数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 141-143

ロホリン不変量から定まるトレリ群のコホモロジー類について

東工大・情報理工　北野晃朗 (Teruaki Kitano)
Tokyo Institute of Technology

はじめに

これは鈴木正明氏（東大・数理）との現在進行中の共同研究に関する報告です。但し、この文章に関する全責任は北野にあります。

以下、種数 $g \geq 2$ の向き付けられた閉曲面を Σ_g とし、その写像類群 $\mathcal{M}_g$ を考えます。Σ_g の向きを保つ同相写像が $H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ 上の交叉形式を保つ同型写像を誘導する事から表現 $\mathcal{M}_g \to Sp(2g,\mathbb{Z})$ が得られます。この準同型の核を Torelli 群と呼び、$\mathcal{I}_g$ と表します。

Heegaard 分解を経由することにより、3 次元多様体（ホモロジー 3 球面）の位相不変量である Rochlin 不変量から $\mathcal{I}_g$ から $\mathbb{Z}/2$ への全射準同型

$$\mu : \mathcal{I}_g \to \mathbb{Z}/2$$

が得られます。このようにして得られる写像を Birman-Craggs 準同型と呼びます。

もちろん、μ は Heegaard 分解の取り方に依存しますが、Heegaard 分解の取り方を動かす、つまり、Birman-Craggs 準同型全体を考える事により、$\mathcal{I}_g$ の $\mathbb{Z}/2$-アーベル化

$$\tilde{\mu} : \mathcal{I}_g \to \mathbb{B}_3$$

が得られます。この結果は Birman-Craggs 準同型が Heegaard 分解を取り替えた時、どのように変化するかを調べる事により、D.Johnson により証明されました。

ここで $\mathbb{B}_3$ は次のようなある $\mathbb{Z}/2$ 加群です。$\mathbb{B}$ を 1 をもつ $\mathbb{Z}/2$-上 $H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z}_2)$ により生成されるブール代数とします。このブール代数 $\mathbb{B}$ は次数により与えられる自然な filtration

$$\ldots \mathbb{B}_n \supset \cdots \supset \mathbb{B}_3 \supset \mathbb{B}_2 \supset \mathbb{B}_1 \supset \mathbb{B}_0 =< 1 >$$

をもちます。$\mathbb{B}_3$ はこの filtration の次数 3 以下の部分からなる $\mathbb{Z}/2$ 上の加群です。

Birman-Craggs 準同型の定義や性質等については [1], [2], [3] を参照して下さい。

背景

D. Johnson により Torelli 群のアーベル化は $\mathbb{Z}$ 上で完全に決定され、Johnson 準同型

$$\tau : \mathcal{I}_g \to \Lambda^3 H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})/H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$$

と上で述べた $\mathbb{B}_3$ への写像の fiber 積になります。特に、Torelli 群の $\mathbb{Q}$-係数 1 次元コホモロジー群は Johnson 準同型の像の 1 次元コホモロジー群と同型になります。与えられた群に対して、そのアーベル化を考えると、これは 1 次元ホモロジーを考える事に対応します。一般にアーベル化のホモロジーは元の群のホモロジーの近似と考える事ができます。

ここではコホモロジーで考え、アーベル化のコホモロジーを元の群のコホモロジーに引き戻してその像を考えます。

Johnson 準同型 τ によるコホモロジーの引き戻しに関しては、$\mathbb{Q}$-係数の場合 R. Hain により 2 次元の場合、逆井氏により 3 次元の場合にそれぞれ決定されています。

本研究では $\mathcal{I}_g$ の $\mathbb{Z}/2$-アーベル化 $\mathcal{I}_g \to \mathbb{B}_3$ による $\mathbb{B}_3$ の $\mathbb{Z}/2$-コホモロジー類の引き戻しを考えます。$\mathbb{B}_3$ のコホモロジーは 1 次元コホモロジー類 (=Birman-Craggs 準同型) によって生成される多項式環となります。それらの引き戻しの像を $\mathcal{I}_g$ のコホモロジー環上で決定するのが最終目標です。

結果

以下では簡単のため、種数 $g \geq 3$ とし、さらに $\mathcal{I}_g$ の部分群 $\mathcal{K}_g$ に話を制限して考えます。幾何的には $\mathcal{K}_g$ は bounding simple closed curve に沿った Dehn twist で生成される群です。一方で代数的には D. Johnson の結果から $\mathcal{K}_g$ は Johnson 準同型の核と一致しています。さらに、$\mathbb{B}_3/\mathbb{B}_2$ は Johnson 準同型 τ を mod 2 で考えた像に対応しています。

これらの事から、 $\mathcal{K}_g$ に制限した準同型

$$\tilde{\mu} : \mathcal{K}_g \to \mathbb{B}_3$$

の像は $\mathbb{B}_2$ 全体になり、この写像で $\mathbb{B}_2$ の 2 次元コホモロジーを $\mathcal{K}_g$ のコホモロジーに引き戻すと、どうなっているかを考えます。

定理 1. $\tilde{\mu}^* : (\bigwedge^2 \mathbb{B}_2)^* \to H^2(\mathcal{K}_g; \mathbb{Z}/2)$ は全単射。

$\mathbb{Z}/2$-係数コホモロジー群は $\mathbb{Z}/2$-係数ホモロジー群の双対ベクトル空間ですから、ホモロジーで考える事により、次の結果が得られます。

定理 2. $\tilde{\mu}_* : H_2(\mathcal{K}_g; \mathbb{Z}/2) \to \bigwedge^2 \mathbb{B}_2$ は全単射。

注意 3. アーベル群のコホモロジーの一般論から、B_2 の 2 次元コホモロジーは $\mathbb{Z}/2$-係数では、$\bigwedge^2 \mathbb{B}_2 \oplus \mathbb{B}_2$ と同型になります。

References

[1] J. Birman and R. Craggs, *The μ-invariant of 3-manifolds and certain structural properties of the group of homeomorphisms of a closed, oriented 2-manifold*, Trans. AMS. Vol 237 (1978).

[2] D. Johnson, *Quadratic forms and the Birman-Craggs homomorphisms*, Trans. AMS. Vol. 261 (1980).

[3] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$*, Math. Ann. Vol 249 (1980).

[4] D. Johnson, *The structure of the Torelli group-III*, Topology Vol. 24 (1985).

[5] R. Hain, *Infinitesimal prersentations of the Torelli groups*, J. AMS. Vol. 10 (1997).

[6] T. Sakasai, *The Johnson homomorphism and the third rational cohomology of the Torelli group*, Preprint (2003).