

Hyperbolically maximal domains on Riemann surfaces

山口大学理学部 増本 誠 (Makoto Masumoto)
Department of Mathematics
Yamaguchi University

広島大学大学院工学研究科 柴 雅和 (Masakazu Shiba)
Applied Mathematics, Graduate School of Engineering
Hiroshima University

1. はじめに

この小論では, [4] に発表した結果を紹介する. 任意の Riemann 面 R は, 曲率が定数である完備等角計量 ds_R を持つ. R の部分領域 D も, それ自身 Riemann 面であるので, 同様の計量 ds_D を持つ. 我々は, [3] において, これらの計量の比として与えられる D 上の関数 ds_D/ds_R の挙動を調べ, その結果を種数 1 の開 Riemann 面の接続の理論へ応用した. [4] では, このような標準計量の比を用いて, R の単連結部分領域のなすある族に擬順序を導入した. こうして得られる擬順序集合は, ただ一つの最大元を持つことが証明される. この最大元が, 標題の双曲的極大領域 (hyperbolically maximal domain) である. 以下で示すように, 双曲的極大領域は, いろいろと良い性質を持っている. さらに, 我々の手法が R の自己等角写像からなる真性不連続群の基本領域の新しい構成法を与えていることにも言及する.

2. 領域の擬順序族

R を Riemann 面とし, Γ を R の自己等角写像からなる真性不連続群とする. R から商 Riemann 面 R/Γ の上への自然な射影を π と書く. Γ の任意の非自明な元によっても固定されない R の点全体を R^* と表す: $R^* = \{p \in R \mid \text{任意の } \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}_R\} \text{ に対し } \gamma(p) \neq p\}$. 集合 R^* は R の Γ -不変部分領域であり, $R \setminus R^*$ は R の離散部分集合である. この論文では, 常に, $\pi(R^*) \neq \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ である, すなわち, $\pi(R^*)$ は複素数平面 \mathbb{C} と Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ のいずれとも等角同値ではない, と仮定する.

任意の $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}_R\}$ に対し $\gamma(D) \cap D = \emptyset$ を満たす R の単連結部分領域 D の全体を、 $\mathcal{D}^\Gamma(R)$ と表す。そして、 $p \in R^*$ に対し $\mathcal{D}_p^\Gamma(R) = \{D \in \mathcal{D}^\Gamma(R) \mid p \in D\}$ とおく。明らかに、 $\mathcal{D}_p^\Gamma(R) \neq \emptyset$ である。 Γ が自明な群のとき、 $\mathcal{D}^\Gamma(R)$, $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ を、それぞれ、 $\mathcal{D}(R)$, $\mathcal{D}_p(R)$ と略記する。

$\pi(R^*) \cong \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ なので、 $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ の任意の元 D は単位開円板 \mathbb{D} と等角同値である。特に、 D は、曲率 -1 の完備等角計量 ds_D を持つ。 $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ のとき、局所的に $ds_{D_j} = \lambda_{D_j}(z)|dz|$ ($j = 1, 2$) の形をしているので、 ds_{D_2}/ds_{D_1} は $D_1 \cap D_2$ 上の関数を与えている。この事実を念頭において、次の定義を設ける。

定義 1. $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ に対し、

$$D_1 \underset{p}{\preceq} D_2 \iff \frac{ds_{D_2}}{ds_{D_1}}(p) \leq 1$$

と定める。

族 $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ 上の関係 $\underset{p}{\preceq}$ は、反射律と推移律を満たすので、擬順序 (quasi-order, preorder) である。しかし、反対称律を満足しないので、順序ではない。

一般に、擬順序集合 (X, \preceq) から擬順序集合 (Y, \sqsubseteq) の中への写像 f は、 $x_1 \preceq x_2$ ならば必ず $f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$ であるとき、擬順序準同型写像 (quasi-order preserving mapping) であると言う。さらに、 f が全単射で、 f^{-1} も擬順序準同型であるとき、 f は擬順序同型写像 (quasi-order isomorphism) であると言う。

