数理解析研究所講究録 1390 巻 2004 年 9-17

Simplicity of Generic Structures

池田宏一郎
(Koichiro IKEDA)
法政大学経営学部
(Faculty of Business Administration, Hosei University)

Ehud Hrushovski は generic な構成法を用いて

(a) ([3],1988 年) ω-categorical, strictly stable, non locally modular な graph ;

(b) ([4],1997 年) ω-categorical, simple SU=1, non locally modular な hypergraph ,

を作った．(a) は「ω-categorical で stable な理論は ω-stable になる」という Lachlan 予想の反例になっている．(b) は「ω-categorical で rank=1 ならば locally modular になる」という Cherlin-Zilber の結果が simple theory の場合には成り立たないことを示している．

(a) と (b) はそれぞれ，言語が二項関係と三項関係の違いがあるが，共に generic な構成法で作られている．しかし，厳密には多少の違いがあって，ここでは (a) の構成法を $(\delta,\leq)$-generic，(b) の構成法を $(\delta,<)$-generic，と呼んでいる．

ここでは主に $(\delta,<)$-generic graph を扱い，さらには，どのような条件下で simple になるかを調べた．そして最後に，ω-categorical, simple, non locally modular なグラフの例を紹介する．なお，generic 構造の一般的な議論に関して [1,2,7,8] を参考にした．

1 $(K,<)$-generic なグラフ

$R(*,*)$ を非反射的かつ対称的な二項関係とする．特に断らないかぎり，$A,B,C,\cdots$ は R-構造，つまり，グラフを表すものとする．また，$\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots$ は有限グラフを表すものとする．

定義 1.1 αを正の実数とする．このとき有限グラフのクラスから実数への関数$\delta(*)$を次のように定義する：
(i) $\delta_\alpha(\bar{a}) = \alpha|\bar{a}| - |R^{\bar{a}}|$
更に略記法として，
(ii) $\delta_\alpha(\bar{a}/\bar{b}) = \delta_\alpha(\bar{a}\bar{b}) - \delta_\alpha(\bar{b})$.

注意 1.2 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$が$\bar{a} \cap \bar{c} = \emptyset, \bar{b} \subset \bar{c}$をみたすとき，$\delta_\alpha(\bar{a}/\bar{b}) \geq \delta_\alpha(\bar{a}/\bar{c})$.

証明： $|R^{\bar{a}\cup\bar{c}} - R^{\bar{c}}| \leq |R^{\bar{a}\cup\bar{b}} - R^{\bar{b}}|$よりあきらか．

定義 1.3 $\bar{a} \subset \bar{b}$とする．このとき，$\bar{a}$が$\bar{b}$で閉とは，任意の空でない真部分集合$\bar{x} \subset \bar{b} - \bar{a}$に対して$\delta_\alpha(\bar{x}/\bar{a}) > 0$となることである．記号で$\bar{a} <_\alpha \bar{b}$と書く．$\alpha$が自明なときは省略する場合もある．

注意 1.4 (i) $\bar{a} < \bar{b}$ならば，任意の$\bar{x}$に対して$\bar{x} \cap \bar{a} < \bar{x} \cap \bar{b}$.
(ii) $\bar{a}, \bar{b} < \bar{c}$ならば$\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{c}$.

証明： (i) $\bar{y} \subset \bar{x} \cap \bar{b} - \bar{x} \cap \bar{a}$を勝手にとる．このとき注意1.2より$\delta_\alpha(\bar{y}/\bar{x} \cap \bar{a}) \geq \delta_\alpha(\bar{y}/\bar{a}) > 0$.
(ii) (i)より$\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{b}$であるので，$\bar{b} < \bar{c}$より$\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{c}$.

定義 1.5 (i) $K_\alpha = \{\bar{b} : 任意の\bar{a} \subset \bar{b}に対して\delta_\alpha(\bar{a}) > 0\}$.
正の実数rに対して，
(ii) 自然数から実数への関数f_rを$f_r(x) = \log_r(x) + 1$;
(iii) $H_r = \{(x, y) : y \geq f_r(x)\}$;
(iv) $K_{\alpha,r} = \{\bar{b} \in K_\alpha : 任意の\bar{a} \subset \bar{b}に対して (|\bar{a}|, \delta_\alpha(\bar{a})) \in H_r\}$.

