数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 118-124

ON DIFFEOMORPHISMS OVER SURFACES IN THE COMPLEX PROJECTIVE PLANE

佐賀大学・理工学部数理科学科　廣瀬　進 (Susumu Hirose)
Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering,
Saga University

1. 序

非特異平面 3 次曲線の複素射影平面内での変形を考えてみる．ある lattice (例えば，$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-1}$) による複素平面の商としてあらわされる 1 次元複素トーラスは，その lattice に対応する Weierstrass の $\wp$-関数を用いて複素射影平面へ埋め込むことができ，その像は非特異平面 3 次曲線になっている．ここで，もとの lattice を一定方向に変形し最終的にもとの lattice と集合として一致させる (例えば，$0 \leq t \leq 1$ をパラメーターとして，$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}(\sqrt{-1}+t)$ と変形する)．すると，埋め込みがアイソトピックに変形していき，最終的に像そのものはもとの埋め込みと同じになるが，ひねりが生じたことになる．この「ひねり」を位相幾何的に見るとどうなっているだろうか？また「ひねり」はどれほど起こりうるだろうか？

上の問題を定式化する．種数 g の有向閉曲面 Σ_g の $\mathbb{CP}^2$ への埋め込みの像を K と書くことにし，対 $(\mathbb{CP}^2, K)$ を $\mathbb{CP}^2$ 内の Σ_g-knot と呼ぶことにする．有向閉曲面 Σ_g の写像類群を $\mathcal{M}_g$ であらわす．その部分群

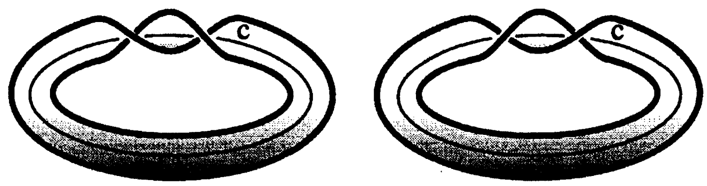
$$\mathcal{E}(\mathbb{CP}^2, K) = \left\{ \phi \in \mathcal{M}_g \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{CP}^2 \text{ 上の向きを保つ可微分同相写像 } \Phi \text{ で} \\ \Phi|_K = \phi \text{ となるものがある．} \end{array} \right\}$$

を知ることが目標となる．ただし，$\mathbb{CP}^2$ 内の Σ_g-knot にはたくさんのヴァリエーションがあるので，ここでは，標準的なものと平面曲線としてあらわされるものとの 2 種について議論する．

Date: 2004 年 5 月 6 日.

2. 4次元球体の中の HOPF BAND

S^3 内の絡み目 L が *fiber link* であるとは，$\phi\ :\ S^3 \setminus L \to S^1$ が S^1 上の曲面束となっている事である．各 $t \in S^1$ について $\phi^{-1}(t) = F$ は t に依らず同相であり，この F を L の *fiber* と言う．ある F 上の可微分同相写像 h があり $S^3 \setminus L$ が $F \times [0,1]/(x,0) \sim (h(x),1)$ と同相となっているときに，この h を L の *monodromy* とよぶ．



Positive Hopf band **Negative Hopf band**

FIGURE 1

Figure 1 にある通り S^3 内に埋め込まれたアニュラスを *Hopf band* と呼び，その境界として定まる絡み目を *Hopf link* と呼ぶ．この Figure にある通り Hopf band（したがって Hopf link）には二通りのものがあるが，ここでは区別しない．Hopf link は，Hopf band をファイバーとし，core となっている閉曲線に沿った 1 回の Dehn twist をモノドロミーとする fiber link である．ここで，B を 4 次元球体 D の境界 S^3 内の Hopf band，B の内部をを D^4 の内部へ押しこんだ物を B'，その core を c とする．

Proposition 2.1. *c に沿った Dehn twist T_c は拡張可能である．すなわち，$T \in$ $\mathrm{Diff}_+(D^4, \mathrm{fix}\ \partial D^4)$ で $T|_{B'} = T_c$ となる物がある．*（この写像は，恒等写像とアイソトピックなものになっている．）

Proof . Hopf link ∂B は fiber が B で monodromy が T_c の fiber link であるので，S^3 の向きを保つ可微分同相写像 ψ で $\psi|_B = T_c$ をみたすものがあり，さらにイソトピー ψ_t $(t \in [0,1])$ で $\psi_0 = id_{S^3}$ と $\psi_1 = \psi$ とをみたすものがある．ここで，$\overline{N(\partial D^4)}$ と $S^3 \times [0,2]$ との同一視を $S^3 \times \{0\} = \partial D^4$ と $B' = \partial B \times [0,1] \cup B \times \{1\}$ とをみたすよ