例 1. 包含関係 \subset は、 $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ の順序である。Schwarz の補題により、 $D_1, D_2 \subset \mathcal{D}_p^\Gamma(R)$, $D_1 \subsetneq D_2$ ならば $(ds_{D_2}/ds_{D_1})(p) < 1$ である。従って、 $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ 上の恒等写像は、(擬)順序集合 $(\mathcal{D}_p^\Gamma(R), \subset)$ から擬順序集合 $(\mathcal{D}_p^\Gamma(R), \underset{p}{\preceq})$ への擬順序準同型写像である。しかし、擬順序同型写像ではない。実際、 $D_1 \neq D_2$ であっても $(ds_{D_2}/ds_{D_1})(p) = 1$ となることがあるからである。

次の簡単な命題は、次節の議論において基本的な役割を果たす。

命題 1. $p \in R^*$ に対し、写像

$$\mathcal{D}_p^\Gamma(R^*) \ni D \mapsto \pi(D) \in \mathcal{D}_{\pi(p)}(\pi(R^*))$$

は $(\mathcal{D}_p^\Gamma(R), \underset{p}{\preceq})$ から $(\mathcal{D}_{\pi(p)}(\pi(R^*)), \underset{\pi(p)}{\preceq})$ の上への擬順序同型写像である。

3. 双曲的極大領域

定義 2. R の部分領域 D は、ある $p \in R^*$ に対し $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ の最大元であるとき、すなわち、

任意の $D' \in \mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ について $D' \underset{p}{\preceq} D$ が成立するとき, Γ に対する双曲的極大領域であると言う.

一般に, 擬順序集合は最大元を持つとは限らないし, 反対称律が成り立たないので, 最大元を持ったとしても, その一意性は保証されない. しかし, $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ については次の著しい定理が成り立つ.

定理 1. 任意の $p \in R^*$ に対し, $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ は最大元をただ一つ持つ.

特に, Γ に対する双曲的極大領域の存在が導かれる. 定理 1 の証明を述べよう. 初めに, 命題 1 より, Γ が自明な場合のみを考察すれば十分であることを注意する. 点 p のまわりの局所座標 z で, $z(p) = 0$ を満たすものを固定する. 各 $D \in \mathcal{D}_p(R)$ に対し, $w_D(p) = 0$ を満たす上への等角写像 $w_D : D \rightarrow \mathbb{D}$ を選ぶ. w_D を z の関数と見なしたとき, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_p(R)$ に対し,

$$D_1 \underset{p}{\preceq} D_2 \iff |w'_{D_1}(0)| \geq |w'_{D_2}(0)|$$

が成り立つ. 一方, $D \in \mathcal{D}_p(R)$ のとき, $r > 0$ が十分小さければ $D \setminus \{q \in R \mid |z(q)| \leq r\}$ は同心円環 $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid 1 < |\zeta| < \rho(r)\}$ と等角同値である. 極限

$$M_z(D \setminus \{p\}) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \{\log \rho(r) + \log r\}$$

を, 局所座標 z に関する $D \setminus \{p\}$ の縮約モデュラス (reduced modulus) と呼ぶ ([7, §1.6] または [6, §3.2] 参照). 容易に分かるように,

$$M_z(D \setminus \{p\}) = -\frac{1}{2\pi} \log |w'_D(0)|$$

が成立する. 従って, $M_z(D \setminus \{p\})$ を最大にする $D \in \mathcal{D}_p(R)$ の存在と一意性を示せばよい. そのために, $\check{R}_p = R \setminus \{p\}$ とおき, \check{R}_p の部分領域族 $\check{\mathcal{D}}_p = \{D \setminus \{p\} \mid D \in \mathcal{D}_p(R)\}$ を考える. すると, Strebel の定理 ([5, §§9–11], [6, Theorem 23.2]) により, 2 条件

- (i) $\check{R}_p \setminus \check{D}_p$ の面積は 0 である,
- (ii) \check{D}_p は, \check{R}_p 上のある正則 2 次微分の閉水平軌道で埋め尽くされる (各閉水平軌道は, \check{D}_p に完全に含まれ, \check{D}_p 内で 1 点にホモトピックではない)

を満足する $\check{D}_p \in \check{\mathcal{D}}_p$ の存在することが分かる. さらに, Strebel の別の定理 ([6, Theorem 23.1]) によれば, \check{D}_p は, $\check{\mathcal{D}}_p$ の中で M_z を最大にする唯一の元である. (\check{D}_p の存在と一意性の証明には, Jenkins-Suita の定理 [1, Theorem 1] を用いることもできる.) 以上により, 定理 1 が完全に証明された.