注意 1.6 あきらかに，$K_\alpha, K_{\alpha,r}$は部分クラスに関して閉じている．

定義 1.7 $\bar{a} \subset \bar{b} \cap \bar{c}$をみたすとする．このとき$\bar{b}$と$\bar{c}$が$\bar{a}$上自由 (**free**) であるとは，$\bar{a} = \bar{b} \cap \bar{c}$かつ$R^{\bar{b}} \cup R^{\bar{c}} = R^{\bar{b}\cup\bar{c}}$をみたすことである．

定義 1.8 Kを部分グラフに関して閉じているK_αの部分クラスとする．
(i) $(K, <)$が**融合性 (Amalgamation property)** をもつとは，$\bar{a} < \bar{b} \in K, \bar{a} < \bar{c} \in K$に対して，次の条件をみたす$\bar{b}', \bar{c}', \bar{d}$が存在することである：

(1) $\bar{b}' \cong_{\bar{a}} \bar{b}, \bar{c}' \cong_{\bar{a}} \bar{c}$;
(2) $\bar{b}', \bar{c}' < \bar{d} \in K$.
(ii) (i) において，$\bar{b}'$ と $\bar{a}'$ が $\bar{a}$ 上自由で $\bar{d} = \bar{b}'\bar{a}'$ となる $\bar{d}$ がとれるときに，$(K, <)$ は**自由融合性**をもつという．

補題 1.9　α が整数，$r \geq 2 \Rightarrow (K_{\alpha,r}, <)$ は自由融合性をもつ．

証明：　$\bar{a} < \bar{b} \in K_{\alpha,r}, \bar{a} < \bar{c} \in K_{\alpha,r}$ を満たす $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ を勝手にとる．このとき $\bar{b}$ と $\bar{c}$ は $\bar{a}$ 上自由であると仮定して構わない．$\bar{d} = \bar{b} \cup \bar{c}$ とする．
主張 1 : $\bar{b}, \bar{c} < \bar{d}$.
証明：空でない真部分集合 $\bar{x} \subset \bar{d} - \bar{b}$ に対して，$\delta(\bar{x}/\bar{b}) = \delta(\bar{x}/\bar{a}) > 0$ であるので $\bar{b} < \bar{d}$. $\bar{c} < \bar{d}$ に関しても同様.
主張 2 : $\bar{d} \in K_{\alpha,r}$
証明：$\bar{x} \subset \bar{d}$ を勝手にとる．$|\bar{x} \cap \bar{c}| \leq |\bar{x} \cap \bar{b}|$ として一般性を失わない．ここで，$\bar{b} \in K_{\alpha,r}$ より $\delta(\bar{x} \cap \bar{b}) > \log_r(|\bar{x} \cap \bar{b}|) + 1$. さらに主張 1 より $\delta(\bar{x}) > \delta(\bar{x} \cap \bar{b})$ がなりたつことに注意する．このとき，$|\bar{x}| \leq 2|\bar{x} \cap \bar{b}| \leq r|\bar{x} \cap \bar{b}| \leq r \cdot r^{\delta_\alpha(\bar{x} \cap \bar{b}) - 1} = r^{\delta_\alpha(\bar{x} \cap \bar{b})} \leq r^{\delta_\alpha(\bar{x}) - 1}$. よって $\delta_\alpha(\bar{x}) > \log_r(|\bar{x}|)$ であるので，$\bar{x} \in K_{\alpha,r}$.

定義 1.10　M を無限グラフ，$\bar{a} \in M$ とする．このとき $\bar{a}$ が M で**閉**（記号：$\bar{a} < M$) であるとは，任意の $\bar{x} \in M$ に対して $\bar{a} < \bar{a} \cup \bar{x}$ が成り立つことである．

定義 1.11　K を部分グラフに関して閉じている K_α の部分クラスとする．このとき，可算グラフ M が $(K, <)$**-generic** であるとは，
(i) $\bar{a} \in M$ ならば $\bar{a} \in K$;
(ii) $\bar{a} < \bar{b} \in K, \bar{a} < M$ のとき，$\bar{b}$ の $\bar{a}$ 上のコピー $\bar{b}'$ が存在して $\bar{b}' < M$.

