数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 239-248

$L(1/2+it,\chi_j)$ と $L(1/2+it,\chi_k)$ の値の差について

新潟大学大学院自然科学研究科　石川　秀明 (Hideaki Ishikawa)
Graduate School of Science and Technology Niigata University

1 Introduction

ディリクレの L 関数とは級数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

で定義された複素数 s の関数のことで、χ はディリクレ指標である。χ が単位指標 χ_0 でなければ $\Re s>0$ で広義一様収束していて、そこで正則な関数を与えている。さらに解析接続ができて、整関数であることがわかる。リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の研究同様に、zero 点の位置に関しての研究、臨界線 $\Re s=1/2$ 上での挙動の研究は多くの研究者の興味をひきつけて来た。

本稿ではこの関数の臨界線 $\Re s=1/2$ での挙動に関しての結果を報告する。具体的には $|L(1/2+it,\chi_j)|$ と $|L(1/2+it,\chi_k)|$ の変化にどれくらいの差があるのかを論じたい。とはいっても、いきなり $|L(1/2+it,\chi_j)|$ と $|L(1/2+it,\chi_k)|$ を比較するのはあまりに難しすぎるので、積分した結果からその違いを推察することにする。次のような関数を定義しよう：

$$\Lambda(T,\chi_j,\chi_k)=\int_0^T|L(1/2+it,\chi_j)|^2-|L(1/2+it,\chi_k)|^2dt$$

(時折、省略して $\Lambda(T)$ と書くこともある)。$T\to\infty$ としたとき、この積分はどのように変化するのか？この設定を本稿でのテーマとする。今回 $\Lambda(T)$ に対して次のような結果がえられた：

Theorem 1 *Assume that χ_j and χ_k are primitive characters modulo q and $\chi_j\neq\chi_k$. Then there exist $T_0(q)$, $c_1(q)$, $c_2(q)$ such that, for each $T>T_0$ there exist t_1, $t_2\in[T,T+c_2\sqrt{T}]$ satisfying $\Lambda(t_1)>c_1t_1^{1/4}$ and $\Lambda(t_2)<-c_1t_2^{1/4}$.*

Remark 1 Unfortunately we can not make explicit the dependency of T_0, c_1 and c_2 with respect to q.

Cororally 1 *Let χ_j and χ_k be as in Theorem 1. Then we have*

$$\Lambda(T)=\Omega_{\pm}(T^{1/4}).$$

In particular

$$\int_0^T|L(1/2+it,\chi)|^2dt-\int_{-T}^0|L(1/2+it,\chi)|^2dt=\Omega_{\pm}(T^{1/4})$$

holds.

2 Theorem 1 考察の背景

まず、$L(s,\chi)$ の二乗平均

$$I(T,\chi) := \int_0^T |L(1/2+it,\chi)|^2 dt.$$

について考えてみると、次の結果は易しい計算で判明する:

$$I(T,\chi) \sim M(T,q) \qquad T\to\infty \tag{1}$$

ここで

$$M(T,q) = \frac{\phi(q)}{q}\left\{T\log T + T\Big(\log\frac{q}{2\pi} + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\Big)\right\}$$

であり $\phi(q)$ は Euler 関数、γ は Euler 定数、p は q を割り切る素数とする。さらに差 $I(T,\chi)-M(T,q)$ を $E(T,\chi)$ とおいて、この誤差関数 $E(T,\chi)$ を詳しく調べる研究成果が多く知られている。漸近式 (1) は、同じ mod q の指標 χ_j、χ_k で $I(T,\chi_j)$、$I(T,\chi_k)$ を考えると主要項は全く同じ形で、違いは誤差関数のレベルで見ないと出てこないことを意味する。つまり我々の興味の対象 $\Lambda(T)$ は $E(T,\chi_j)-E(T,\chi_k)$ に等しいわけだ。こうしてみると $\Lambda(T)$ が激しく振動していて、その振動の状況を捉えることがそう簡単ではないと思えてくる。というのはリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の臨界線上での二乗平均の誤差関数 $E(T)$ の研究 [2], [8], [4] 等を思い出してみれば、そのような感覚は妥当であろう。$E(T,\chi)$ の $T\to\infty$ としたときの挙動はほぼ $E(T)$ と似通っているだろう思われる。我々はさらに差 $E(T,\chi_j)-E(T,\chi_k)$ を考えようというのだから、これはどのような挙動を見せるのだろうか?$E(T,\chi_j)$ と $E(T,\chi_k)$ の挙動は似ていると思われるが、その差はゼロに近づくほどなのか?このことを知るには(予想するにしても)$E(T,\chi)$ の振動状況をうまく記述することが先決である。そこで $E(T)$ にたいして知られているある明示公式の類似を、$E(T,\chi)$ に対して書いてみることにした (後に述べる Proposition 1)。その結果をみてみても、$\Lambda(T)$ の挙動を想像するのは、結構微妙な雰囲気が漂っていた。そこで、丁寧に調べてみた結果が冒頭の Theorem 1 である。

