数理解析研究所講究録 1388 巻 2004 年 23-33

Stability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with Double Power Nonlinearity

東北大理 福泉麗佳 (Reika Fukuizumi)
Mathematical Institute, Tohoku Univ.

1. 序

本報告では, 非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u - a|u|^{q-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{NLS}$$

の定在波 (standing wave) 解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ のリヤプノフの意味での安定性について考える. (NLS) において $u = u(t,x)$ は複素数値の未知関数, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$ で, $n \geq 3$ のときは, さらにソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ における劣臨界条件 $p < q < 1+4/(n-2)$ を仮定する. 定在波 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ において, $\omega \in \mathbb{R}$ は実のパラメータであり, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ が (NLS) の解になるためには, $\phi_\omega(x)$ は定常問題

$$-\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|^{p-1}\phi - a|\phi|^{q-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{SP}$$

の解でなければならないが, 以下では, $\phi_\omega(x)$ は, ω を 1 つ固定したとき, (SP) の非自明解のうち, 作用を最小にする解 (基底状態解) であるとする. 基底状態解に対応する定在波解を基底定在波解と呼ぶことにする. $a = 0$ の場合, (NLS) は非線形光学やプラズマ物理などのモデル方程式として現れ, 基底定在波解のリヤプノフ安定性については２０年程前に調べられて完全に分かっている ([2, 6, 28] 参照). その後, これらの結果は, 非線形クライン・ゴルドン方程式などを含む抽象的なハミルトン系に対する孤立波解の安定性に関する一般論として, Grillakis, Shatah and Strauss [16, 17] にまとめられている. 本報告で扱う $a \neq 0$ の場合は, 2 体引力相互作用と 3 体斥力相互作用をするボース粒子系のモデル方程式として, $a < 0$, $n = p = 3$, $q = 5$ の場合の (NLS) が現われる (例えば [1], [27] 参照).

Grillakis, Shatah and Strauss [16, 17] によって与えられた安定性・不安定性の判定条件はほぼ必要十分条件に近く, 一般論としては完成を見たと言って良い. しかし, 実際に個別の問題に適用するとなると, 直接, 具体的に確かめるのが困難である場合が

多く, 様々な工夫が必要になる. $a \neq 0$ の場合の (NLS) に関係する基底定在波解のリヤプノフ安定性はこれまで [8, 9, 22, 23, 24, 25, 26] などで考察されている. 今回は, [22, 23] の結果を改善した報告とともに, Grillakis, Shatah and Strauss [16, 17] による安定性の十分条件を直接確かめることが困難な問題に対して, どのような工夫が考えられるか, その着想の一つを紹介したい.

2. 問題の設定

今の場合, ソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ における劣臨界条件 $p < q < 1 + 4/(n-2)$ よりエネルギー汎関数

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{a}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1}$$

は $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上定義され, この空間で (NLS) を考えることは自然である.

(NLS) に対する初期値問題は $H^1(\mathbb{R}^n)$ において時間局所的に適切であり, 解が存在する限り, エネルギーと粒子数 $Q(v) := \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2$ の保存則が成り立つことが知られている.

Proposition 1. ([5, 7, 15, 19]) For any $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, there exist $T > 0$ and a unique solution $u(t) \in C([0,T), H^1(\mathbb{R}^n))$ of (NLS) with $u(0) = u_0$ such that $T = +\infty$, or else $T < +\infty$ and $\lim_{t \uparrow T} \|\nabla u(t)\|_2 = +\infty$. Furthermore, $u(t)$ satisfies

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad t \in [0,T).$$

次に, (SP) の基底状態解を定義するために, 作用と呼ばれる $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上の汎関数 S_ω を

$$S_\omega(v) := E(v) + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{a}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1}$$

と定義する. 定常問題 (SP) は作用 S_ω のオイラー・ラグランジュ方程式 $S'_\omega(\phi) = 0$ と同値であることに注意する.