うに取る．可微分同相写像 T を次の様に定めると，

$$T|_{\overline{N(\partial D^4)}}(x,t) = \begin{cases} (\psi_t(x), t) & 0 \leq t \leq 1 \\ (\psi_{2-t}(x), t) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$T|_{D^4 \setminus \overline{N(\partial D^4)}} = id,$$

これが我々が必要とした同相写像である． □

3. 複素射影平面に標準的に埋め込まれた閉曲面

まず，複素射影平面を定義しておく．$\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ 上の $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の作用を $\lambda(z_0, z_1, z_2) = (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2)$ で定める．この作用による商空間は向き付けられた閉 4 次元多様体となるが，これを複素射影平面と呼び，$\mathbb{CP}^2$ で表す．つまり，$\mathbb{CP}^2$ とは，原点をとおる直線全体のなす集合であり，$[X : Y : Z]$ で原点と (X, Y, Z) をとおる直線の表す $\mathbb{CP}^2$ の元を表す事とする．さらに，$\mathbb{CP}^2$ は D^4 に 2-handle h^2 を ∂D^4 上の frame 1 の自明な結び目 K_0 に沿って張り合わせる事によって構成される事が良く知られている（例えば，[3, 106 頁] を参照せよ）．

3 次元球体に g 個の 1-handle を接合して出来る向き付け可能（境界付き）3 次元多様体を（種数 g の）3 次元ハンドル体とよび，H_g であらわす．H_g の $\mathbb{CP}^2$ への埋め込みを考えると，その像は up to isotopy で一意になっている．そこで，$(\mathbb{CP}^2, \partial H_g)$ のことを複素射影平面に標準的に埋め込まれた曲面と呼ぶことにする．次のことが示された．

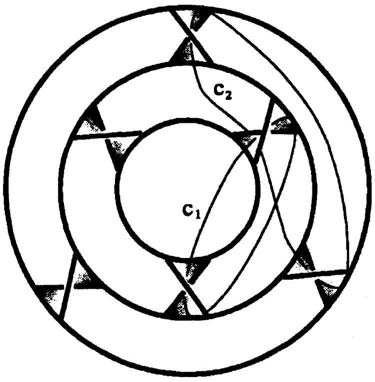
Theorem 3.1. 任意の g に対して，$\mathcal{E}(\mathbb{CP}^2, \partial H_g) = \mathcal{M}_g$ が成立する．すなわち，自明に埋め込まれた曲面上の，任意の向きを保つ可微分同相写像は $\mathbb{CP}^2$ へ拡張できる．

Proof ．4 次元球体 D^4 を $\mathbb{CP}^2$ の構成の際に現れた 4 次元球体とし，$N(\partial D^4)$ を ∂D^4 の D^4 における正則近傍とする．ここで，$N(\partial D^4)$ を $S^3 \times [0, -1]$ と同一視する．ただし，この同一視は $S^3 \times \{0\} = \partial D^4$ となり，また，各 $-1 \leq t < 0$ に対して，$S^3 \times \{t\}$ が D^4 の内部になるようなものとする．3 次元ハンドル体 H_g の $\mathbb{CP}^2$ への埋め込みの像は，up to isotopy で一意であるから，$H_g \subset S^3 \times \{-1\}$ となっていて，H_g 上の単純閉曲線 c で $\mathcal{M}_g$ の Lickorish による生成系 [7] に対応するものが，$S^3 \times \{-1\}$ 上の自明な結び目になっていて，さらに，その ∂H_g における正則近傍 $N(c)$ が $S^3 \times \{-1\}$ に埋め込まれた自明な annulus になっていると仮定してかまわない．そこで，H_g を

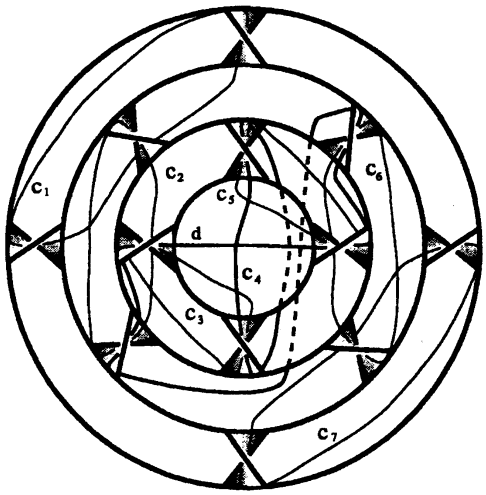
$S^3 \times \{-1\}$ 内でアイソトピックに変形して，$c \cup K_0$ が Hopf link になるようにする．その後，$N(c)$ を $\partial(D^4 \cup h^2)$ へ押し込むと，$N(c)$ は ∂h^4 上の Hopf band になる．ここで Proposition 2.1 を用いることにより，T_c が h^4 内で拡張可能であること，従って $\mathbb{CP}^2$ 内で拡張可能であることが分かる． □