3 Theorem 1 証明の概略

それでは証明の説明に入る。まずは $E(T,\chi)$ に対して、その振動状況を考察できるような うまい表示式を与えたい。まずは幾つかの記号を用意しておく:

$$\begin{aligned}
e(T,u) &= \Big(1+\frac{\pi u}{2T}\Big)^{-1/4}\Big(\sqrt{\frac{2T}{\pi u}}\operatorname{ar\,sinh}\sqrt{\frac{\pi u}{2T}}\Big)^{-1},\\
f(T,u) &= 2T\operatorname{ar\,sinh}\sqrt{\frac{\pi u}{2T}} + \sqrt{2\pi uT+\pi^2u^2} - \pi/4,\\
g(T,u) &= T\log\frac{T}{2\pi u} - T + 2\pi u + \frac{\pi}{4},\\
l(T,u) &= \frac{T}{2\pi} + \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4}+\frac{uT}{2\pi}},\\
a(n,\chi) &= \frac{1}{q}\sum_{k|n}\sum_{a=1}^{q}\chi(a)\overline{\chi}(a+k)\exp\Big(2\pi i\frac{a}{q}\frac{n}{k}\Big),\\
b(n,\chi) &= \tau(\chi)^{-1}d(n)\chi(n)e^{2\pi i n/q},
\end{aligned}$$

ここで $\tau(\chi)$ はガウス和、$d(n)$ は約数関数、と約束しておく。この時、以下の結果が証明できる:

Proposition 1 *Suppose that $T \geq 10$ and that X satisfies $AqT < X < A'qT$ for any fixed $0 < A < A'$. If χ is a primitive character of modulus q, then we have*

$$E(T,\chi) = \Sigma_{1,\chi}(T,X) + \Sigma_{2,\chi}(T, l(T, X/q)) + R(T,\chi),$$

where

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,\chi}(T,y) &= q^{3/4}\Big(\frac{2T}{\pi}\Big)^{1/4} \sum_{n\leq y} \frac{\overline{|a(n,\overline{\chi})|}}{n^{3/4}} \\ &\quad \times e(T,n/q)\cos\Big(f(T,n/q) - \pi n/q + \arg \overline{a(n,\overline{\chi})}\Big),\end{aligned}$$

$$\Sigma_{2,\chi}(T,y) = -2q^{1/2} \sum_{n \leq qy} \frac{\overline{|b(n,\overline{\chi})|}}{n^{1/2}} \Big(\log \frac{Tq}{2\pi n}\Big)^{-1} \cos\Big(g(T,n/q) + \arg \overline{b(n,\overline{\chi})}\Big)$$

and $R(T,\chi)$ is a certain quantity which satisfies

$$R(T,\chi) \ll q(\log T)(\log^2 qT) + \frac{q^{3/2+\epsilon}}{\log^{1/6-\epsilon} T}.$$

これは $E(T)$ に対して知られているアトキンソン公式といわれる明示公式の $E(T,\chi)$ 版といえる。アトキンソン型の明示公式に関しての話は次節で詳しく論じることにして、ここでは Theorem 1 の証明に専念しよう。

$f(t)$ は実数値をとる関数で、十分大きい全ての t で $|f(t)| \leq c_1 t^{1/4}$ が成立しているとする。次に

$$\Lambda^*(t) := \frac{1}{\sqrt{2qt}}\Big(\Lambda(2\pi t^2/q) + f(2\pi t^2/q)\Big)$$

と

$$K_{\tau,\mu}(u) := \Big(1 - |u|\Big)\Big(1 + \tau \sin\Big(4\pi\theta\frac{\sqrt{\mu}}{q}u\Big)\Big)$$

for $|u| \leq 1$ を定義する。ここで $\tau = 1$ 又は -1 とし、$\theta > 1$ は十分大きい定数で、そして $\mu \in \mathrm{N}$ とする。この時以下の補題を証明する。

Lemma 1 *Let $\alpha(n) = a(n,\overline{\chi_j}) - a(n,\overline{\chi_k})$ and n_0 be a minimum of numbers n such that $\alpha(n) \neq 0$ for fixed the pair of characters. Suppose that $n_0 < t^{3/2}$. For every large t, we have*