補題 1.12　M を有限部分グラフがすべて $K_{\alpha,r}$ の元になっているような無限グラフとする．このとき M は**有限閉包**をもつ．すなわち，任意の $\bar{a} \in M$ に対して，$\bar{a} \subset \bar{b} < M$ をみたす有限な $\bar{b}$ で最小のものが存在する．(この $\bar{b}$ を $\bar{a}$ の M における**閉包**といい，$\mathrm{cl}_M(\bar{a})$ と書く．M が自明な場合は省略する場合がある.)

証明：　$\bar{a} \in M$ を勝手にとる．f_r が単調増加であることより，$\bar{a} \subset \bar{b} < M$ をみたす有限な $\bar{b}$ が存在する．$\bar{b}_0, \bar{b}_1$ をそれぞれそのようなもので極小な

ものとする．このとき注意1.4(ii)より$\bar{b}_0 \cap \bar{b}_1 < M$が成り立つ．よって極小性より$\bar{b}_0 = \bar{b}_1$となるので，最小な$\bar{b}$が存在する．

補題1.13 $K \subset K_{\alpha,r}$が融合性をもつならば，$(K,<)$-genericなMが一意的に存在する．

証明： 融合性よりgenericグラフの存在はほぼ明らか．一意性に関しては次の通り：M, Nをgenericグラフ，$\bar{a} < M, \bar{b} < N, \bar{a} \cong \bar{b}$とする．あらかじめ並べておいた$M$の元達の中で$\bar{a}$をのぞいて一番小さい元$a$をとってくる．このとき$a\bar{a}$の閉包を$\bar{a}_1$とすると，$N$がgenericグラフであることより，$\bar{a}_1$のコピー$\bar{b}_1$が$N$の中にとれる．往復論法でこの操作を繰り返すと$M \cong N$.

注意1.14 補題1.13の$(K,<)$-genericなMはω-categorical.

証明： Nを$N \equiv M$をみたす可算モデルとする．f_rが単調増加関数であることより，genericという性質が第一階の論理式たちで表現できる．よってNはgenericとなるので，往復論法より$N \cong M$.

以上のことより，次の命題が得られる．

命題1.15 αが整数，$r \geq 2$ならば，$(K_{\alpha,r},<)$-genericなグラフが一意的に存在し，その理論はω-categoricalになる．

例1.16（Hrushovskiのunstable genericなグラフ） $r = e, \alpha = 2$とする．このとき命題1.15より，$(K,<)$-genericなグラフMが存在して，その理論はω-categoricalとなる．
主張1：任意の$a \in M$に対して$R(a,b)$をみたす$b \in M$が無限個存在する．
証明：$(4,3) \in H_r$なので．
主張2：異なる$a, b \in M$に対して$R(a,c) \wedge R(b,c)$をみたす$c \in M$は高々1個である．
証明：$(8,4) \notin H_r$なので．

よって，Mの元a,bに対して$a\epsilon b \Leftrightarrow R(a,b)$と定義すると，$(M,M,\epsilon)$は擬平面になる．よってTh($M$)はnon-locally modularとなる．さらにTh(M)はunsimpleであることもわかる（はずである）．

2 独立関係とsimplicity

仮定 αを整数，$K \subset K_{\alpha,r}$は自由融合性をもつとする．Mを$(K,<)$-genericなグラフとして固定する．

注意2.1 $\bar{a}<\bar{b}_1,\bar{b}_2<M$かつ$\bar{b}_1 \cong_{\bar{a}} \bar{b}_2$ならば$\mathrm{tp}(\bar{b}_1/\bar{a})=\mathrm{tp}(\bar{b}_2/\bar{a})$.

定義2.2 有限グラフのクラスから実数への関数$d_M(*)$を次のように定義する：
(i) $d_M(\bar{a})=\delta(\mathrm{cl}_M(\bar{a}))$;
Mが自明なときは省略する場合もある．また，略記法として
(ii) $d_M(\bar{a}/\bar{b})=d_M(\bar{a}\cup\bar{b})-d_M(\bar{b})$.
(iii) Bが無限のとき，$d(\bar{a}/B)=\inf\{d(\bar{a}/\bar{b}):\bar{b}\in B\}$.

注意2.3 $A\subset B$ならば$d(\bar{a}/A)\geq d(\bar{a}/B)$.