注意. (i) $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ は極小元を持たない (例 1 参照).

(ii) $p \neq p'$ であっても $\mathcal{D}_p^\Gamma(R)$ の最大元と $\mathcal{D}_{p'}^\Gamma(R)$ の最大元とが一致することがある. 例えば, 任意の $p \in \mathbb{D}$ に対して $\mathcal{D}_p(\mathbb{D})$ の最大元は \mathbb{D} 自身である. 非自明な例を, 例 3 で与える.

4. 双曲的極大領域の境界

単連結領域の境界は、例えば、到達不可能な点が存在するなど、一般に、きわめて複雑になり得る。双曲的極大領域の場合、定理 1 の証明中に示されているように、 R 上の特殊な有理型 2 次微分と深い関わりを持っているので、その境界は良い性質を持っていることが期待される。実際、次の定理が示すように、この期待は正当なものであるが、群 Γ の位数が無限大である場合もあるので、その証明は決して自明ではない。

定理 2. D が双曲的極大領域であるならば、任意の $q \in \partial D$ に対し、次の条件を満たす q の近傍列 $\{U_n\}$ が存在する:

- (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{q\}$;
- (ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、
 - (a) \bar{U}_n はコンパクトで、 $\bar{U}_n \subset U_{n-1}$,
 - (b) $\partial D \cap U_n$ は連結であり、
 - (c) $(\partial D \setminus \{q\}) \cap U_n$ は空でなく、有限個の成分からなり、各成分はどれも解析的 (開単純弧) である。

定理 2 は、双曲的極大領域の境界の局所的な様子を記述している。 R が単連結であるときには、境界の大域的な状況も分かる:

定理 3. R が単連結ならば、双曲的極大領域の境界の各成分は単純曲線である。

この定理の証明には、Jordan の曲線定理が本質的な役割を果たしている。定理 2 と合わせると、単連結 Riemann 面 R 上の双曲的極大領域 D の境界 ∂D の各成分は、区分的に解析的な単純曲線からなる。さらに、これら単純曲線は、 R 上のある有理型 2 次微分の水平軌道と零点からなっており、これらの零点において曲線の解析性が崩れている。これらの零点を D の頂点 (vertex) と呼ぶのは自然であろう。また、頂点における D の内角 (interior angle) も自然に定義される。有理型 2 次微分の零点における挙動から、次の命題が直ちに従う。

命題 2. 単連結 Riemann 面上の双曲的極大領域の各頂点における内角は、 $2\pi/m$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) の形をしている。

5. 基本領域

Riemann 面 R 上の群 Γ に対する双曲的極大領域 D は、 $\mathcal{D}^\Gamma(R)$ に属している。さらに、 D を真部分領域として含む $\mathcal{D}^\Gamma(R)$ の元は存在しない (例 1 参照)。この事実から、 D が何らかの意味で Γ の基本領域をなしていることが窺える。実際、次の定理が成り立つ。

定理 4. Riemann 面 R 上の群 Γ に対する双曲的極大領域 D は, Γ の局所有限な基本領域である. すなわち, 次の 3 条件が成り立つ:

- (i) 任意の $\gamma \in \Gamma \setminus \{id_R\}$ に対し, $\gamma(D) \cap D = \emptyset$;
- (ii) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{D}) = R$;
- (iii) R の任意のコンパクト部分集合 K に対し, $\gamma(\bar{D}) \cap K \neq \emptyset$ となる $\gamma \in \Gamma$ の個数は有限である.

以下, R が上半平面 \mathbb{H} である場合を考察する. このとき, Γ は Fuchs 群になる. \mathbb{H}^* は, \mathbb{H} から Γ の楕円的変換の不動点を除いた点の集まりである. 条件 $\pi(\mathbb{H}^*) \neq \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ は常に満たされていることに注意しよう. 従って, 定理 1 が成り立ち, Γ に対する双曲的極大領域が存在していることが分かる. 定理 4 で述べたように, この領域は Γ の局所有限な基本領域である. では, こうして得られた基本領域は, よく知られた Dirichlet 基本領域や Ford 基本領域と一致するだろうか. この問題を解決するために, Γ の基本領域 D に対し, 次の 3 条件を考察する:

- D $\bar{\mathbb{H}}$** D は Dirichlet 基本領域であるが, 双曲的極大領域ではない.
- $\bar{D}\mathbb{H}$** D は双曲的極大領域であるが, Dirichlet 基本領域ではない.
- DH** D は Dirichlet 基本領域であり, かつ双曲的極大領域でもある.