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \Lambda^*(t+\theta u) K_{\tau,n_0}(u)du = \\ &\frac{\overline{|\alpha(n_0)|}}{n_0^{3/4}}\Big\{-\frac{\tau}{2}\sin\Big(\frac{4\pi n_0^{1/2}}{q}t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n_0}{q} - \arg\alpha(n_0)\Big) + E\Big\}\end{aligned} \tag{2}$$

where E is the error term estimated as

$$\begin{aligned}\ll\ & \frac{\theta^2 n_0^3}{q^2 t^4} + \frac{q^2}{\theta^2 n_0}\Big(1 + O\Big(\frac{n_0}{t^2}\Big)\Big)^{-2} + \frac{n_0}{t^2} + \frac{n_0^{3/2}}{qt} \\ & \frac{n_0^{3/4}}{|\alpha(n_0)|}\Big\{\frac{1}{t^{3/8-\epsilon}}\Big(\frac{\theta^2}{q} + \frac{q}{\theta} + n_0^{1/2}\Big) \\ & + \frac{1}{t^{1/2-\epsilon}}\Big(\frac{q^{1/2}}{\theta} + \frac{n_0^{1/2}}{q^{1/2}} + \frac{q}{t} + \frac{\theta}{q^{1/2}} + \theta + q^{1+\epsilon}\Big) \\ & + \frac{q^2}{\theta^2}\sum_{n\leq t^{3/2}, n\neq n_0} \frac{|\alpha(n)|}{n^{7/4}}\Big\{1 + \Big(\Big|1 - \sqrt{\frac{n_0}{n}}\Big| + O\Big(\frac{n}{t^2}\Big)\Big)^{-2}\Big\} + \frac{c_1}{q^{3/4}}\Big\}.\end{aligned}$$

Remark 2 In [5] we proved that the number n_0 exists for any fixed primitive characters with $\chi_j \neq \chi_k$. However we do not know the upper bound of n_0 and a lower bound of $|\alpha(n_0)|$ with respect to q. Thus we could not clarify the dependency of three number T_0, c_1 and c_2.

このLemma 1が大変重要で、この結果を基にTheorem 1が導かれるのだが、極々大雑把にいうとこうだ。与えられたqと二つの指標に対してn_0が決まる。これらに応じてc_1を小さくθを大きくとり、最後にtを十分大きく設定してEを十分小さくできる。このような状況で(2)を眺める。この式が$\tau = 1$でも$\tau = -1$でも成立していることを考慮に入れると$\Lambda^*(w)$がある区間では定符号であってはならないという議論が可能となる。残りの詳細な部分はここでは省略するが（詳しいことは[6]を参照していただきたい)。以上が証明の大雑把な説明である。

ここまでを振り返って、なにをやったのか整理してみると

(i) アトキンソン型公式を求める(Proposition 1)。

(ii) 重み関数$K_{\tau,\mu}(u)$を構成して$\Lambda(T)$のアトキンソン公式による表示に掛け合わせて、その積分の評価をする(Lemma 1)。

(iii)Lemma 1の結果を基に$\Lambda(T)$の符号変化の様子を議論する。

という流れであった。手順(ii)(iii)はD.R.Heath-Brown and K.Tsang [4]のアイディアにほぼ従っている。彼らは$E(T)$がどのような区間で符号を変え、どのような区間で符号変化がないのかについて詳細な結果を求めている。そこでは$E(T)$をアトキンソン公式で表示しておいてから、うまい重み関数(ちょうど我々の記号でいうところの$q = 1$で$K_{\tau,1}(u)$にあたる）を構成し掛け合わせることで、$E(T)$の振動をうまくコントロールした。そのアイディアを応用したのが手順(ii)である。ただし、そっくりアイディアを真似すれば、「あとは機械的な計算で出る」というわけではない。我々の対象は事情がより込み入っていて重み関数$K_{\tau,\mu}(u)$の構成が容易ではない。

4 Review of Atkinson's formula for the mean square of the Riemann zeta function and sums of Dirichlet L functions

この章ではアトキンソン公式といわれるものがどのようなものなのか、紹介したい。

$\zeta(s)$の臨界領域$0 < \Re s < 1$における二乗平均

$$I_\sigma(T) = \int_0^T |\zeta(\sigma + ti)|^2 dt$$

の考察は数論における古典的な問題である。$I_{1/2}(T)$を特に$I(T)$と書くことにし$E(T) = I(T) - T\log T - T(2\gamma - 1 - \log 2\pi)$とおく。この誤差関数$E(T)$の研究には多くの結果があるが、その研究の動機としては$E(T)$の情報を基に$\zeta(1/2 + it)$の挙動を推し量ろうということが考えられる。例えば$E(T)$の上からのよい評価が得られれば、応じて$|\zeta(1/2 + it)|$の上からのよい評価が求まるという関係はよく知られたことである。また$E(T)$は激しく振動していて不思議な挙動を見せるので、純粋にその変化に興味を惹かれるというのも自然な動機であろう。

