数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 186-192

ON HYPERBOLIC CALCULUS

須川 敏幸　　広島大学大学院理学研究科
TOSHIYUKI SUGAWA　　HIROSHIMA UNIVERSITY

1. 等角計量とそれに関する 1 階微分

ρ をリーマン面 X 上の滑らかな等角計量とする．すなわち，X の各局所座標 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}$ に対して，滑らかな函数 $\rho_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}_+$ があって，それらが座標変換に関して関係式

(1) $$\rho_\beta(\varphi_{\beta,\alpha}(z))|\varphi'_{\beta,\alpha}(z)| = \rho_\alpha(z), \quad z \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

を満たすとする．ただしここに $\varphi_{\beta,\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ とする．以下では局所座標をしばしば単に $z = \varphi_\alpha(p)$ などと書き，$\rho = \rho(z)|dz|$ と表現する．Ω を X の開集合とするとき，$r \in C^2(\Omega)$ に対して複素偏微分

$$\partial r = r_z = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x} - i\frac{\partial r}{\partial y}\right), \quad z = x + iy,$$

は X 上の（大域的な）函数としての不変性は持たず，$\partial r dz$ を $(1,0)$-形式とみなすのが，不変性を捉える最も自然な方法であろう．ここではそうではなく，次の量を考える：

$$\partial_\rho r = \frac{\partial r}{\rho} = \frac{r_z(z)dz}{\rho(z)|dz|}.$$

これは $(1,0) - (1/2,1/2) = (1/2,-1/2)$-形式であるが，少なくとも絶対値を取れば Ω 上の函数とみなせる．以下では便宜上，∂_ρ のような微分作用素は，局所座標 $\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ を与えるごとに V_α 上の函数 $r \circ \varphi_\alpha^{-1}$ に作用するものとして考える．特に X が平面領域である場合には，最初から大域的座標が取れるので，このような場合には函数と思って良く，また実際念頭にある例はほとんどが平面領域の場合である．

この微分作用素だけなら特筆すべきことは何もないが，同種のもので 2 階微分をどのように定義するかが問題となり応用上もしばしば重要となる．その一つにアプローチについて次節で述べる．

2. 等角計量に付随する 2 階微分

Ω を前節と同様に，等角計量 ρ を持つリーマン面 X の開集合とする．一般に $r \in C^2(\Omega)$ に対して，その 2 階複素偏微分 $\partial^2 r$ は局所座標の取り方によってやや複雑な挙動を示すので，もはや形式と考えることも困難である．そこで，ここでは Kim-Minda [1] らによって導入された次のような作用素を考える：

$$\partial_\rho^2 r = \rho^{-2}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} - 2\frac{\partial \log \rho}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

すると直接計算により，この量は Ω 上の $(1,-1)$-形式になっていることが分かる．従って，この量そのものは Ω 上の函数とは言えないが，絶対値を取れば函数となる．なお，ここ

で記号 ∂_ρ^2 は2回合成 $\partial_\rho \circ \partial_\rho$ とは異なる意味で用いられていることに注意する．実際，次の関係式が成り立つ：

$$\partial_\rho^2 r = \partial_\rho(\partial_\rho r) - \partial_\rho \log\rho \cdot \partial_\rho r. \tag{2}$$

これらの微分作用素 $\partial_\rho, \partial_\rho^2$ はさらに次の形の不変性を持っている．(cf. [1, §3.2], [2, Lemma 1])

補題 1. **X を滑らかな等角計量 ρ を持つリーマン面とし，$p: Y \to X$ を別のリーマン面 Y から X への局所単葉正則写像とする．ρ' を ρ の p による引き戻し $p^*\rho$ とするとき，次の公式が成り立つ：**

$$\partial_{\rho'}(r \circ p) = \frac{p'}{|p'|}[(\partial_\rho r) \circ p],$$
$$\partial_{\rho'}^2(r \circ p) = \left(\frac{p'}{|p'|}\right)^2 [(\partial_\rho^2 r) \circ p].$$