ここで, Dirichlet 基本領域の定義を思い出しておこう. \mathbb{H} の双曲的距離関数を $d(\cdot, \cdot)$ と表す. $z_0 \in \mathbb{H}^*$ に対し, 集合

$$\{z \in \mathbb{H} \mid \text{すべての } \gamma \in \Gamma \setminus \{id_R\} \text{ に対し } d(z, z_0) < d(\gamma(z), z_0)\}$$

を, z_0 を中心とする Γ の **Dirichlet 基本領域** (Dirichlet fundamental domain) と呼ぶ.

例 2. $\Gamma(1)$ を楕円モデューラー群 (elliptic modular group) とする. $\Gamma(1)$ は

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1)$$

の形の変換全体のなす群である. よく知られているように,

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}$$

は, $2i$ を中心とする $\Gamma(1)$ の Dirichlet 基本領域である. 中心を少しずらすと, $\Gamma(1)$ の Dirichlet 基本領域で, ある頂点における角度が π の有理数倍ではないものが得られる. 命題 2 によれば, この基本領域は双曲的極大領域ではない. こうして, **D $\bar{\mathbb{H}}$** の例を得る.

このように, Dirichlet 基本領域はかならずしも双曲的極大領域ではない. では, Dirichlet 基本領域はいつ双曲的極大になるのだろうか. この問いに答えるために, 記号を導入する. D

を群 Γ の Dirichlet 基本領域とする. D の辺 σ に対し, $\gamma_\sigma \in \Gamma$ を, $\gamma_\sigma^{-1}(\sigma)$ が再び D の辺であるものとして定義する. また, σ を含む双曲的直線に関する双曲的対称変換を ι_σ と表す. ι_σ は, 向きを逆にする \mathbb{H} の双曲的等長変換で, σ の各点を動かさない. $\tilde{\gamma}_\sigma = \iota_\sigma \circ \gamma_\sigma$ とおく.

定理 5. D を \mathbb{H} に作用する Fuchs 群 Γ の Dirichlet 基本領域とし, $p \in D$ とする. このとき, D が $\mathcal{D}_p^\Gamma(\mathbb{H})$ の最大元であるための必要十分条件は, D の任意の辺 σ に対し, $\tilde{\gamma}_\sigma(D) = D$ と $\tilde{\gamma}_\sigma(p) = p$ が成り立つことである.

D から \mathbb{D} の上への等角写像 w で, $w(p) = 0$ を満たすものをとる. D 上の有理型 2 次微分 $-dw^2/w^2$ は, p に 2 位の極を持ち, $D \setminus \{p\}$ を閉水平軌道で埋め尽くしている. D が $\mathcal{D}_p^\Gamma(\mathbb{H})$ の最大元になるための条件は, この 2 次微分が \mathbb{H} 上の Γ -不変な有理型 2 次微分に拡張されることである. 定理 5 はこの事実に基づいて証明される.

例 3. $\Gamma(1)$ と D_1 を例 2 の通りとする. すると, D_1 は $\Gamma(1)$ に対する双曲的極大領域である. 実際, 定理 5 を用いて,

$$\tau_1 = \{z \in D_1 \mid \operatorname{Re} z = 0\}$$

上の任意の点 p に対し, D_1 は $\mathcal{D}_p^{\Gamma(1)}(\mathbb{H})$ の最大元であることが分かる. 同様に, 二つの Dirichlet 基本領域

$$D_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1, |z| > 1, |z - 1| > 1\},$$

$$D_3 = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, |z - 1| > 1 \right\}$$

はいずれも $\Gamma(1)$ に対する双曲的極大領域である. それぞれ,

$$\tau_2 = \left\{ z \in D_2 \mid \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \right\}, \quad \tau_3 = \{z \in D_3 \mid |z| = 1\}$$

上の点 p に対し, $\mathcal{D}_p^{\Gamma(1)}(\mathbb{H})$ の最大元である. D_j ($j = 1, 2, 3$) は, **DH** の例である. また, 第 3 節末尾の注意で予告した例にもなっている.