1949 年に F.V.Atkinson [1] は以下に述べる $E(T)$ の明示公式を証明した (それは今日アトキンソン公式と呼ばれている):

$$E(T) = \left(\frac{2T}{\pi}\right)^{1/4} \sum_{n\le X} (-1)^n \frac{d(n)}{n^{3/4}} e(T,n)\cos(f(T,n))$$
$$-2\sum_{n\le l(T,X)} \frac{d(n)}{n^{1/2}}\left(\log\frac{T}{2\pi n}\right)^{-1}\cos\Big(g(T,n)\Big) + O(\log^2 T), \qquad (3)$$

が条件 $T \ll X \ll T$ のもとで成立。この証明が公刊された当初は、誰もその結果には注意を払わなかったようである。およそ 30 年後の 1978 年に Heath-Brown [3] がこの明示公式の威力の一端を明らかにする。彼は以下の漸近式を証明した:

$$\int_2^T E(t)^2 dt = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)^2}{n^{3/2}}T^{3/2} + F(T) \qquad (4)$$

ここで $F(T)$ は誤差関数で $F(T) = O(T^{5/4}\log^2 T)$ と評価できる（現在はもっとよい評価が知られている)。この結果は (3) の直接的な応用である。明示公式を用いてその二乗を展開して、各項を基本的な指数積分の評価のテクニックで丁寧に計算をすると求められる。この (4) は A.Good 氏がその一年前に公表した $E(T) = \Omega(T^{1/4})$ という結果の別証明を直ちに与える。この Heath-Brown 氏の仕事の直後から多くの人が明示公式 (3) に注目し始める。M.Jutila [9] はアトキンソン公式の証明の途中に現れる幾つかの関数に独自の変形を行った後に最新の指数和評価のテクニックを用いれば $E(T)$ の上からの評価の改良が可能であると指摘した。 その方針に基づいた証明と結果は A.Ivić 氏が $E(T) \ll T^{35/108+\epsilon}$ という形で [7] の Section 15.5 で紹介している。また 1989 年には J.L.Hafner and A.Ivić [2] が以下の結果を証明している:

$$\int_2^T E(t)dt = \pi T + \frac{1}{2}\left(\frac{2T}{\pi}\right)^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{d(n)}{n^{5/4}}\sin\Big(2\sqrt{2\pi nT}-\frac{\pi}{4}\Big)$$
$$+O(T^{2/3}\log T), \qquad (5)$$

$$E(T) = \Omega_+\left((T\log T)^{1/4}(\log\log T)^{(3+\log 4)/4}\exp\Big(-c\sqrt{\log\log\log T}\Big)\right),$$

$$E(T) = \Omega_-\left(T^{1/4}\exp\Big(c\frac{(\log\log T)^{1/4}}{(\log\log\log T)^{3/4}}\Big)\right),$$

そして $E(T) \ll T^{139/429}(\log T)^{1467/429}$, ここで c はある正の定数。これらの結果は (3)（に加えてその証明のアイディア）についての深い考察から導かれる。

こうして振り返ってみると、アトキンソン公式 (3) とその証明のアイディアは $E(T)$ の研究に対して大きな役割を果たしていることが分かる。

次に $E_\sigma(T)$ で $I_\sigma(T)$ の誤差関数をあらわすとする。1990 年に K.Matsumoto [13] は $E_\sigma(T)$ のアトキンソン型明示公式を $1/2 < \sigma < 3/4$ の範囲で証明した。この時 $E_\sigma(T)$ の上からの評価と (4) の類似の結果を与えている。さらに $\sigma = 3/4$ で $E_\sigma(T)$ の挙動に奇妙な現象が見られることを指摘した。その後 K.Matsumoto and T.Meurman [15] [16] は $3/4 \le \sigma < 1$ の範囲にまで広げて明示公式を証明した。

Remark 3 *4 乗平均の場合に [1] のアイディアを深め発展させた Y.Motohashi* 氏の一連の仕事があり、和書では *[20]* にその理論の成果がみられる。アトキンソン公式の周辺を紹介する以上、この理論は是非触れるべき重要な話題なのだが、しかしここでは紹介するスペースがない。というのは、本稿での主旨が二乗平均に注目していることと、なによりもこれらを紹介するのは私の技量をはるかに超えているので。ご容赦ください。