4. 非特異平面曲線

非特異平面 d 次曲線 C_d とは，非特異な 3 変数 d 次斉次多項式の零点集合として表される $\mathbb{CP}^2$ 内の閉曲面のことであるが，埋め込みのイソトピー類が多項式によらないことが知られているので，例えば，$C_d = \{[X:Y:Z] \in \mathbb{CP}^2 | X^d + Y^d + Z^d = 0\}$ と考えて構わない．$\mathbb{CP}^2$ に埋め込まれた有向閉曲面は $H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$ の元を代表しているが，$[C_d] = d[\mathbb{CP}^1]$ となっており，さらに，C_d の種数は $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ となっている．



$F_{3,3}$



$F_{4,4}$

FIGURE 2

Akbulut と Kirby による C_d のトポロジカルな表示を紹介する為に若干の準備をする．まず U を S^3 内の自明な結び目 K_1 の正則近傍とする．1 次元ホモロジー群 $H_1(\partial U, \mathbb{Z})$ の生成系として μ を K_1 のメリディアンの代表する元，λ を K_1 のロンジチュードの代表する元とする．このとき，$m\mu + n\lambda$ を代表する ∂U 上の $\gcd(m,n)$ 本の向き付けられた単純閉曲線が定める向き付けられた絡み目を (m,n)-トーラス絡み目と呼び，$T_{m,n}$ で表す．トーラス絡み目 $T_{m,n}$ に対して，Figure 2 のように n 個の円板

に $m(n-1)$ 本のねじれたバンドを張り合わせることによって，ザイフェルト曲面を構成することが出来るが，これを $F_{m,n}$ であらわすことにする．ここから，$m=n=d$ となる場合について議論する．Figure 3 の右側のように，$\partial(D^4\cup h^2)$ 上では $T_{d,d}$ は d 成分の自明な絡み目になっている．この自明な絡み目を境界とする $\partial(D^4\cup h^2)$ 上の d 枚の円板を D_d であらわす事とする．

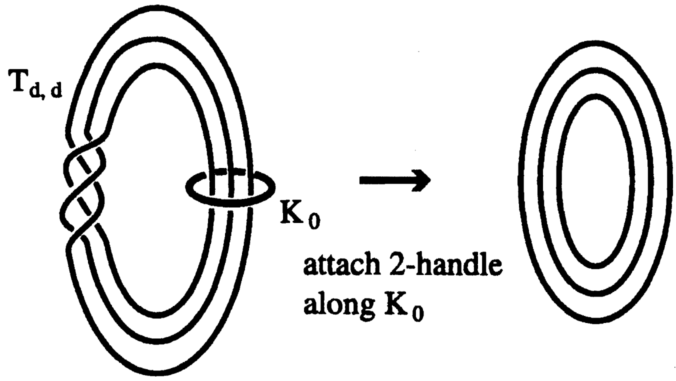


FIGURE 3

Akbulut と Kirby は次の事実を示した [1].

Proposition 4.1. $C_d = F_{d,d}\cup D_d$.

この結果を用いて，次を示す．なお，以下の事実は，$d=3$ の場合は「序」にあるとおり，$\wp$-関数を用いた議論で示すことが出来る．また，$d=4$ の場合は種数 3 のリーマン面は，超楕円的でなければ平面 4 次曲線であるという事実から直ちに従う．従って (文献として見たことはないが) 古典的に知られている事実と思われる．

Theorem 4.2. 次数 d が 3 または 4 であるとき，$\mathcal{E}(\mathbb{CP}^2, C_d) = \mathcal{M}_{g[d]}$，となっている（ただし，$g[d]=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$）．すなわち，$C_d$ 上の向きを保つ可微分同相写像は全て $\mathbb{CP}^2$ 上に拡張可能である．

Proof ．まず次数 $d=3$ の場合を議論する．非特異曲線 C_3 は二次元トーラス T^2 と同相である．Figure 2 が示す通り，$F_{3,3}$ 上に単純閉曲線 c_1 と c_2 をとると，これらの正則近傍は Hopf band になっている．従って，Proposition 2.1 から，T_{c_1} と T_{c_2} とは $\mathcal{E}(\mathbb{CP}^2, C_3)$ の元である．一方，よく知られているとおり，$\mathcal{M}_1$ は T_{c_1} と T_{c_2} とで生成されているので，$\mathcal{E}(\mathbb{CP}^2, C_3)=\mathcal{M}_1$ が示せた