3. 合成函数の微分公式

通常の実1変数函数に関する次の合成函数の微分公式は容易に導かれる：

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g',$$
$$(f \circ g)'' = (f'' \circ g) \cdot (g')^2 + (f' \circ g) \cdot g''.$$

実は，リーマン面間の正則写像と滑らかな函数の合成に関しても，前節までに定義した微分作用素について形式的には同じ微分公式を満たすような f に関するある種の微分作用素が一意に存在することが分かる．(ここで，「ある種の」と言った正確な意味は節末の注で少し説明する．)

定理 2. **X, Y をそれぞれ滑らかな等角計量 ρ, σ を持つリーマン面とし，$f: X \to Y$ を正則写像とする．このとき，ある種の微分 $D_1 f, D_2 f$ が存在し，Y の任意の開集合 Ω と任意の $r \in C^2(\Omega)$ に対して，**

$$\partial_\rho(r \circ f) = (\partial_\sigma r) \circ f \cdot D_1 f,$$
$$\partial_\rho^2(r \circ f) = (\partial_\sigma^2 r) \circ f \cdot (D_1 f)^2 + (\partial_\sigma r) \circ f \cdot D_2 f$$

が $f^{-1}(\Omega)$ において成立する．

証明．まず，

$$\partial_\rho(r \circ f) = \rho^{-1} \cdot (\partial r) \circ f \cdot f' = \rho^{-1} \cdot (\sigma \circ f) \cdot (\partial_\sigma r) \circ f \cdot f'$$

が得られるので，

$$D_1 f = \frac{\sigma \circ f}{\rho} f' \tag{3}$$

でなければならないことが分かり，確かにこれは条件を満足している．次に2階微分を考える．X, Y の局所座標をそれぞれ z, w とすると，

$$
\begin{aligned}
&\partial_\rho^2(r\circ f)\\
&= \rho^{-2}\left[(r\circ f)_{zz} - 2(\log\rho)_z(r\circ f)_z\right]\\
&= \rho^{-2}\left[r_{ww}\circ f\cdot(f')^2 + r_w\circ f\cdot f'' - 2(\log\rho)_z(r_w\circ f)\cdot f'\right]\\
&= (\sigma^{-2}r_{ww})\circ f\cdot(D_1f)^2 + \rho^{-2}(r_w\circ f)\cdot f'' - 2\rho^{-2}(\log\rho)_z(r_w\circ f)\cdot f'\\
&= (\partial_\sigma^2 r)\circ f\cdot(D_1f)^2\\
&\quad + 2(\sigma^{-2}(\log\sigma)_w r_w)\circ f\cdot(D_1f)^2 + \rho^{-2}(r_w\circ f)\cdot f'' - 2\rho^{-2}(\log\rho)_z(r_w\circ f)\cdot f'\\
&= (\partial_\sigma^2 r)\circ f\cdot(D_1f)^2\\
&\quad + (\partial_\sigma r)\circ f\cdot\left[2(\sigma^{-1}(\log\sigma)_w)\circ f\cdot(D_1f)^2 + \rho^{-2}(\sigma\circ f)\cdot f'' - 2\rho^{-2}(\log\rho)_z(\sigma\circ f)\cdot f'\right]
\end{aligned}
$$

であることが分かるので，

$$
\begin{aligned}
D_2f &= 2\partial_\sigma(\log\sigma)\circ f\cdot(D_1f)^2 + \rho^{-2}(\sigma\circ f)\cdot f'' - 2\rho^{-2}(\log\rho)_z(\sigma\circ f)\cdot f'\\
&= \frac{2\sigma_w\circ f\cdot(f')^2}{\rho^2} + \frac{\sigma\circ f\cdot f''}{\rho^2} - \frac{2(\log\rho)_z\cdot\sigma\circ f\cdot f'}{\rho^2}
\end{aligned}
$$

