L'inégalité nécessaire à la Théorie de la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables

Par

Sikazô Kodama

(Reçu en Avril 10, 1942)

---

1. Si $g(u, v)$ est une fonction holomorphe dans les cercles fermés $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, et s'annulant dans ces cercles ouverts, sans toutefois s'annuler aux origines, alors on peut, en désignant par u_0, v_0 les zéros de la fonction $g(u, v)$ par rapport à ses variables u, v, exprimer $g(u, v)$ dans le voisinage de (u_0, v_0) sous la forme suivante[1] :

$$g(u, v) = (u-u_0)^m (v-v_0)^{m'} \psi(u, v) \Omega(u, v), \tag{1. 1}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \psi(u, v) = (u-u_0)^n + A_1(v)(u-u_0)^{n-1} + \ldots\ldots + A_n(v), \\ m,\ m',\ n \text{ sont les entiers positifs (ou nuls),} \\ A_j(v)(j=1,\ 2,\ 3,\ldots,n) \text{ sont les fonctions holomorphes} \\ \text{s'annulant lorsque } v=v_0, \\ \Omega(u, v) \text{ est une fonction holomorphe ne s'annulant} \\ \text{pas dans ce voisinage.} \end{array}\right. \tag{1. 2}$$

Supposons, pour simplifier les idées, que l'égalité (1. 1) est réalisée dans tout le domaine. On a, par (5. 1)[2] de notre mémoire (I) p. 276, l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \log|\Omega(0, 0)| &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Omega(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{2\pi} \log|\Omega(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|\, d\alpha. \end{aligned} \tag{1. 3}$$

On tire de la

$$\log|g(0, 0)| - m\log|-u_0| - m'\log|-v_0| - \log|\psi(0, 0)| \tag{1. 4}$$

---

1. Voir par exemple H. Behnke und P. Thullen: Theorie der Fuuktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (1934), p. 57.

2. S. Kodama: Sur la Classe Quasi-analytique de Fonctions de Deux Variables (I) (Memoirs of the College of Science Kyoto Imperial University, Series A, Vol. XXII, 1939, p. 276).

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{2\pi}\{\log|g(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|-m\log|e^{i\alpha}-u_0|$$
$$-m'\log|e^{i\beta}-v_0|-\log|\psi(e^{i\alpha}, e^{i\beta})|\}d\alpha.$$

2. Posons

$$\psi(u, v)=(u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_n), \tag{2. 1}$$

où $u=Re^{i\alpha},\ v=re^{i\beta},\ |u|\leqslant 1,\ |v|\leqslant 1,\ u_j=R_je^{i\alpha_j};$

et supposons que

$$\begin{cases}|u_j|<1 & (j=1, 2,\ldots, p),\\ |u_j|=1 & (j=p+1, p+2,\ldots, q),\\ |u_j|>1 & (j=q+1, q+2,\ldots, n).\end{cases} \tag{2. 2}$$

Pour $u_j\neq 0$ $(j=1, 2,\ldots, p)$, on a, par la formule de Jensen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|u-u_j|\,d\alpha=\log|-u_j|+\log\frac{1}{|u_j|}=0. \tag{2. 3}$$

Pour $u_j=0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|u-u_j|\,d\alpha&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log R\,d\alpha\Big|_{R=1}\\ &=\log R\Big|_{R=1}\\ &=0.\end{aligned} \tag{2. 4}$$

Pour $u_j(j=p+1, p+2,\ldots, q)$ (où $|u_j|=1$), on a

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{u}{u_j}\right|^2&=\left|1-e^{i(\alpha-\alpha_j)}\right|^2\\ &=\{1-e^{i(\alpha-\alpha_j)}\}\{1-e^{-i(\alpha-\alpha_j)}\}\\ &=2-2\cos(\alpha-\alpha_j)=4\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_j).\end{aligned}$$

