n\le x}|a_n| \doteq \frac{12(4\pi)^{k-1}}{\Gamma(k+1)}<f,f>x^k+O(x^{k-2/5})$$

ここで $<f,f>$ は Petersson 内積であるとする。さて、$L_f(s)$ 関数に関しては次のように関数等式が与えられている。

$$\Lambda_f(s)=i^k\Lambda_f(k-s)$$

ここで、$\Lambda_f(s)$ は

$$\Lambda_f(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s)$$

である。これらの情報と Phragmén-Lindelöf の定理を用いることで、すぐに clitical line $s=k/2+it$ における trivial bound が次のように分かる。

$$L_f\left(\frac{k}{2}+it\right)=O\left(|t|^{1/2+\varepsilon}\right)$$

この評価は $L_f(s)$ の関数等式から得られるものだが、良い評価を得るためには、絶対収束の範囲も最良のものが得られている必要がある。このような単純な例からも L 関数の性質を調べる上で、収束域を厳密に明らかにすることが重要だという事を見ることができる。さて、$L_f(s)$ の絶対収束に関しては Rankin の結果で見たように Fourier 係数の大きさを調べることから導けるわけだが、$L_f(s)$ が収束する範囲は Golubeva と Fomenko の次のような結果から導かれる。([3] 参照)

$$\sum_{n\le x}a_n=O\left(x^{k/2-1/6+\varepsilon}\right)$$

2 Hilbert modular form に付随する L 関数

さて、では Hilbert mosular form の場合を考えることにする。まず記号を次のように定める。

K/Q: 総実な有限次代数体
g: 拡大次数
$\mathcal{O}$: K の整数環
$\mathcal{D}$: K/Q の共役差積

特にここでは狭義類数が 1 の場合について考えることにして、U^+ を総正な $\mathcal{O}$ の単数の集合とおく。さて、$k>0$ を偶数として、今後は、$k=(k,k,\cdots,k)$ と思うことにする。$SL_2(\mathcal{O})$ に関するウエイト k の Hilbert cusp form f の Fourier 級数展開を次のように書く。

$$f(z)=\sum_{0\ll\xi\in\mathcal{D}^{-1}} a(\xi\mathcal{D})e^{2\pi i \mathrm{tr}(\xi z)}$$

ここで $0\ll\xi$ は ξ の共役が全て正であることを意味している。さて、Hilbert modular form f に付随する L 関数を次のように定義する。

$$L_f(s)=\sum_{0\ll\xi\in\mathcal{D}^{-1}/U^+}\frac{a(\xi\mathcal{D})}{N(\xi\mathcal{D})^s}$$

ここで N はノルムを表す。今の設定ではこの L 関数は次のような表示を持っている。

$$L_f(s)=\sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{O}}\frac{a(\mathcal{A})}{N(\mathcal{A})^s}$$

このように和がイデアルを亙ると捉えられると、イデアルに関しての次の評価

$$\sum_{N(\mathcal{A})\leq x}1=\alpha x+O(x^{1-1/g})$$

が生きて、より詳しい結果を導くことができる ([6] 参照)。

さて、一変数の保型型式に付随する L 関数の収束性を思い出すと、絶対収束に関しては Rankin の結果の類似を得られればよいことが分かる。

命題

$$\sum_{N(\mathcal{A})\leq x}|a(\mathcal{A})|^2=\frac{(4\pi)^{gk}\pi^g}{2kD^{k+1}\Gamma(k)^g}<f,f>\lambda\zeta_K^{-1}(2)x^k+O\left(x^{k-2/(4g+1)+\varepsilon}\right)$$

ここで $N(\mathcal{D})=D$ であり、λ は Dedekind ζ 関数 $\zeta_K(s)$ の留数とする。また、$<f,f>$ は Petersson 内積を表す。

例えば、$g=1$ であれば、これは前述の Rankin の結果と一致する。この命題によって、$L_f(s)$ は $Re(s)>(k+1)/2$ で絶対収束することが分かる。また、$L_f(s)$ の関数等式は次のように与えられている ([2] 参照)。

$$\Lambda_f(s)=i^k\Lambda_f(k-s)$$

ここで

$$\Lambda_f(s)=\left((2\pi)^{-s}\Gamma(s)\right)^g L_f(s)$$

とする。この関数等式と絶対収束域の情報から Phragmén-Lindelöf の定理を用いると、critical line での trivial bound として

$$L_f\left(\frac{k}{2}+it\right)=\left(|t|^{g/2+\epsilon}\right)$$

が導ける。

さて収束性については次の結果から分かる。

定理

$$\sum_{N(\mathcal{A})\leq x} a(\mathcal{A})=O\left(N(\mathcal{A})^{(k+1)/2-2/(2g+1)+\epsilon}\right)$$

ここで、$g=1$ であれば、前述の Golubeva-Fomenko の結果と一致する。この定理は Ramanujan 予想、つまり $a(\mathcal{A})=O(N(\mathcal{A})^{(k+1)/2})$ を用いて得られる。2003 年、Blasius によって完全ではないが Hilbert modular form に関しての Ramanujan 予想が証明された。ここでの我々の設定は Blasius が Ramanujan 予想を解いた条件に含まれている ([1] 参照)。

さて、では、Ramanujan 予想が解けていない場合はどうなるのか、定理との比較としてコメントしておく。Ramanujan 予想 $a(\mathcal{A})=O(N(\mathcal{A})^{(k+1)/2})$ を用いなければ

$$\sum_{N(\mathcal{A})\leq x} a(\mathcal{A})=O\left(N(\mathcal{A})^{(k+1)/2-3/(4g+1)+\epsilon}\right)$$