とすればよく，これ以外の選択はあり得ない． □

たとえば，X, Y がともに単位円板 $\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ で，ρ, σ がともに双曲計量 $\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| = |dz|/(1-|z|^2)$ である場合には $\partial\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \bar{z}/(1-|z|^2)^2$ であるから

$$
\begin{aligned}
D_1f &= \frac{1-|z|^2}{1-|f|^2}f',\\
D_2f &= \frac{2(1-|z|^2)^2\bar{f}(f')^2}{(1-|f|^2)^2} + \frac{(1-|z|^2)^2f''}{1-|f|^2} - \frac{2\bar{z}(1-|z|^2)f'}{1-|f|^2}
\end{aligned}
$$

となる．D_1f は双曲的導函数 (hyperbolic derivative) と呼ばれるもので，D_2 は Ma-Minda [4] により導入された微分作用素 D_{h2} にほかならない．

次に $X=\mathbb{D}, \rho=\lambda_{\mathbb{D}}$ とし，$Y=\widehat{\mathbb{C}}, \sigma=|dz|/(1+|z|^2)$ の場合を考えると，$\partial\sigma = -\bar{z}/(1+|z|^2)^2$ となるので，

$$
\begin{aligned}
D_1f &= \frac{1-|z|^2}{1+|f|^2}f',\\
D_2f &= -\frac{2(1-|z|^2)^2\bar{f}(f')^2}{(1+|f|^2)^2} + \frac{(1-|z|^2)^2f''}{1+|f|^2} - \frac{2\bar{z}(1-|z|^2)f'}{1+|f|^2}
\end{aligned}
$$

となることが分かる．この D_1f は球面的導函数 (spherical derivative) と呼ばれるもので，D_2f は Ma-Minda [3] により導入された微分作用素 D_{s2} にほかならない．Ma-Minda はこれらの微分作用素を天下り的に与えているが，我々の結果は合成函数の微分公式が成り立つという要請が必然的にこのような微分作用素の形を決定することを示している．

Remark. 上記では局所座標を用いずにやや乱暴な表現をしたが，添え字の面倒さを厭わなければ次のように厳密に定式化することができる．$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ は X の局所座標，$\psi_\gamma : U'_\gamma \to V'_\gamma$ は Y の局所座標とし，$f(U_\alpha)\subset U'_\gamma$ が成り立っているとする．このとき f は

局所的に，$f_{\gamma,\alpha} = \psi_\gamma \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to V'_\gamma \subset \mathbb{C}$ の形に正則函数として表すことができるが，上記の $D_1 f, D_2 f$ はそれぞれ正確には U_α 上の函数として

$$(D_1 f)_{\gamma,\alpha} = \frac{\sigma_\gamma \circ f_{\gamma,\alpha}}{\rho_\alpha} \cdot f'_{\gamma,\alpha},$$
$$(D_2 f)_{\gamma,\alpha} = \frac{2(\partial\sigma_\gamma) \circ f_{\gamma,\alpha} \cdot (f'_{\gamma,\alpha})^2}{\rho_\alpha^2} + \frac{\sigma_\gamma \circ f_{\gamma,\alpha} \cdot f''_{\gamma,\alpha}}{\rho_\alpha^2} - \frac{2\partial(\log\rho_\alpha) \cdot \sigma_\gamma \circ f_{\gamma,\alpha} \cdot f'_{\gamma,\alpha}}{\rho_\alpha^2}$$

として定義される．$\varphi_\beta, \psi_\delta$ をそれぞれ X, Y の別の局所座標とするとき，関係式(1) や

$$\psi_{\delta,\gamma} \circ f_{\gamma,\alpha} = f_{\delta,\beta} \circ \varphi_{\beta,\alpha}$$