次に $L(s,\chi)$ のアトキンソン公式の歴史について紹介する。$\sum_\chi$ という記号で mod q の指標全体の和をとることと約束する。

$$I_\sigma(T,q)=\int_0^T\sum_\chi|L(\sigma+it,\chi)|^2dt.$$

なる $L(s,\chi)$ の和に対しては、1986 年 T. Meurman [17] が $I_{1/2}(T,q)$ (以後 $I(T,q)$ と表す) にアトキンソン型明示公式を証明した。1993 年には A. Laurinčikas [12] が Meurman の結果の類似を臨界線の近くで与えた。最近 H. Nakaya [21] [22] は $1/2<\sigma<1$, に明示公式を拡張した。これは [13], [15], [16] の類似にあたる。

では一個の $L(s,\chi)$ にたいしてアトキンソン型の公式は証明されているのだろうか？きちんと結果を書き下したものは公式の文献では見当たらない。では仮に証明できるとしたら、それは易しいのだろうか。例えば $\zeta(s)$ の場合が出来ているのだから、全く同じやりかたを真似していけば証明ができてしまうのか？実際に手を動かして証明してみるとすぐに気付くと思うのだが、$I(T)$ の証明の類似を辿っていくと、処理しきれない問題に遭遇し、手が止まってしまう場所がある。一方 $I(T,q)$ のときは $\sum_\chi$ と和をとったことによってその関数の挙動がある程度穏やかになっていて、$I(T)$ の証明の類似を辿ることで証明出来てしまう。このように L 関数のあるパラメータについて考察する際には L そのもの一個を扱う場合と $\sum_\chi L(s,\chi)$ を扱う場合では後者が比較的易しく前者は結構難しい（場合によってはとんでもなく難しい）というのはよくある話である。

当初 $I(T,\chi)$ のほうも簡単であろうと思ってとりくんだのだが、やってみるとなかなかうまくいかない。最終的には証明できたのだが、証明の全体像をみるとそう自明ではないと思われるので、論文にまとめる際にはアトキンソン公式の証明も丁寧に書くことにした。次の章では、その証明の手順を簡単に紹介したい。

5 Proposition 1 の証明の概略

積 $L(u,\chi)L(v,\overline{\chi})$ を領域 $\Re u>1$ and $\Re v>1$ の元を固定した状態で考えて、以下のように項の並び替えを行う:

$$L(u,\chi)L(v,\overline{\chi})=\Big(\sum_{m=n}+\sum_{m<n}+\sum_{m>n}\Big)\frac{\chi(m)}{m^u}\frac{\overline{\chi(n)}}{n^v}. \tag{6}$$

いわゆる一番古典的なアトキンソン分割である。右辺の $m=n$ なる条件の和は明らかに $L(u+v,\chi_0)$ である。残りの二つの二重和はそれぞれ二重 L 関数とよばれるものである。我々はこの後、二重 L 関数に対して良い表示を与え解析接続をする。その後で $v\to 1-u$ としてから $u=1/2+it$ なる状況を考えて積分 $\int_0^T\ldots dt$ をとりたい。今、良い表示を与えると言ったがそれはアトキンソンが $E(T)$ の証明の中で与えた二重ゼータに対しての表示の類似をさすこととする。Y.Motohashi 氏は [19] において Atkinson 氏が用いた手法とは全く異なる方法で良い表示を与えている。Atkinson 氏が二重ゼータに対して行ったやりかたはポアソン和公式とオイラーマックローリン和公式を組み合わせるものだが、Motohashi 氏のここでのやりかたは二重 L をある二重積分表示しておいてから内部の積分の積分路を移動させて、極を横切る際に留数を数えるという手法である。ここでは、その結果を (6) に戻して $v\to 1-u$ としたものを紹介する: (*Motohashi's Lemma 1 of [19]*) If $0<\Re u<1$, then

$$\begin{aligned}L(u,\chi)L(1-u,\overline{\chi})=&\\ &\frac{\phi(q)}{q}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)}+\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right)+\Big(2\gamma-\log\frac{2\pi}{q}+2\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\Big)\right\}\\ &+g(u,\chi)+g(1-u,\overline{\chi}),\end{aligned} \tag{7}$$

where $g(u,\chi)$ is the analytic continuation of

$$g(u,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n,\chi)h(u,n)+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a(n,\overline{\chi})}h(u,-n), \tag{8}$$

and where

$$h(u,x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\pi ixy/q}}{y^u(1+y)^{1-u}}dy.$$

The series (8) is convergent when $Reu<0$.

