Ein anderer Beweis des Hilfssatzes im Problem über Grundwasserströmung

von

Toshizô Matsumoto

(Eingegagen am 30 Mai, 1942)

Im Problem der stationären Potentialbewegung des Grundwassers, sei

$$W=\phi+i\psi=f(z)$$

das komplexe Potential, wo $z=x+iy$ ist. Wir nehmen den Fall an, wo die Wasserströmung sehr langsam ist. u, v seien die Komponenten der Geschwindigkeit, dann sind

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$w=u-iv=\frac{dW}{dz}.$$

Das Grundwasser ist im Allgemeinen begrenzt durch einige durchlässige, oder undurchlässige Schichten, Sickerstrecken und freie Oberflächen. Es ist bekannt, dass sich die Randbedingen für jede Begrenzung des Wassers in der Form

$$\begin{cases} ax+by+c\phi+d\psi=e, \\ a'x+b'y+c'\phi+d'\psi=e' \end{cases}$$

schreiben lassen[1], wobei die Konstanten reell sind. So haben wir nach Davison-Rosenhead[2], für die Randbedingungen die Gleichungen

$$\begin{cases} \Im(mz+nW)=e, \\ \Im(m'z+n'W)=e' \end{cases} \qquad \text{(1)}$$

wo I den imaginären Teil bedeutet und die Konstanten m, n, m', n' im Allgemeinen komplex sind. Daher die Randkurve in der hodographen Ebene (u, v) befriedigt die Gleichung

---

1. Z, B., Hamel, Über Grundwasserströmung, Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech. **14** (1934).

2. Davison-Rosenhead, Some cases of the steady two-dimensional percolation of water through ground, Proceed. Roy. Soc., London, **175** (1940).

$$\mathfrak{J}\left(\frac{m+nw}{m'+n'w}\right)=o. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Der wichtige Hilfssatz von Davison-Rosenhead lautet folgendermassen. *Die Kurve* (2) *lässt sich in der Ω-Ebene in eine Gerade transformieren, wo*

$$\Omega\equiv\lambda+i\mu=W-w_0 z$$

angenommen ist und w_0 *ein Punkt von* (2) *ist.*

In den folgenden Zeilen wollen wir einen Beweis, der von dem ihrigen verschieden ist. Wir setzen

$$w'=\frac{m+nw}{m'+n'w},$$

dann ist

$$w=\frac{m'w'-m}{-n'w'+n}.$$

Nach (2), haben wir

$$\mathfrak{J}w'=0,$$

welche eine Gerade in w'-Ebene darstellt. Daher ist die entsprechende Kurve in w-Ebene ein Kreis. Nun

$$d\Omega=d(\lambda+i\mu)=(w-w_0)dz.$$

Sei

$$w_0=\frac{m'w_0'-m}{-n'w_0'+n},$$

dann ist

$$\mathfrak{J}w_0'=o,$$

und

$$w-w_0=\frac{(m'n-mn')(w'-w_0')}{(-n'w'+n)(-n'w_0'+n)}.$$

Daher

$$\frac{d\Omega}{dz}=\frac{d}{dz}(\lambda+i\mu)$$

$$=\frac{m'n-mn'}{(-n'w'+n)(-n'w_0'+n)}(w'-w_0').$$

Zu Bemerken ist, dass $w'-w_0'$ reell ist. Nach (1) ist

$$\mathfrak{J}(m'z+n'W)=\text{konstant}.$$

Wenn man setzt

$$m'z+n'W=A+iB,$$

dann ist B konstant. Daher

$$m'+n'w=\frac{dA}{dz}$$

andererseits $$=\frac{m'n-mn'}{-n'w'+n}.$$

Zusammengefasst haben wir

$$\frac{d\lambda}{dz}+i\frac{d\mu}{dz}=\frac{dA}{dz}\frac{w'-w_0'}{-n'w_0'+n}.$$

Folglich ist

$$d\lambda+id\mu=dA\times(w'-w_0')\frac{1}{-n'w_0'+n}.$$

Die ersten zwei veränderlichen Faktoren sind reell. Daher ist $d\lambda:d\mu$ konstant, was zu beweisen war.