Definition. (SP) の非自明解全体の集合

$$\{v \in H^1(\mathbb{R}^n) : \ S'_\omega(v) = 0, v \neq 0\}$$

を $\mathcal{X}_\omega$ で表し, 基底状態解全体の集合

$$\{\phi \in \mathcal{X}_\omega : \ S_\omega(\phi) \le S_\omega(v) \text{ for all } v \in \mathcal{X}_\omega\}$$

を $\mathcal{G}_\omega$ で表す.

(SP) の基底状態解の存在は, 標準的な変分法, Concentration compactness を用いて, [3, 4, 21] によって示されている.

Proposition 2. ([3, 4, 21]) Let

$$\omega_0 := \sup\left\{\omega > 0 : \ \frac{\omega}{2}s^2 - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - \frac{a}{q+1}s^{q+1} < 0 \quad \text{for some} \ \ s > 0\right\}.$$

Then, $\mathcal{G}_\omega$ is not empty for any $\omega \in (0, \omega_0)$.

$\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする. [5] の Theorem 8.1.1 や [8] の Theorem 2.4 と同様にして, $\lim_{|x|\to\infty}\{|\phi_\omega(x)| + |\nabla\phi_\omega(x)|\} = 0$ や, $r \in [2, \infty)$ に対して $\phi_\omega \in W^{3,r}(\mathbb{R}^n)$ などの ϕ_ω の性質がわかる. さらに, 最大値原理により, $\phi_\omega(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ であることが従う.

最後に, 安定性の定義を与えておく.

Definition. For $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ and $\delta > 0$, we put

$$U_\delta(\phi_\omega) := \left\{v \in H^1(\mathbb{R}^n) : \ \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^n} \|v - e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega\|_{H^1} < \delta\right\},$$

where $\tau_y v(x) = v(x-y)$. We say that a standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable in $H^1(\mathbb{R}^n)$ if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any $u_0 \in U_\delta(\phi_\omega)$, the solution $u(t)$ of (NLS) with $u(0) = u_0$ satisfies $u(t) \in U_\varepsilon(\phi_\omega)$ for any $t \ge 0$. Otherwise, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ is said to be unstable in $H^1(\mathbb{R}^n)$.

3. 既知の結果

まず $a = 0$ の場合に対する既知の結果について簡単に振り返る. すなわち,

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{NLS0}$$

及び対応する定常問題

$$-\Delta\psi + \omega\psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{SP0}$$

について考える. ここで, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ で, $n \geq 3$ のときはさらに $p < 1+4/(n-2)$ を仮定する. このとき, 任意の $\omega > 0$ に対して (SP0) のソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属する正値球対称解 $\psi_\omega(x)$ が一意的に存在し, 作用最小解となっている (一意性に関しては [20] を参照). さらに, 基底定在波解 $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ は, $p < 1+4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して安定 ([6] を参照) であり, $p \geq 1+4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して不安定である ($p > 1+4/n$ の場合は [2], $p = 1+4/n$ の場合は [28] を参照). これから, $p = 1+4/n$ は (NLS0) の基底定在波解の安定性・不安定性に関する臨界冪であることが分かる. Grillakis, Shatah and Strauss [16, 17] による一般論では, 安定性及び不安定性に関する十分条件は粒子数を表す L^2 ノルム $\|\psi_\omega\|_{L^2}$ を用いて与えられる. すなわち, $\partial_\omega \|\psi_\omega\|_{L^2}^2|_{\omega=\omega_1} > 0$ であれば基底定在波解は $\omega = \omega_1$ で安定であり, 逆に, $\partial_\omega \|\psi_\omega\|_{L^2}^2|_{\omega=\omega_1} < 0$ であれば基底定在波解は $\omega = \omega_1$ で不安定である. (NLS0) はスケール変換 $\lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda > 0$, に関して不変であるから, $\psi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}\psi_1(\sqrt{\omega}x)$ が成り立ち, $\|\psi_\omega\|_{L^2}^2 = \omega^{2/(p-1)-n/2}\|\psi_1\|_{L^2}^2$ が成り立つ. これから, $\omega > 0$ に依らず, $p = 1+4/n$ が臨界冪になることが分かる. これに対して, $a \neq 0$ の場合は, このようなスケール不変性は存在しないので, 実際にどのように L^2 ノルムの増減を計算すればよいか, という問題が生じる.