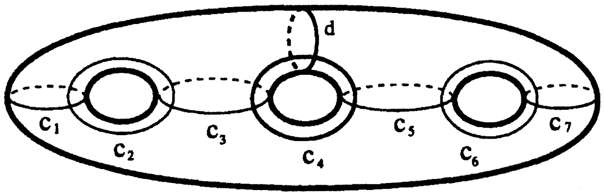


FIGURE 4

次数 $d=4$ の場合も同様にして示すことができる．ただし，Figure 4 の単純閉曲線が同じ記号で表されている Figure 2 の $F_{4,4}$ の単純閉曲線に対応していて，さらに，これらが種数 3 の閉曲面の写像類群を生成している事 [7] に注意せよ． □

次数が 5 以上の場合はまだ良く分かっていないが，さらに次数が奇数ならば，非特異代数曲線は $\mathbb{CP}^2$ 内の characteristic surface （2 次の Stiefel-Whitney 類 $w_2(\mathbb{CP}^2)$ の Poincaré 双対）となっているため，Rokhlin の 2 次形式が定義できる (なお，定義は [2], [8], および [10] を参照せよ) ことに注意すると，直ちに次が示せる．

Proposition 4.3. 次数 d が 5 以上の奇数であるとき，$\mathcal{E}(\mathbb{CP}^2, C_d) \subsetneqq \mathcal{M}_{g[d]}$ である．

5. 他の 4 次元多様体内の曲面について

他の 4 次元多様体へ埋め込まれた曲面に対して，同様の問題を考える．

5.1. **4 次元球面 S^4 の場合．** 4 次元球面に埋め込まれた曲面は必ず characteristic であり，対応する Rokhlin の 2 次形式が even であるので，$\mathcal{E}(S^4, F)$ は必ず $\mathcal{M}_g$ の真部分群になっている．射影平面の場合と同様に標準的な埋め込み $(S^4, \partial H_g)$ が定義され，次の事がわかっている．

Theorem 5.1. *($g=1$ の場合は Montesinos [9] による．$g \geq 2$ の場合は筆者 [5] による．) 写像類群 $\mathcal{M}_g$ の元 ϕ が $\mathcal{E}(S^4, \partial H_g)$ の元であるための必要十分条件は，ϕ が Rokhlin の 2 次形式 $q_{\partial H_g}$ を保つことである．*

証明は，$\mathcal{M}_g$ のうち $q_{\partial H_g}$ を保つ元のなす部分群 (even spin mapping class group) の生成系を求め，さらに，それらが S^4 に拡張できることを確認することによる．

一方，非自明な埋め込みについては Rokhlin の 2 次形式以外に，たとえば補空間の基本群等が拡張のための障害になることがあるが，特に，非自明な結び目の spun と

して構成される実二次元トーラスの埋め込みに対しては，岩瀬順一氏（金沢大学）の仕事 [6] があり，また筆者による仕事 [4] もある．

5.2. $S^2 \times S^2$ の場合. $S^2 \times S^2$ へ埋め込まれた曲面に対する同種の問題について，現在，安原晃氏（東京学芸大学）と共同研究を行っている．現時点（2004年4月）では，次の結果が得られている．

Theorem 5.2. 任意の閉曲面（向き付け不可能でも良い）F に対し，その $S^2 \times S^2$ への埋め込みで，F 上の任意の可微分同相写像が $S^2 \times S^2$ に拡張できるものが存在する．

なお，§3 の結果も，向き付け不可能な曲面を含んだ結果へ拡張することが出来ることが分かっている．

References

[1] S. Akbulut and R. Kirby, *Branched covers of surfaces in 4-manifolds*, Math. Ann. 252(1980), 111–131.

[2] M. Freedman and R. Kirby, *A geometric proof of Rochlin's theorem*, Proc. Symp. Pure Math. 32(1978), 85–97.

[3] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Grad. Stud. in Math. 20, American Mathematical Society, 1999.

[4] S. Hirose, *On diffeomorphisms over T^2-knot*, Proc. of A.M.S. 119(1993), 1009–1018

[5] S. Hirose, *On diffeomorphisms over surfaces trivially embedded in the 4-sphere*, Algebraic and Geometric Topology, 2, (2002), 791–824

[6] Z. Iwase, *Dehn surgery along a torus T^2-knot. II*, Japan. J. Math. 16(1990), 171–196

[7] W.B.R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 60(1964), 769–778, Corrigendum: Proc. Cambridge Philos. Soc. 62(1966), 679–681.

[8] Y. Matsumoto, *An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin*, A la Recherche de la Topologie Perdue, Progress in Math., 62(1986), 119–139.

[9] J.M. Montesinos, *On twins in the four-sphere I*, Quart. J. Math. Oxford (2), 34(1983), 171–199

[10] V.R. Rokhlin, *Proof of Gudkov's hypothesis*, Functional Analysis and its Applications, 6(1972), 136–138

〒840-8502 佐賀市本庄町1番地　佐賀大学理工学部数理科学科
E-mail address: `hirose@ms.saga-u.ac.jp`