Donc $$\left|1-\frac{u}{u_j}\right|=2\left|\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_j)\right|,$$

qui donne, dans le voisinage de α_j: $(\alpha_j-\delta,\ \alpha_j+\delta)$,

$$\frac{2}{\pi}\left|\alpha-\alpha_j\right|\leqslant\left|1-\frac{u}{u_j}\right|\leqslant 2.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\alpha_j-\delta}^{\alpha_j}+\int_{\alpha_j}^{\alpha_j+\delta}\right)\log\left\{\frac{2}{\pi}|\alpha-\alpha_j|\right\}d\alpha\\ &\leqslant\left(\int_{\alpha_j-\delta}^{\alpha_j}+\int_{\alpha_j}^{\alpha_j+\delta}\right)\log\left|1-\frac{u}{u_j}\right|d\alpha\leqslant\int_{\alpha_j-\delta}^{\alpha_j+\delta}\log 2\,d\alpha,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$2\delta\log\left(\frac{2\delta}{\pi e}\right)\leqslant\left(\int_{\alpha_j-\delta}^{\alpha_j}+\int_{\alpha_j}^{\alpha_j+\delta}\right)\log\left|1-\frac{u}{u_j}\right|d\alpha\leqslant 2\delta\log 2,$$

on tire de la

$$\lim_{\delta\to+0}\left(\int_{\alpha_j-\delta}^{\alpha_j}+\int_{\alpha_j}^{\alpha_j+\delta}\right)\log\left|1-\frac{u}{u_j}\right|da=0.$$

Par conséquent, la valeur de l'intégrale

$$I\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|1-\frac{u}{u_j}\right|da$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\alpha_j-\delta}+\int_{\alpha_j-\delta}^{\alpha_j}+\int_{\alpha_j}^{\alpha_j+\delta}+\int_{\alpha_j+\delta}^{2\pi}\right\}\log\left|1-\frac{u}{u_j}\right|da$$

est finie. On a, d'une part,

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|2\sin\frac{1}{2}(a-a_j)\right|da$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|2\sin\frac{1}{2}a\right|da$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(2\sin\frac{a}{2}\right)da,$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$(2.\ 5)\qquad I=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log(2\sin\theta)d\theta,$$

où $a=2\theta$. On a, d'autre part,

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log\left(2\sin\frac{a}{2}\right)da,$$

qui peut s'écrire, en posant a par $\pi-a$,

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log\left(2\cos\frac{a}{2}\right)da\,;$$

donc on a

$$(2.\ 6)\qquad 2I=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log(2\sin a)da.$$

Par (2. 5) et (2. 6), on a

$$2I=I,\qquad \text{donc } I=0.$$

En résumé, pour u_j (où $|u_j|=1$), on a

$$(2.\ 7)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|u-u_j|\,da=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|1-\frac{u}{u_j}\right|da$$

$$=0,\quad (j=p+1,\ p+2,\dots,q).$$

Pour $u_j(j=q+1,\ q+2,\dots,n)$ (où $|u_j|>1$), on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{\log(u-u_j)}{u}du=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(u-u_j)\,da$$

$$=\log(-u_j),$$

donc on a

$$(2.\ 8)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|u-u_j|\,da=\log|u_j|,\quad (j=q+1,\dots,n).$$

3. Par conséquent, en désignant par k le premier entier tel qu'on ait $|u_k| \neq 0$ (où $1 \leqslant k \leqslant p$), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(u,\, v)|\, da = \log|u_{q+1} \cdots u_n|$$

$$= \log|u_k \cdots u_n| - \log|u_k \cdots u_q|,$$

$$(1 \leqslant k \leqslant p);$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(u,\, v)|\, da > \log|u_k \cdots u_n|, \quad (1 \leqslant k \leqslant p).$$

En supposant que tous $u_j \neq 0$, on a

$$\psi(0,\, v) = (-1)^n u_1 u_2 \cdots u_n,$$

et

$$\frac{\psi(0,\, v)}{(-1)^{k-1} u_1 u_2 \cdots u_{k-1}} = (-1)^{n-k-1} u_k \cdots u_n,$$

parce que

$$\left. \frac{\psi(u,\, v)}{(u-u_1)(u-u_2)\cdots(u-u_{k-1})} \right|_{u=0} = (-1)^{n-k-1} u_k \cdots u_n.$$

Si $k=1$, on a

(3. 1) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(u,\, v)|\, da \geqslant \log|\psi(0,\, v)|,$$

et si $k > 1$, on a

(3. 2) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(u,\, v)|\, da \geqslant \log|u_k \cdots u_n|$$

$$= \log\left| \frac{\psi(u,\, v)}{(u-u_1)(u-u_2)\cdots(u-u_{k-1})} \right|_{u=0}.$$