$a \neq 0$ の場合に, $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ の増減を具体的に調べるのは一般には困難であるが, Ohta [22] は $n = 1$ の場合には (SP) の解が陽的に解けることを利用して, $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ を具体的に計算した ([18] も参照). また, Ohta は $n = 1$ の場合に得られた結果を, [23, 24, 25, 26] において高次元空間に拡張しているが, 安定性を証明した [23] では, $\omega \mapsto \phi_\omega$ が $C^1((0,\omega_0), H^1(\mathbb{R}^n))$ であることを仮定しなければならなかった. さらに, $p < 1+4/n$ のときに, ω が小さければ基底定在波解は安定になることを提唱しているが, $\omega \to 0$ のとき $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ が振動しながら 0 に収束する可能性を排除しきれていない.

また, 論文 [23, 24, 25, 26] は Davey-Stewartson system に関する論文だが, 同じ証明方法により, $a > 0$ のときに基底定在波解の不安定性が示せることを注意しておく. 正確には, $\omega \in (0,\infty)$ かつ $p \geq 1+4/n$ の場合と $\omega > 0$ が十分大きく, $p < 1+4/n < q$ の場合に, 基底定在波解の不安定性がいえる.

以下に続く章では断りなく, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$ で $n \geq 3$ のときは $p < q < 1+4/(n-2)$ を仮定する.

4. 主結果

Theorem 1. ([12]) Assume $n \geq 3$ and $p < 1 + 4/n$. Let $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$. Then, there exists $\omega^* \in (0, \omega_0)$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable in $H^1(\mathbb{R}^n)$ for any $\omega \in (0, \omega^*)$.

Theorem 1 は, ϕ_ω の ω に関する微分可能性の仮定をしなくてもよく, また, 0 に近付く振動数の列 $\{\omega_k\}$ をとらずに基底定在波解が安定になることがいえる, という点で Ohta [23] の改善となっている. また, Theorem 1 はより一般的な非線形項に対して証明できる. Theorem 1 の安定性を証明するために必要な非線形項に対する仮定については [12] を参照してほしい. さらに, $a > 0$, $n \geq 3$, $q < 1 + 4/n$ で ω が十分大きい場合も Theorem 1 の証明方法と同じようにして, 基底定在波解の安定性がいえる.

$n = 2$ の場合は未解決である. なぜなら, Theorem 1 の証明は, ある制約条件付き最小化問題を考え, その最小化元の変分法的特徴付けを用いて行われるのだが, $n = 2$ の場合はその最小化元が (SP) の解になるかどうかがわからないからである ([12] の Lemma 3.2 (ii) 参照).

さて, 前節で述べたように, Grillakis, Shatah and Strauss [16, 17] の一般論に従って $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$ の増減を直接調べるのは今の場合には困難であるので, Theorem 1 では, (NLS) の保存量である粒子数が一定の超曲面上で, エネルギー汎関数が $\phi_\omega(x)$ において極小となれば安定であるという, 次の十分条件を用いる.

Proposition 3. Let $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$. If there exists $\delta > 0$ such that

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, v\rangle \geq \delta\|v\|_{H^1}^2 \tag{1}$$

for any $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ satisfying $\mathrm{Re}(\phi_\omega, v)_{L^2} = 0$, $\mathrm{Re}(i\phi_\omega, v)_{L^2} = 0$ and $\mathrm{Re}(\partial_l\phi_\omega, v)_{L^2} = 0$ for $l = 1, \cdots, n$, then the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable in $H^1(\mathbb{R}^n)$.

この十分条件は, ω に関して微分する必要がなく, Grillakis, Shatah and Strauss [16, 17] の一般論における $\partial_\omega\|\phi_\omega\|_{L^2}^2 > 0$ よりも今の問題に適している. また, この条件は [17] の Lemma 4.5 とは少し異なることを述べておきたい. 実際に, [17] の Lemma 4.5 を今の場合に適用しようとすると, $\mathrm{Re}(i\phi_\omega, v)_{L^2} = 0$, $\mathrm{Re}(\partial_l\phi_\omega, v)_{L^2} = 0$ for

$l=1,\cdots,n$ という条件は $\mathrm{Re}(i\phi_\omega,v)_{H^1}=0$, $\mathrm{Re}(\partial_l\phi_\omega,v)_{H^1}=0$ for $l=1,\cdots,n$ に置き換えられ, もし, この置き換えられた条件で Theorem 1 の内容を示そうとすれば, 以下の 5 章において議論する, $\phi_\omega(x)$ の ω に関する漸近挙動について, もう少し詳しい考察が必要になると思われる.