[19] においては、表示 (7) を基に $L(s,\chi)$ の絶対値の二乗平均に関してのある評価を与え、その他にも多くの結果が出るであろうということが指摘されている。ちなみに私は、この (7) を得るために、アトキンソン流のやりかたで出来るかやってみた。普通の「ポアソン和公式」は我々の二重級数にはあてはまらないので、あるパラメータを含んだ「ポアソン和公式の類似」を証明し、その結果を応用することで証明できた。この際、解析接続の微妙な議論が伴うが、オイラーマクローリン和公式（これもパラメータを入れた一般化バージョンを用いて）を援用することでその部分も正当化できる。

この表示 (7) を示してから、さらに $\sum_{n\le x}a(n,\chi)$ の評価を利用して $g(u,\chi)$ の解析接続を行った後に $\int_{1/2}^{1/2+iT}L(u)L(1-u)du$ を考察する。証明の後半は様々なタイプの指数積分 ($\int_a^b g(x)e^{if(x)}dx$ のような形の積分全般をここではそう呼ぶことにする) を処理しなくてはならない。Atkinson 氏は [1] において鞍部点法を駆使してかなり一般的な形の指数積分の評価を行っている。$I(T)$ の時に有効だったアトキンソンの鞍部点 lemma を用いれば $I(T,q)$ のときも、問題なく議論が進んだのだが、今回扱っている $I(T,\chi)$ では、少し具合の悪いものが生じる。それは以下のような積分

$$\int_0^{\infty}\frac{\exp\pm(i2\pi k\pm it\log\frac{1+y}{y})}{y^{1/2}(1+y)^{1/2}\log\frac{1+y}{y}}dy \tag{9}$$

の $t=0$ の場合を含んだ関数の評価である。これが前章で予告していた「$\zeta(s)$ の場合や $\sum_{\chi}L(s,\chi)$ の場合の真似をしていては処理しきれない問題」である。このような $t=0$ のタイプの積分は $I(T)$ や $I(T,q)$ の時には出てこない。厳密に言うと、計算の途中で偶数個出てくるのだが、互いに符合だけが逆のペアがあって、その相棒と打ち消しあって完全に計算から消えてしまうのである。また $I(T)$ の場合は $2\int_0^T|\zeta(\ldots)|^2dt=\int_{-T}^{T}|\zeta(\ldots)|^2dt$ が成立していることより、証明は普通この右辺で行われることが多い (そのほうが見かけ上の計算量が多少軽減される)。その場合には (9) は計算途中にさえでてこない。$I(T,q)$ の場合も同様である。

この積分 (9) をまともに相手にして $I(T,\chi)$ を評価ようとすると、どうもうまく結果に辿り着けないので、もう少し別の方法はないのか探ってみた。選んだ方針は $\int_0^T|L(1/2+it,\chi)|^2dt$ を次のように

$$\left(\int_{T/2}^{T}+\int_{T/2^2}^{T/2}+\ldots+\int_{T/2^L}^{T/2^{L-1}}+\int_0^{T/2^L}\right)|L(1/2+it,\chi)|^2dt, \tag{10}$$

with $L=[(\log T-\log\log T)/\log 2]$ と分割して考えることであった。最後の積分は自明な評価 $L(1/2+it,\chi)\ll(qt)^{1/4+\epsilon}$, を用いて雑に評価しても十分誤差の範囲である。そこで我々の仕事は残りの小区間に分けた各積分の評価である。ここにはアトキンソンの鞍部点 lemma が十分機能するように見える。この方法は Hafner and Ivić [2] のアイディアを参考にしている。彼らは (5) の証明で $\int_2^T E(t)dt$ を以下のように分割する:

$$\left(\int_{T/2}^{T}+\int_{T/2^2}^{T/2}+\ldots+\int_{T/2^L}^{T/2^{L-1}}+\int_2^{T/2^L}\right)E(t)dt.$$

ここで最後の積分は $E(t)$ に対しての自明な評価を用いて処理する。残りの積分には鞍部点 lemma を適用して評価していくのだが、しかし、その結果、あるディリクレ多項式の有限和Aとそれとは異なるディリクレ多項式の有限和Bの評価が残ってしまう。二つとも誤差として評価するには結構大きく、一見失敗したようにみえるのだが、実は両者は T の関数としてはその挙動はほぼ一致していて符号だけが逆であることを示し、お互いが打ち消しあってしまうことを証明するのである。そのときに Jutila 氏が [10] で論じたディリクレ多項式の変換公式についての理論（ここでも鞍部点法が使われる）を全面的に採用してここを乗り切っている。そして得られた小区間での結果を足し合わせることで目標の結果 (5) に到達する。