証明： A,Bが有限である場合を証明すれば十分．$A^*=\mathrm{cl}(\bar{a}A)\cap\mathrm{cl}(B)$とおくと$\mathrm{cl}(A)<A^*$．注意1.2より，$d(\bar{a}/A)=\delta(\mathrm{cl}(\bar{a}A))-\delta(\mathrm{cl}(A))\geq \delta(\mathrm{cl}(\bar{a}A))-\delta(A^*)=\delta(\mathrm{cl}(\bar{a}A)-A^*/A^*)\geq\delta(\mathrm{cl}(\bar{a}A)-A^*/\mathrm{cl}(B))=\delta(\mathrm{cl}(\bar{a}A)\mathrm{cl}(B))-\delta(\mathrm{cl}(B))\geq d(a/B)$.

定義2.4 $\bar{a},\bar{b}\in M, C\subset M$とする．
(i) $\bar{a}$と$\bar{b}$がC上**独立**（記号：$\bar{a}\downarrow_C\bar{b}$）とは，$d(\bar{a}/C\bar{b})=d(\bar{a}/C)$をみたすことである．
(ii) 任意の$\bar{a}\in A$と$\bar{b}\in B$に対して，$\bar{a}\downarrow_C\bar{b}$のとき，$A\downarrow_C B$と書く．

補題2.5 $\bar{a}<\bar{b},\bar{c}<M$とする．このとき$\bar{b}\downarrow_{\bar{a}}\bar{c}$ならば,
(i) $\bar{b}\cap\bar{c}=\bar{a}$;
(ii) $\bar{b}$と$\bar{c}$は$\bar{a}$上自由；

証明： $\bar{a}^* = \bar{b} \cap \bar{c}$とおく．注意より，$d(\bar{b}/\bar{a}) = \delta(\bar{b}/\bar{a}) = \delta(\bar{b}) - \delta(\bar{a}) \geq \delta(\bar{b}) - \delta(\bar{a}^*) = \delta(\bar{b} - \bar{a}^*/\bar{a}^*) = \delta(\bar{b} - \bar{a}^*/\bar{c}) = \delta(\bar{b}/\bar{c}) \geq d(\bar{b}/\bar{c})$．仮定より $d(\bar{b}/\bar{a}) = d(\bar{b}/\bar{c})$であるので，$\delta(\bar{a}^*) = \delta(\bar{a})$．$\bar{a} < M$であるので，$\bar{a}^* = \bar{a}$より(i)が成り立つ．さらに，$\delta(\bar{b}/\bar{a}) = \delta(\bar{b}/\bar{c})$であるので，(ii)も成り立つ．

注意2.6 上の補題において，$\bar{b}\bar{c} < M$が成り立つとはかぎらないが，$d(\bar{a}\bar{b}) = \delta(\bar{a}\bar{b})$は成り立つ．

補題2.7 関係“$* \downarrow_* *$”は以下をみたす：
(i) (対称性) $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ならば$\bar{b} \downarrow_A \bar{a}$;
(ii) (推移性) $\bar{a} \downarrow_A BC \Leftrightarrow \bar{a} \downarrow_A B$かつ$\bar{a} \downarrow_{AB} C$;
(iii) (存在) $\bar{a}' \downarrow_A B$をみたす$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$の解$\bar{a}'$が存在する；
(iv) (局所性) $\bar{a} \downarrow_{A_0} A$をみたす可算な$A_0 \subset A$が存在する；
(v) (有限性) $\bar{a} \downarrow_A B \Leftrightarrow$ 任意の$\bar{b} \in B$に対して$\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$.