などを用いて，実際に次の変換則が成り立つことが直接計算により確かめられる：

$$(D_1 f)_{\gamma,\alpha} = (D_1 f)_{\delta,\beta} \circ \varphi_{\beta,\alpha} \cdot \frac{|\psi'_{\delta,\gamma}|}{\psi_{\delta,\gamma}} \cdot \frac{\varphi_{\beta,\alpha}}{|\varphi_{\beta,\alpha}|},$$
$$(D_2 f)_{\gamma,\alpha} = (D_2 f)_{\delta,\beta} \circ \varphi_{\beta,\alpha} \cdot \frac{|\psi'_{\delta,\gamma}|}{\psi_{\delta,\gamma}} \cdot \frac{{\varphi_{\beta,\alpha}}^2}{|\varphi_{\beta,\alpha}|^2}.$$

従って，特にこれらの絶対値は X 上の函数とみなすことができる．

4. シュワルツ微分との関係

X, Y を滑らかな等角計量 ρ, σ を持つリーマン面とし，$f : X \to Y$ を正則写像として，前節で定義した $D_1 f, D_2 f$ の比

$$Q_f = \frac{D_2 f}{D_1 f} = 2\partial_\rho \log(\sigma \circ f) + \partial_\rho \log f' - 2\partial_\rho \log\rho$$

を考えると便利なことが多い．前節最後の注から分かるように，Q_f は Y の局所座標の取り方にはよらず，X 上の $(1/2, -1/2)$-形式として振る舞うことに注意する．次の補題は計算を効率的に行うためにしばしば便利である．ここで，$|D_1 f|, |D_2 f|$ はともに X 上の函数とみなすことができたことを思い出しておく．次の補題は [1, (4)] の拡張になっている．

補題 3.

$$\partial_\rho |D_1 f| = \frac{1}{2} |D_1 f| \cdot Q_f.$$

証明. $\log|D_1 f|$ に ∂_ρ を作用させると，$D_1 f$ の定義(3) から

$$\begin{aligned}\frac{\partial_\rho |D_1 f|}{|D_1 f|} &= \partial_\rho \log \frac{\sigma \circ f \cdot |f'|}{\rho} \\ &= \partial_\rho(\log\sigma \circ f) + \frac{1}{2}\partial_\rho \log f' - \partial_\rho \log\rho \\ &= \frac{1}{2} Q_f\end{aligned}$$

であることが分かる． □

さて，一般に平面領域上の非定数有理型函数 f に対してそのシュワルツ微分は

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

によって定義される．これについて Cayley の公式

$$S_{g\circ f} = (S_g \circ f)\cdot (f')^2 + S_f$$

が成り立ち，また $S_g = 0 \Leftrightarrow g \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ であることはよく知られている．従って，特にメビウス変換 L, M に対しては変換則 $S_{M\circ f\circ L} = (S_f \circ L)\cdot (L')^2$ に従うことに注意する．

今，X が双曲的平面領域であり，$h : \mathbb{D} \to X$ を（解析的）普遍被覆写像とするとき，その逆函数は一般には多価函数となるが，その多価性や普遍被覆写像 h の取り方の自由度は $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$ の元（従ってメビウス変換）の後ろからの合成の違いだけである．従ってそのシュワルツ微分 $S_{h^{-1}}$ は X 上で well-defined となる．これを X の一意化接続などと呼び，θ_X と表すことにする．これは X 上の正則函数となり h の取り方には依存しない．(より一般にこのようなものは，X に射影構造が与えられれば平面領域でなくとも X 上の正則二次微分として定義できる.) また，定義から関係式

$$(\theta_X \circ h)\cdot (h')^2 = -S_h$$

を満たすことに注意する．このとき次の補題が成り立つことに注意する．単位円板 $\mathbb{D}$ は双曲計量 $\lambda_{\mathbb{D}} = |dz|/(1-|z|^2)$ を持つが，$\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$ の作用に関してこの計量が不変であることから，X にも h を通してこの計量が定義される：$\lambda_X(h(z))|h'(z)| = 1/(1-|z|^2)$. この λ_X は X の双曲計量と呼ばれる．