今、我々のおかれた状況もまさにこれと同様で、(10) における各積分を評価する時、あるディリクレ多項式の変換を必要とされる。このことを少し詳しく述べる。$K(t,n)$ と $\tilde{K}(t,n)$ を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
K(t,n) \;=\; & |\overline{a(n,\overline{\chi})}|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n/q}}\cos\Bigl(f(t,n/q)-\pi\frac{n}{q}+\arg\overline{a(n,\overline{\chi})}\Bigr)\\
& \left\{\left(\frac{t}{2\pi n/q}+\frac{1}{4}\right)^{1/4}\operatorname{ar\,sinh}\sqrt{\frac{\pi n}{2tq}}\right\}^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{K}(t,n)=2q^{1/2}\frac{|\overline{b(n,\overline{\chi})}|}{n^{1/2}}\Bigl(\log\frac{tq}{2\pi n}\Bigr)^{-1}\cos\Bigl(g(t,n/q)+\arg\overline{b(n,\overline{\chi})}\Bigr).
$$

この時、以下の関係式を証明することが要請される:

$$
\sum_{\eta_2<n\le\eta_1}\tilde{K}(2T,n)\sim-\sum_{X<n\le 2X}K(2T,n)\qquad(T\to\infty), \tag{11}
$$

ここで $\eta_2=ql(2T,q^{-1}2X)$ と $\eta_1=ql(2T,q^{-1}X)$ である。Hafner and Ivić がやったように、Jutila[10] のアイディアに従うなら $\tilde{K}(2T,n)$ の和を積分表示しておいてから鞍部点法を用いて $K(2T,n)$ の和に 変形するという方針を採用することになる。しかしながら、それを実現するには結構な計算がまっている。まず第一に $\sum_{n<x}\overline{b(n,\overline{\chi})}$ の Voronoi 型公式を証明する必要がある。そして Voronoi 公式の主要部を与える有限和の各項が $a(n,\chi)$ を含んだ然るべき形になっていることを示さなくてはならない。これが結構骨が折れる作業である。というのは、$b(n,\chi)$ の定義の由来は $\sum_{n<x}a(n,\chi)$ の Voronoi 公式の主要部を与える有限和の項に現れるものの一部が $b(n,\chi)$ なのである。今また、その $b(n,\chi)$ の平均の Voronoi 公式を書いたら、そこには再び $a(n,\chi)$ が然るべき形で現れるか？という状況である。これがうまく示せたら、その後で Jutila 氏のアイディアを実行しなくてはならない。$b(n,\chi)$ の生成関数の形があまりきれいではないので、この作業は（もし可能だとしても）相当煩雑で多量の労力を伴うと思われる。我々の今の状況に Jutila 流の方法を採用するのはあまりスマートなやりかたには感じられなかったので、(11) を逆方向に証明できないかと考えてみた、つまり「$K(2T,n)$ の和を変形し $\tilde{K}(2T,n)$ の和にする」のである。実際 $K(2T,n)$ の和と $\tilde{K}(2T,n)$ の和は T の関数としてほぼ同じ挙動をしていることが強く推察される。私の行った方法はこうだ。$K(2T,n)$ の和をAとする。Aにあるうまい関数を構成してたしてやる。ここでは便宜上そのうまい関数を $P(T)$ とする。その関数 $P(T)$ は誤差に収まる程度のもので、かつ $A+P(T)$ に「ある変形」を可能にする。その変形したものには鞍部点法がうまく機能する状態になっていて、最終的には証明が可能となる（詳しくは [5] を見ていただきたい）。この $P(T)$ の構成に気付くまでが一番苦労したところである。その方法なら Jutla [10] の手法はここでは不要（応じて $b(n,\chi)$ の平均の Voronoi 公式を求めるなどという作業も不要）となる。

$I(T,\chi)$ のアトキンソン公式を、私はこのようにして証明したわけですが、「もっと別の方法で出来る」とか、「もっと易しく出来る」という方がいたらご一報ください。実は T. Meurman 氏が $I(T,\chi)$ に対してのアトキンソン公式を証明していて非公式の草稿 [18] をもっ

ていると聞いたことがある。そこではもっと簡明に証明されている可能性も十分に考えられるのだが、現段階ではその内容を確認したわけではないので、ここでは自分流の方法を紹介しました。

Remark 4 ちなみに $\int_{-T}^{T}|L(1/2+it,\chi)|^2dt$, に対してアトキンソン型の公式を証明しようと思ったらそれは易しい。*(9)* のような積分はでないから、$I(T)$ や $I(T,q)$ の場合と同じようにして証明出来てしまう。