Proposition 3 における $\mathrm{Re}(\phi_\omega,v)_{L^2}=0$ という条件は (NLS) の粒子数の保存則に関係している. 実際, $\langle Q'(\phi_\omega),v\rangle=\mathrm{Re}(\phi_\omega,v)_{L^2}$ である. さらに, $S'_\omega(e^{i\theta}\phi_\omega)=0$, $\theta\in\mathbb{R}$ と $S'_\omega(\phi_\omega(\cdot+y))=0$, $y\in\mathbb{R}^n$ から, $S''_\omega(\phi_\omega)i\phi_\omega=0$, $S''_\omega(\phi_\omega)\partial_l\phi_\omega=0$, $l=1,\cdots,n$ である. したがって, Proposition 3 の式 (1) は, $v\in H^1(\mathbb{R}^n)$ が $\mathrm{Re}(i\phi_\omega,v)_{L^2}=0$, $\mathrm{Re}(\partial_l\phi_\omega,v)_{L^2}=0$, $l=1,\cdots,n$ を満たす, という制限をしなければ成立しない.

最後に, $v\in H^1(\mathbb{R}^n)$ に対して $v_1(x)=\mathrm{Re}\,v(x)$, $v_2(x)=\mathrm{Im}\,v(x)$ とおいて具体的に (1) 式の左辺を書くと,

$$
\begin{aligned}
&\langle S''_\omega(\phi_\omega)v,v\rangle=\langle L_{1,\omega}v_1,v_1\rangle+\langle L_{2,\omega}v_2,v_2\rangle,\\
&\langle L_{1,\omega}v_1,v_1\rangle=\|\nabla v_1\|_{L^2}^2+\omega\|v_1\|_{L^2}^2-p\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\omega^{p-1}(x)|v_1(x)|^2dx-aq\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\omega^{q-1}(x)|v_1(x)|^2\,dx,\\
&\langle L_{2,\omega}v_2,v_2\rangle=\|\nabla v_2\|_{L^2}^2+\omega\|v_2\|_{L^2}^2-\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\omega^{p-1}(x)|v_2(x)|^2dx-a\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\omega^{q-1}(x)|v_2(x)|^2\,dx,\\
&\mathrm{Re}(\phi_\omega,v)_{L^2}=(\phi_\omega,v_1)_{L^2},\quad \mathrm{Re}(i\phi_\omega,v)_{L^2}=(\phi_\omega,v_2)_{L^2},\\
&\mathrm{Re}(\partial_l\phi_\omega,v)_{L^2}=(\partial_l\phi_\omega,v_1)_{L^2},\quad \text{for } l=1,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

となる.

5. 主定理の証明の概略

$\phi_\omega\in\mathcal{G}_\omega$ に対して, $\phi_\omega(x)>0$ かつ $L_{2,\omega}\phi_\omega=0$ であるので, Proposition 3 を示すためには, 次の補題を示せばいい.

Lemma 1. Let $\phi_\omega\in\mathcal{G}_\omega$ and $p<1+4/n$. There exists $\omega_1^*>0$ with the following property: for any $\omega\in(0,\omega_1^*)$, there exists $\delta_1>0$ such that

$$\langle L_{1,\omega}v,v\rangle\ge\delta_1\|v\|_{H^1}^2$$

for any $v\in H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ satisfying $(v,\phi_\omega)_{L^2}=0$ and $(v,\partial_l\phi_\omega)_{L^2}=0$ for $l=1,\cdots,n$.