を得る。つまり、たとえ Ramanujan 予想が解けていなくても L 関数は絶対収束領域より内側の clitical strip 内まで収束範囲が広がっていることが分かり、例えば、L 関数の $s=1$ での振る舞いなどを調べることはできるのである。

3 定理の証明

実は定理の証明において Ramanujan 予想を必要とする部分はほんの一部にすぎない。つまり、Ramanujan 予想の解決は、その予想自体の重要性に比べると、収束性の議論への影響力はかなり少ないと感じられる。しかも、前述の通り、Ramanujan 予想が解決せずとも clitical strip 内に収束域が延びていることは示すことができる。これらのことを踏まえて、ここでは、$L_f(s)$ の収束性の評価を得る上で、Ramanujan 予想が関わっている部分を明らかにしたいと思う。その部分の良い評価を、Ramanujan 予想を用いずに得ることができるのであれば、Ramanujan 予想もしくはそれに相当する評価が得られていない L 関数に関しても、様々なことが調べられるという状況が多くなるのでは…という期待が持てるからである。

まず、次のように Riesz 和 $A_g(x)$ を定義する。

$$b(n)=\sum_{N(\mathcal{A})=n} a(\mathcal{A})$$

$$A_g(x)=\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\sum_{n\leq x} b_n(x-n)^g.$$

Hafner により、一般的に Riesz 和の Voronoï formula が得られており、その結果を適用すると次のような式を得ることができる。([4] 参照)

$$A_g(x) = Q_g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^{gk} b_n}{\{(4\pi^2)^g n\}^{k+g}} F_g\left((4\pi^2)^g xn\right).$$

ここで、右辺に現れる無限級数は絶対収束している。また、$Q_g(x)$ や $F_g(x)$ は次の通り。

$$Q_g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(s) L_f(s) x^{g+s}}{\Gamma(s+g+1)} ds$$

and

$$F_g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,b}} \frac{\Gamma(\kappa - s)\Gamma(s)^g x^{\kappa+g-s}}{\Gamma(\kappa+g+1-s)\Gamma(\kappa-s)^g} ds.$$

積分路 C や $C_{a,b}$ は [4] を参照していただきたい。

さて、実際に調べたいものは $A_0(x)$ であるので、$A_g(x)$ から情報を引き出すために、差分作用

$$\Delta_\tau(h(x)) = \sum_{j=0}^{g} (-1)^{g-j} \binom{g}{j} h(x + j\tau),$$

を利用する (ここで $0 < \tau \leq x$ としておく)。

この差分作用素を $A_g(x)$ の Voronoï formula に作用させる。ここで $x_g = x$ とおき、次のような計算を考える。

$$\begin{aligned}\Delta_\tau\left(A_g(x)\right) &= \int_{x_g}^{x_g+\tau} \cdots \int_{x_1}^{x_1+\tau} A_0(x_0) dx_0 \ldots d_{g-1} \\ &= \int_{x_g}^{x_g+\tau} \cdots \int_{x_1}^{x_1+\tau} \sum_{n \leq x} b_n + \sum_{x \leq n \leq x_0} b_n dx_0 \ldots d_{g-1} \\ &= \tau^g \sum_{n \leq x} b_n + error(*)\end{aligned}$$

また、$A_g(x)$ の Voronoï formula の右辺にも作用させると、それは $x^{k/2+g-1}\tau^1/2$ と評価される。これを $error(**)$ を書くことにすると、$error(*)$ と $error(**)$ を比較し、最終的な定理が得られるというのが証明の方針である。

$error(*)$, $(**)$ の評価について説明する。$error(**)$ の評価を得る方法は [5] や [3] により有名であると思われるので省略する。ただ、その計算において、Ramanujan 予想を使わずとも、命題を使うだけで得ることができる評価であることを注意したい。Ramanujan 予想が関わってくる個所は $error(*)$ のみ、つまり、$\sum_{x \leq n \leq x_0} b_n$ の評価のみである。Ramanujan 予想を使うと、

$$error(*) \ll x^{(k-1)/2+\epsilon}\tau + x^{(k+1)/2-1/g}$$

となり、使わなければ、命題を用いて、

$$\begin{aligned}error(*) \ll & x^{(k-1)/2+\epsilon}\tau + x^{k/2-1/(4g+1)+\epsilon}\tau^{g+1/2} \\ & + x^{k/2-1/2g}\tau^{g+1/2} + x^{k/2-1/(4g+1)+1/2-1/2g+\epsilon}\end{aligned}$$

が得られる、この違いが定理とその後に紹介した Ramanujan 予想を用いない場合の評価との違いである。

参考文献

[1] D. Blasius, *Hilbert modular forms and the Ramanujan conjecture*, preprint.

[2] G. van der Geer, *Hilbert Modular Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin (1988).

[3] E. P. Golubeva and O. M. Fomenko, *Values of Dirichlet series associated with modular forms at the points* $s = 1/2, 1$, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **134** (1984) 117-137 (in Russian); J. Soviet Math. **36** (1987) 79-93.

[4] J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions*, Lecture Nores in Math., **899** (1981) 148-165, Springer-Verlag.

[5] E. Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. II.*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1915) 209-243.

[6] S. Lang, *Algebraic Number Theory. Second edition.* Springer-Verlag, New York (1994).

[7] R. A. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function* $\tau(n)$ *and similar arithmetical functions II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms.*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **35** (1939) 357-372.