証明： (i) $d(\bar{b}/A\bar{a}) = d(\bar{b}/A)$を示す．そうでないとすると，ある$\bar{x} \in A$が存在して$d(\bar{b}/\bar{x}\bar{a}) < d(\bar{b}/A)$．$\epsilon = d(\bar{b}/A) - d(\bar{b}/\bar{x}\bar{a})$とおく．仮定より$d(\bar{a}/A\bar{b}) = d(\bar{a}/A)$であるので，$d(\bar{a}/\bar{y}) - d(\bar{a}/\bar{y}\bar{b}) < \epsilon$となる$\bar{y} \in A$が存在する．$\bar{y} \supset \bar{x}$が成り立っているとして構わない．このとき，$d(\bar{b}/A) = d(\bar{b}/\bar{x}\bar{a}) + \epsilon \geq d(\bar{b}/\bar{y}\bar{a}) + \epsilon = d(\bar{b}/\bar{y}) + d(\bar{a}/\bar{y}\bar{b}) - d(\bar{a}/\bar{y}) + \epsilon > d(\bar{b}/\bar{y})$．これは矛盾．
(ii) 明らか．
(iii) コンパクト性より，A, Bが有限のときに示せれば十分．Xとして，$X \cong_{\mathrm{cl}(A)} \mathrm{cl}(\bar{a}A)$かつ，$\mathrm{cl}(A)$上$X$と$\mathrm{cl}(AB)$が自由なものをとる．自由融合性より$X\mathrm{cl}(ab) \in K$が成り立つ．よって$M$のgenericityより，$(X <)X\mathrm{cl}(AB) < M$が成り立っているとして構わない．$X$の中で$\bar{a}$に対応するものを$\bar{a}'$とする．注意より$\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}'/A)$．さらに，$d(\bar{a}'/AB) = \delta(\mathrm{cl}(\bar{a}'AB)) - \delta(\mathrm{cl}(AB)) = \delta(X\mathrm{cl}(AB)) - \delta(\mathrm{cl}(AB)) = \delta(X/\mathrm{cl}(AB)) = \delta(X/\mathrm{cl}(A)) = d(\bar{a}'/A)$であるので$\bar{a}' \downarrow_A B$.
(iv) $d(\bar{a}/A) = \inf_{\bar{b} \in A} d(\bar{a}/\bar{b})$であるので，ある可算近似列を$(\bar{b}_i)_i$とする．このとき$B = \bigcup \bar{b}_i$とすれば，$d(\bar{a}/B) = d(\bar{a}/A)$．よって$\bar{a} \downarrow_A B$.
(v) ほぼ明らか．

定義2.8 以下の条件をみたすとき，関係“$* \downarrow_* *$”は**Independence Theorem**をもつという：任意の$\bar{c} < \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 < M$に対して，

- $\bar{a}_1 \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_2, \bar{b}_1 \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_1, \bar{b}_2 \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_1$;

・$\mathrm{tp}(\bar{b}_1/\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{b}_2/\bar{c})$
をみたすならば，
・$\bar{b} \downarrow_{\bar{c}} \bar{a}_1\bar{a}_2$;
・$\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_1) = \mathrm{tp}(\bar{b}_1/\bar{a}_1), \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_2) = \mathrm{tp}(\bar{b}_2/\bar{a}_2)$.
をみたす$\bar{b}$が存在する．

補題2.9 $r \geq 3 \Rightarrow$ Independence Theoremがなりたつ．

証明： 簡単のため，$\bar{c} = \emptyset$とする．$A = \mathrm{cl}(\bar{a}_1\bar{a}_2)$とする．仮定より$\bar{a}_1$と$\bar{b}_1$，$\bar{a}_2$と$\bar{b}_2$，$\bar{a}_1$と$\bar{a}_2$，はそれぞれ自由であるので，$\bar{b}$を
・$\bar{b} \cong_{\bar{a}_i} \bar{b}_i$;
・$\bar{b}$と$\bar{a}_1\bar{a}_2$は自由，
となるように取ることができる．さらにB_1, B_2を
・$B_i\bar{a}_i\bar{b} \cong \mathrm{cl}(\bar{a}_i\bar{b}_i)\bar{a}_i\bar{b}_i$
となるようにとる．$D = B_1B_2A$とする．このとき，$\delta(D/A) = \delta(D - A), \delta(D/B_i) = \delta(D - B_i)$が成り立っているとして構わない．よって
主張1：$A, B_1, B_2 < D$.
主張2：$D \in K$.
証明:$X \subset D$を勝手にとる．$X_0 = X \cap A, X_1 = X \cap B_1, X_2 = X \cap B_2$とする．ここで$\delta(X_i)$の値が一番大きいものを$X_n$とする．主張1より$X_n < X$であるので，$\delta(X_n) \leq \delta(X) - 1$が成り立つ．よって$r \geq 3$より，$|X| \leq |X_0| + |X_1| + |X_2| \leq r^{\delta(X_0)-1} + r^{\delta(X_1)-1} + r^{\delta(X_2)-1} \leq 3 \cdot r^{\delta(X_n)-1} \leq r^{\delta(X_n)} \leq r^{\delta(X)-1}$が成り立つ．