Lemma 1 を証明するためのアイデアは, $\phi_\omega(x)$ の変分法的特徴付けを用いて, ω に関する $\phi_\omega(x)$ の漸近挙動を調べ, 安定性がよくわかっている極限での解析に帰着させ

ることである. つまり, $\phi_\omega(x)$ をスケール変換した関数

$$\phi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}\tilde{\phi}_\omega(\sqrt{\omega}x), \quad \omega \in (0, \omega_0)$$

を考えると, $\tilde{\phi}_\omega(x)$ は以下の方程式を満たす.

$$-\Delta\tilde{\phi}_\omega + \tilde{\phi}_\omega - |\tilde{\phi}_\omega|^{p-1}\tilde{\phi}_\omega - a\omega^{(q-p)/(p-1)}|\tilde{\phi}_\omega|^{q-1}\tilde{\phi}_\omega = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

したがって, 形式的には, $\omega \to 0$ のとき q 乗の項の影響が消えるように見える. この考察から, $\omega \to 0$ のとき $\tilde{\phi}_\omega(x)$ は $a = 0$ の場合の (SP) の解 $\psi_1(x)$ に何らかの意味で収束するのではないかと予想できる. したがって, 基底定在波解 $e^{it}\psi_1(x)$ は $p < 1 + 4/n$ のとき安定である (3 章 既知の結果 参照) ので, $\omega > 0$ が小さいとき, $p < 1 + 4/n$ ならば, (NLS) の基底定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定になるのではないかと考えられる. 実際, 以下の補題により, 収束がいえる.

Lemma 2. Let $n \geq 3$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ and $\psi_1(x)$ be the unique positive radial solution of (SP0) with $\omega = 1$. Then, for any sequence $\{\omega_j\}$ with $\omega_j \to 0$, there exist a subsequence of $\{\tilde{\phi}_{\omega_j}(x)\}$ (still denoted by the same letter) and a sequence $\{y_j\} \subset \mathbb{R}^n$ such that

$$\lim_{j\to\infty} \|\tilde{\phi}_{\omega_j}(\cdot + y_j) - \psi_1\|_{H^1} = 0 \tag{2}$$

基底定在波解 $e^{it}\psi_1(x)$ が $p < 1 + 4/n$ のとき安定であることを少し詳しく説明すると, Lemma 2 における $\tilde{\phi}_\omega(x)$ の極限関数である, $a = 0$ の場合の (SP) の一意正値球対称解 $\psi_1(x)$ に対応した線形化作用素

$$\langle L_1^0 v, v\rangle = \|v\|_{H^1}^2 - p\int_{\mathbb{R}^n} \psi_1^{p-1}(x)|v(x)|^2\,dx,$$
$$\langle L_2^0 v, v\rangle = \|v\|_{H^1}^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1^{p-1}(x)|v(x)|^2\,dx$$

に関しては, 以下のことが知られている.

Lemma 3. ([16, 17, 18])

(i) If $p < 1 + 4/n$, then there exists $\delta_1 > 0$ such that $\langle L_1^0 v, v\rangle \geq \delta_1\|v\|_{L^2}^2$ for any $v \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ satisfying $(v, \psi_1)_{L^2} = 0$ and $(v, \partial_l\psi_1)_{L^2} = 0$ for $l = 1, \cdots, n$.

(ii) There exists $\delta_2 > 0$ such that $\langle L_2^0 v, v\rangle \geq \delta_2\|v\|_{L^2}^2$ for any $v \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ satisfying $(v, \psi_1)_{L^2} = 0$.

この Lemma 3 を用いて, $\omega \to 0$ の極限において Lemma 1 を示す, すなわち, 線形化作用素 $L_{1,\omega}$ の正値性を極限において示すことで Theorem 1 がいえる.

ここで, Pohozaev 汎関数と呼ばれる汎関数 K_1^0 と $\tilde{K_\omega}$ を以下で定義する.

$$K_1^0(v) := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$
$$\tilde{K_\omega}(v) := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \omega^{(q-p)/(p-1)}\frac{a}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1}.$$

次の補題が Lemma 2 を示すための鍵となる.