6 最後に

私は $\Lambda(T)$ の挙動をアトキンソン型公式を通して眺める事を選択したが、他にも $L(s,\chi)^2$ の近似関数等式からアプローチする方法もありうる。しかし $E(T)$ の研究の歴史を振り返ると、その振動状況をうまく捉えている結果の多くがアトキンソン公式に依存している。このことより、我々の $\Lambda(T)$ の場合にもアトキンソン型の公式からアプローチをするのが現段階では better でないかと考えているのであるが、どうだろうか。

本稿では $L(s,\chi)$ の「絶対値の差」の下からの評価をしたわけだが、一方で上からの評価として $\Lambda(T)=O_q(T^{1/3+\epsilon})$(ここで ϵ は任意に小さい正の実数) ぐらいは既知の結果を引用すればすぐに得られる。また、$|L(1/2+it,\chi_j)-L(1/2+it,\chi_k)|$ の二乗平均は比較的易しく求まるだろう（これは偏角をこめた値の差が平均的にはどれくらい離れているのかを考えているわけである)。これらの結果と今回の結果をあわせて、「二つの L 関数は何が似ていて、どのような点で異なっているのか」をもう少し踏み込んで議論するのも面白いかなと考えています。

References

[1] F.V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, *Acta Math.* **81** (1949), 353-376.

[2] J.L. Hafner and A. Ivić, On the mean-square of the Riemann zeta function on the critical line, J. Number Theory **32** (1989), 151-191.

[3] D.R. Heath-Brown, The mwan value of theorem for the Riemann zeta-function, Mathematika **25** (1978), 177-184.

[4] D.R. Heath-Brown and K. Tsang, *Sign changes of* $E(T)$, $\Delta(X)$ *and* $P(X)$, J. Number Theory **49** (1994), 73-83.

[5] H. Ishikawa, *The mean square of Dirichlet L functions and a difference between the values of* $L(1/2+it,\chi_j)$ *and* $L(1/2+it,\chi_k)$, submitted.

[6] H. Ishikawa, *The mean square of Dirichlet L functions and a difference between the values of* $L(1/2+it,\chi_j)$ *and* $L(1/2+it,\chi_k)$*II*, submitted.

[7] A. Ivić, The Riemann Zeta-Function, Wiley-Interscience Publication, New York, 1985.

[8] A. Ivić and H. J. J. te Riele, On the zero of the error term for the mean square of $|\zeta(1/2+it)|$, Math. Comput. **56**(1991), 303-328.

[9] M. Jutila, Riemann's zeta-function and the divisor problem, Ark. Math. **21** (1983), 75-96.

[10] M. Jutila, Transformation formula for Dirichlet polynomials, J. Number Theory **18**(1984), 135-156.

[11] M. Katsurada and K. Matsumoto, A weighted integral approach to the mean squre of Dirichlet L-functions, in *"Number Theory and its Applications"*, K. Győry and S. Kanemitsu(eds.), Developments in Math. Vol. 2, Kluwer Acad. Publ., 1999, pp. 199-229

[12] A. Laurinčikas, The Atkinson formula for L-functions near the critical line, Liet. Math. Rink. **33**(1993)435-454(in Russian) = Lithuanian Math. J. **35** (1993) 337-351.

[13] K.Matsumoto, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip, Japanese J. Math. **15**(1989), 1-13.

[14] K.Matsumoto, Recent Developments in the Mean Square Theory of the Riemann Zeta and other Zeta-Functions, in "Number Theory" (R.P.Bambah, V.C. Dumir and R.J. Hans-Gill eds.) Hindustan Book Agency and Indian National Science Acad. distributed (outside India) by Birkhäuser, 2000, 241-286.

[15] K.Matsumoto and T.Meurman, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip II, Acta Arith. **68** (1994), 369-382.

[16] K.Matsumoto and T.Meurman, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip III, Acta Arith. **64** (1993), 357-382.

[17] T.Meurman, A generalization of Atkinson's formula to L-functions, Acta Arith. **47**(1986), 351-370.

[18] T.Meurman, Identities of the Atkinson type for L-functions, unpublished manuscript.

[19] Y.Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L-functions II, Proc. Japan Acad. **61** **A**(1985), 313-316.

[20] Y.Motohashi, リーマンゼータ関数と保型波動, 共立講座 21 世紀の数学シリーズ21, 共立出版 (1999).

[21] H.Nakaya, The mean squre of the Dirichlet L-function in the critical strip, Liet. Math. Rink. **40**(2000), 201-213.

[22] H.Nakaya, On the mean square formula for Dirichlet L-functions, Res. Proc. Tokyo Metrop. College of Aeronautical Engeineering. **38** (2000), 1-8.