Or la fonction $\psi(0,\, v)$ est holomorphe dans $|v| \leqslant 1$, et la fonction $\psi(0,\, re^{i\beta})$ peut avoir les zéros en nombre fini pour $r (< r + \varepsilon < 1)$; et l'on a, pour une certaine valeur de r (ces valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$ peuvent être en nombre infini),

$$\psi(0,\, r_\nu e^{i\beta}) \neq 0 \qquad \text{(pour tout } \beta\text{)}.$$

Par conséquent, on a, sous la condition qu'il n'y ait pas de zéro sur $|v| = r_\nu$,

(3. 3) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(u,\, r_\nu e^{i\beta})|\, da \geqslant \log|\psi(0,\, r_\nu e^{i\beta})|.$$

On tire de la

(3. 4) $$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{2\pi} \log|\psi(u, r_\nu e^{i\beta})|\, da \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(0,\, r_\nu e^{i\beta})|\, d\beta.$$

Donc en désignant par

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu \qquad (\mu : \text{fini})$$

les modules des zéros de $\psi(0, v)$ dans le cercle $|v|=r_\nu$, on a, par la formule de Jensen,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\beta\int_0^{2\pi}\log|\psi(e^{i\alpha},\ r_\nu e^{i\beta})|\,d\alpha \\ (3.\ 5) \qquad &\geqq \log|\psi(0,0)| + \log\frac{r_\nu^\mu}{\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_\mu} \\ &\geqq \log|\psi(0,0)|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a, pour $r=r_1,\ r_2,\ldots,\ r_\nu,\ldots\to 1-0$,

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\beta\int_0^{2\pi}\log|\psi(e^{i\alpha},\ re^{i\beta})|\,d\alpha \geqq \log|\psi(0,0)|. \tag{3. 6}$$

4. Or la fonction $\psi(u, v)$ aura les nul-lignes dans le domaine ou sur sa frontière. Désignons par l l'ensemble de ces lignes dont la mesure plane est nulle, et désignons par $D(l)$ une partie du domaine A de (α, β), excluant l à l'extérieur et pouvant tendre vers A. Alors on voit que, pour une certaine valeur de $D(l)$, l'intégrale double

$$\iint_{D(l)} \log|\psi(u, v)|\,d\alpha d\beta \tag{4. 1}$$

est finie, parce que la fonction $\log|\psi(u, v)|$ est continue dans le domaine $D(l)$. Au plus, pour $D(l)\to A$, l'intégrale double (4. 1) converge vers une valeur finie et déterminée, c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta = \lim_{D(l)\to A}\iint_{D(l)}\log|\psi(u, v)|\,d\alpha d\beta. \tag{4. 2}$$

Or on a

$$\iint_{D(l)}\log|\psi(u, v)|\,d\alpha d\beta = \int d\beta\int_{D(l)}\log|\psi(u, v)|\,d\alpha.$$

Donc on a à la limite $D(l)\to A$

$$\iint_A \log|\psi(u, v)|\,d\alpha d\beta = \int d\beta\int_A \log|\psi(u, v)|\,d\alpha. \tag{4. 3}$$

En particulier on a

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(e^{i\alpha},\ re^{i\beta})|\,d\alpha d\beta = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\beta\int_0^{2\pi}\log|\psi(e^{i\alpha},\ re^{i\beta})d\alpha. \tag{4. 4}$$

Donc on a

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(e^{i\alpha},\ re^{i\beta})|\,d\alpha d\beta \geqq \log|\psi(0,0)|.$$

Tendant r vers un on a

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})d\alpha d\beta \geqq \log|\psi(0,0)|. \tag{4. 5}$$

5. On a de même

$$(5.\ 1)\qquad \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})|\,d\alpha,$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|e^{i\alpha}-u_0|\,d\alpha d\beta=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{2\pi}\log|e^{i\alpha}-u_0|\,d\alpha$$
$$=0,$$

et

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|e^{i\beta}-v_0|\,d\alpha d\beta=0\,;$$

et l'on a

$$\log|u_0|<0 \quad \text{et} \quad \log|v_0|<0.$$

Par conséquent, on a, en vertu de (1. 4), l'inégalité suivante :

$$(5.\ 2)\qquad \log|g(0,0)|<\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\alpha},\ e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta,$$

qui est l'inégalité voulue nécessaire dans notre théorie de la quasi-analyticité.

Je suis heureux de pouvoir exprimer mon profond remerciement au professeur M. Tosizô Matumoto, au Maître qui a bien voulu lire mon manuscrit et qui m'a fait quelques remarques très utiles.