補題 4. **X を平面領域とし，λ_X を X の双曲計量とすると，**

$$\partial^2 \log \lambda_X = (\partial \log \lambda_X)^2 + \frac{1}{2}\theta_X$$

が成り立つ．

証明．まず $\log(\lambda_X \circ h \cdot |h'|) = \log(\bar{z}/(1-z\bar{z})$ の両辺を z で複素偏微分して

$$(\partial \log \lambda_X)\circ h \cdot h' + \frac{h''}{2h'} = \frac{\bar{z}}{1-|z|^2}$$

となる．さらにこの両辺を複素偏微分して

$$\begin{aligned}
&(\partial^2 \log \lambda_X)\circ h \cdot (h')^2 + (\partial \log \lambda_X)\circ h \cdot h'' + \frac{1}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)' \\
&= \frac{\bar{z}^2}{(1-|z|^2)^2} \\
&= \left\{(\partial \log \lambda_X)\circ h \cdot h' + \frac{h''}{2h'}\right\}^2
\end{aligned}$$

を得るので，整理して所期の式が導かれる． □

系 5.

$$\frac{\partial^2 \lambda_X}{\lambda_X} = 2\left(\frac{\partial \lambda_X}{\lambda_X}\right)^2 + \frac{1}{2}\theta_X.$$

これを用いれば例えば次のような公式が得られる.

定理 6. **X, Y を双曲的平面領域とし，それぞれの双曲計量に関して微分作用素を定義するとき，正則写像 $f : X \to Y$ に対して**

$$\partial^2_{\lambda_X}|D_1 f| = \frac{1}{2}|D_1 f|\left(Q_f^2 + \lambda_X^{-2}(S_f + f^*\theta_Y - \theta_X)\right)$$

が成り立つ．ここに $f^*\theta_Y$ は引き戻し $(\theta_Y \circ f)\cdot(f')^2$ を表すものとする.

証明. $\rho = \lambda_X, \sigma = \lambda_Y$ として計算を進めるが，しばらくは双曲計量であるという仮定は用いないこととする．補題3と式(2)から

$$\begin{aligned} \partial_\rho^2|D_1 f| &= \frac{1}{2}\partial_\rho(|D_1 f|Q_f) - \partial_\rho \log\rho \cdot \frac{1}{2}|D_1 f|Q_f \\ &= \frac{1}{2}|D_1 f|\left(\partial_\rho Q_f + \frac{1}{2}Q_f^2 - \partial_\rho \log\rho \cdot Q_f\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

を得る．次に Q_f の定義から

$$\begin{aligned} \partial_\rho Q_f &= 2\partial_\rho\left[\rho^{-1}\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\sigma}\right)\circ f\cdot f'\right] + \partial_\rho\rho^{-1}\cdot\frac{f''}{f'} + \rho^{-2}\left(\frac{f''}{f'}\right)' - 2\partial_\rho\left(\frac{\partial\rho}{\rho^2}\right) \\ &= -\frac{\partial\rho}{\rho^3}\left[2\left(\frac{\partial\sigma}{\sigma}\right)\circ f\cdot f' + \frac{f''}{f'}\right] + 2\rho^{-2}\left[\frac{\partial^2\sigma}{\sigma} - \left(\frac{\partial\sigma}{\sigma}\right)^2\right]\circ f\cdot(f')^2 \\ &\quad + \rho^{-2}\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\sigma}\right)\circ f\cdot f'' + \rho^{-2}\left(\frac{f''}{f'}\right)' - 2\frac{\partial^2\rho}{\rho^3} + 4\frac{(\partial\rho)^2}{\rho^4} \end{aligned}$$