主張1,2より，$D < M$であると思って構わない．
主張3：$\bar{b} \downarrow \bar{a}_1\bar{a}_2$.
証明：$d(\bar{b}/\bar{a}_1\bar{a}_2) = \delta(D/A) = \delta(D - A/A) = \delta(D - A) \geq \delta(\bar{b}) = d(\bar{b})$.
よって$d(\bar{b}/\bar{a}_1\bar{a}_2) = d(\bar{b})$.
主張4：$\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_i) = \mathrm{tp}(\bar{b}_i/\bar{a}_i)$.
証明：$B_i \cong_{\bar{a}_i} \mathrm{cl}(\bar{a}_i\bar{b}_i)$かつ$B_i < M$より．

注意2.10 関係“$* \downarrow_* *$”がIndependence Theoremをみたすとき，
・“$* \downarrow_* *$”はforking independence ;
・$\mathrm{Th}(M)$はsimple,
になることが知られている．

以上のことより次が得られる.

命題2.11 αが整数, $r \geq 3$ならば, $(K_{\alpha,r}, <)$-genericなグラフが一意的に存在し, その理論はω-categoricalかつsimpleになる.

3 $(\delta, <)$-genericなグラフ

定義3.1 無限グラフMが$(\delta, <)$-**generic**であるとは, 次の条件をみたす実数αと$K \subset K_\alpha$が存在することである :,
(i) Mが$(K, <)$-generic;
(ii) Mは有限閉包 ;
(iii) Mは飽和モデル.

注意3.2 例1.16のグラフは$(\delta, <)$-genericである.

注意3.3 いま, 有限グラフ$A \subset B$に対して, 勝手に$X \subset B - A$を取ったときに$\delta_\alpha(X/A) \geq 0$をみたすとき, $A \leq B$と書く. このとき, 関係$A < B$のときと同様にして, $(\delta, \leq)$-**generic**な無限グラフが定義できる([5]).

事実3.4([6]) Mを$(\delta, \leq)$-genericなグラフとする. このとき
(i) Th(M)はstable;
(ii) αが無理数ならばTh(M)はsuperstableでない.

注意3.5 無限グラフMが$(\delta, <)$-genericであるとき, αが無理数ならばTh(M)はstrictly stableとなる.

証明 : αが無理数のとき, $(\delta, <)$-genericなグラフは$(\delta, \leq)$-genericになる. よって事実3.4よりTh(M)はstrictly stable.

問題3.6 Mを$(\delta, <)$-genericなグラフとする. このとき
(1) αが有理数のときMはunstableか?
(2) Mはω-categoricalか?

例3.7 $r = 3, \alpha = 2$ とする．$K = K_{\alpha,r}$ とすると，命題2.11より，$(K, <)$-generic なグラフ M が存在して，その理論は ω-categorical かつ simple になる．特に M は $(\delta, <)$-generic になっている．また，$\mathrm{SU} > 1$，unstable であることも確かめられる（はずである）．

主張：$\mathrm{Th}(M)$ は non locally modular.

証明：$X = abcd$ を $R(a, b), R(b, c), R(c, d), R(d, a)$ のみを関係としてもつグラフとする．このとき $X \in K$ であるので，$X < M$ であると仮定して構わない．このとき $d(ab) + d(cd) = \delta(ab) + \delta(cd) = 6$ である．一方，$d(\mathrm{cl}(ab) \cap \mathrm{cl}(cd)) + d(abcd) = d(\emptyset) + \delta(abcd) = 4$ である．よって modular ではない．locally modular でないことも，ほぼ同様に証明できる．

参考文献

[1] J. T. Baldwin and N. Shi, Stable generic structures, Annals of Pure and Applied Logic 79 (1996) 1–35

[2] J. Goode, Hrushovski's geometries, in: Helmut Wolter Bernd Dahn, ed., Proc. 7th Easter Conf. on Model Theory (1989) 106–118

[3] E. Hrushovski, A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane, preprint, 1988

[4] E. Hrushovski, Simplicity and the Lascar group, preprint, 1997

[5] K. Ikeda, A note on generic projective planes. Notre Dame J. Formal Logic 43 (2002), no. 4, 249–254

[6] K. Ikeda, Stability of generic pseudoplanes, 京都大学数理解析研究所講究録 1344 (2003) 33–39

[7] F. O. Wagner, Relational structures and dimensions, Kaye, Richard (ed.) et al., Automorphisms of first-order structures. Oxford: Clarendon Press. 153–180 (1994)

[8] F. O. Wagner, Simple theories. Mathematics and its Applications, 503. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. xii+260 pp.