例 4. 点 $z_0 \in D_1 \setminus \tau_1$ を中心とする $\Gamma(1)$ の Dirichlet 基本領域 D を考えよう. D のある辺 σ は, i を端点とし, $g_\sigma(z) = -1/z$ を満たす. この辺は単位円周上の弧ではないので, $\lim_{D \ni z \rightarrow \infty} \iota_\sigma \circ g_\sigma(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \iota_\sigma(\zeta) \neq \infty$ が成り立つ. 従って, $\iota_\sigma \circ g_\sigma(D)$ の $\hat{\mathbb{C}}$ における閉包と $\partial\mathbb{H}$ の共有点は, 無限遠点ではない. 一方, D の $\hat{\mathbb{C}}$ における閉包と $\partial\mathbb{H}$ の共有点は, 無限遠点のみである. これは $\iota_\sigma \circ g_\sigma(D) \neq D$ であることを意味するから, 定理 5 より D は, どの $p \in D$ に対しても $\mathcal{D}_p^{\Gamma(1)}(\mathbb{H})$ の最大元とはならない. よって, D は $\Gamma(1)$ に対する双曲的極大領域ではない. よって, 再び **DH** の例が得られた (例 2 参照).

例 5. $T = \bigcup_{g \in \Gamma(1)} g(\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3)$ とおく. $p \in \mathbb{H}^* \setminus T$ ならば $\mathcal{D}_p^{\Gamma(1)}(\mathbb{H})$ の最大元 D' は $\Gamma(1)$ の Dirichlet 基本領域ではない. これを背理法で示そう. もしも D' が Dirichlet 基本領域で

あったとすると, その中心 z_0 は, 例 4 より, T に属していなければならない. $\Gamma(1)$ -不変性より $z_0 \in \tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3$ と仮定してよい. すると, ある $k_0 = 1, 2, 3$ に対し $D' = D_{k_0}$ となってしまうので, 定理 5 より p は τ_{k_0} 上になければならない. これは $p \in \mathbb{H}^* \setminus T$ であったことに反する. よって, D' は Dirichlet 基本領域にはなり得ない. D は, $\overline{\mathbf{DH}}$ の例である.

例 2, 3, 4 より, $\overline{\mathbf{DH}}$, $\overline{\mathbf{DH}}$, \mathbf{DH} のいずれの例も存在することが分かった. 従って, 双曲的極大領域から得られる基本領域は, Dirichlet 基本領域とは異なる新しい基本領域である.

最後に, Ford 基本領域との関係について注意しておこう. Γ を Klein 群とし, 無限遠点は Γ の不連続領域に属し, Γ のどの楕円的変換の不動点にもなっていないと仮定する. このとき, 集合

$$\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{すべての } \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}\} \text{ に対し } |\gamma'(z)| < 1\}$$

が Γ の Ford 基本領域である. 特に, Γ が \mathbb{D} を不変にする Fuchs 群であるとき, Γ の Ford 基本領域と \mathbb{D} との共通部分は, Γ の \mathbb{D} における 0 を中心とする Dirichlet 基本領域に一致する ([2, Theorem IV.7F]). よって, 双曲的極大領域から得られる基本領域は, Ford 基本領域とも異なることが分かる.

参考文献

- [1] J. A. Jenkins and N. Suita, On the representation and compactification of Riemann surfaces, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **6** (1978), 423–427.
- [2] J. Lehner, Discontinuous Groups and Automorphic Functions, Amer. Math. Soc., Providence, 1964.
- [3] M. Masumoto and M. Shiba, Intrinsic disks on a Riemann surface, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 371–379.
- [4] M. Masumoto and M. Shiba, Hyperbolically maximal domains and fundamental domains for a discontinuous group of conformal automorphisms of a Riemann surface, Q. J. Math. **53** (2002), 337–346.
- [5] K. Strebel, On quadratic differentials with closed trajectories and second order poles, J. Anal. Math. **19** (1967), 373–382.
- [6] K. Strebel, Quadratic Differentials, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.
- [7] O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung, Deutsch Math. **3** (1938), 621–678.

Department of Mathematics, Yamaguchi University, Yamaguchi 753-8512, Japan
e-mail: masumoto@yamaguchi-u.ac.jp

Applied Mathematics, Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima 739-8527, Japan
e-mail: shiba@amath.hiroshima-u.ac.jp