と計算できる．従って，

$$\begin{aligned} &\partial_\rho Q_f - \rho^{-2}S_f - \frac{1}{2}Q_f^2 - (\partial_\rho\log\rho)\cdot Q_f \\ &= \rho^{-2}\left[\frac{\partial^2\sigma}{\sigma} - 2\left(\frac{\partial\sigma}{\sigma}\right)^2\right]\circ f\cdot(f')^2 - \rho^{-2}\left[\frac{\partial^2\rho}{\rho} - 2\left(\frac{\partial\rho}{\rho}\right)^2\right] \end{aligned}$$

となる.（ここまでは一般の ρ, σ について成り立つ.）今，系5を用いれば関係式

$$\partial_\rho Q_f = \rho^{-2}\left(S_f + f^*\theta_Y - \theta_X\right) + \frac{1}{2}Q_f^2 + (\partial_\rho\log\rho)\cdot Q_f$$

が得られる．これを式(4)に代入すれば所期の公式を得る. □

5. 応用

Y を双曲的平面領域とし，Ω を Y の部分領域とする．すると双曲計量の単調性から

$$\tau_{\Omega,Y} = \frac{\lambda_Y}{\lambda_\Omega} \le 1$$

であり，ある点で等号が成立するのは $\Omega = Y$ である場合に限る．このような量はたとえば[2]において Ω の Y の幾何に関する凸性を論ずるのに用いられた．∂_{λ_Y} を以下では単に ∂_Y と書くことにする．これらに関して，次の定理が得られる.

定理 7. X, Y **を双曲的平面領域とし,** Ω **を** Y **の部分領域とする.** $f: X \to \Omega$ **が解析的な(不分岐)被覆であるとすると,** $\tau = \tau_{\Omega,Y}$ **に関して次の公式が成り立つ.**

$$\tau \circ f = |D_1 f|,$$

$$(\partial_Y \tau) \circ f = \frac{|f'|}{f'} \cdot \frac{Q_f}{2},$$

$$(\partial_Y^2 \tau) \circ f = \frac{|f'|}{f'} \cdot \frac{S_f + f^* \theta_Y - \theta_X}{2\lambda_X^2 D_1 f}.$$

ただしここに $D_1 f, Q_f$ **は** X, Y **の双曲計量に関して定義されたものとする.**

証明. $\lambda_\Omega \circ f \cdot |f'| = \lambda_X$ であるから,

$$\tau \circ f = \frac{\lambda_Y \circ f}{\lambda_\Omega \circ f} = \frac{(\lambda_Y \circ f) \cdot |f'|}{\lambda_X} = |D_1 f|$$

が従う. 次に定理 2 により

$$\partial_X (\tau \circ f) = \partial_Y \tau \circ f \cdot D_1 f$$

であるから, 最初の等式に補題 3 を組み合わせれば第二の等式を得る. 最後に定理 2 および定理 6 から

$$(\partial_Y^2 \tau) \circ f \cdot (D_1 f)^2 + (\partial_Y \tau) \circ f \cdot D_2 f = \frac{1}{2} |D_1 f| \left(Q_f^2 + \lambda_X^{-2} (S_f + f^* \theta_Y - \theta_X) \right)$$

が得られるので, 第二の等式を用いて整理すれば第三の等式も示される. □

References

[1] S. Kim and D. Minda. The hyperbolic metric and spherically convex regions. *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol. 41, pp. 297–314, 2001.

[2] S. Kim and T. Sugawa. Characterizations of hyperbolically convex regions. *Preprint.*

[3] W. Ma and D. Minda. Spherical linear invariance and uniform local spherical convexity. In H. M. Srivastava and S. Owa, editors, *Current Topics in Analytic Function Theory*, pp. 148–170, Singapore, 1992. World Scientific.

[4] W. Ma and D. Minda. Hyperbolic linear invariance and hyperbolic k-convexity. *Israel J. Math.*, Vol. 91, pp. 157–171, 1995.