Lemma 4. Let $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ and $n \geq 3$. Then we have,

$$\text{(i)} \lim_{\omega\to 0} \|\nabla\tilde{\phi}_\omega\|_2^2 = \|\nabla\psi_1\|_2^2, \quad \text{(ii)} \lim_{\omega\to 0} K_1^0(\tilde{\phi}_\omega) = 0.$$

Lemma 4 の証明に関して, $\tilde{\phi_\omega}(x)$ が制約条件付きの最小化問題

$$\inf\{\|\nabla v\|_{L^2}^2 : \ v \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}, \ \tilde{K_\omega}(v) \leq 0\}$$

の最小化元であること, 及び $\psi_1(x)$ が

$$\inf\{\|\nabla v\|_{L^2}^2 : \ v \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}, \ K_1^0(v) \leq 0\}.$$

の最小化元であることを用いて, $\tilde{\phi_\omega}(x)$ と $\psi_1(x)$ のノルムをお互いに比較することにより, (i) と (ii) は証明される.

同様のアイデアは, Esteban and Strauss [11] により, $a = 0$ の場合の (NLS) の外部ノイマン問題の基底定在波解の安定性の考察に, また, ポテンシャル項を伴った $a = 0$ の場合の (NLS) においてもすでに活用されている (Fukuizumi and Ohta [13] を参照).

参考文献

[1] I. V. Barashenkov, A. D. Gocheva, V. G. Makhankov and I. V. Puzynin, Stability of the soliton-like "bubbles", Physica D **34** (1989) 240–254.

[2] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris. **293** (1981) 489–492.

[3] H. Berestycki, T. Gallouët and O. Kavian, Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan, C. R. Acad. Sci. Paris. **297** (1983) 307–310.

[4] H. Berestycki and P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations, I, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983) 313–345.

[5] T. Cazenave, "An introduction to nonlinear Schrödinger equations," Textos de Métods Matemáticos 26, IM-UFRJ, Rio de Janeiro 1993.

[6] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **85** (1982) 549–561.

[7] T. Cazenave and F. B. Weissler, The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^1, Manuscripta, Math. **61** (1988) 477–494.

[8] R. Cipolatti, On the existence of standing waves for a Davey-Stewartson system, Commun. P. D. E **17** (1992) 967–988.

[9] R. Cipolatti, On the instability of ground states for a Davey-Stewartson system, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **58** (1993) 85–104.

[10] A. Davey and K. Stewartson, On three-dimensional packets of surface waves, Proc. R. Soc. A **338** (1974) 101–110.

[11] M. Esteban and W. Strauss, Nonlinear bound states outside an insulated sphere, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994) 177–197.

[12] R. Fukuizumi, Remarks on the stable standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, Preprint.

[13] R. Fukuizumi and M. Ohta, Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials, to appear in Differential and Integral Eqs.

[14] J. M. Ghidaglia and J. C. Saut, On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, Nonlinearity. **3** (1990) 475–506.

[15] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations, I, J. Funct. Anal. **32** (1979) 1–32.

[16] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.

[17] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II, J. Funct. Anal. **94** (1990) 308–348.

[18] I. D. Iliev and K. P. Kirchev, Stability and instability of solitary waves for one-dimensional singular Schrödinger equations, Differential and Integral Eqs. **6** (1993) 685–703.

[19] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987) 113–129.

[20] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal., **105** (1989) 234–266.

[21] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the locally compact case, part II, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Nonlinéaire. **1** (1984) 223–282.

[22] M. Ohta, Stability and instability of standing waves for one dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, Kodai. Math. J. **18** (1995) 68–74.

[23] M. Ohta, Stability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, J. Dyn. Diff. Eqs. **6** (1994) 325–334.

[24] M. Ohta, Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **62** (1995) 69–80.

[25] M. Ohta, Stability and instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, Differential and Integral Equations. **8** (1995) 1775–1788.

[26] M. Ohta, Blow-up solutions and strong instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system in $\mathbb{R}^2$, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **63** (1995) 111–117.

[27] 上田 正仁, レーザー冷却されたボース-アインシュタイン凝縮が開く新しい世界, パリティ. **14** No.09, 1999-09.

[28] M. I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983) 567–576.