数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 84-89



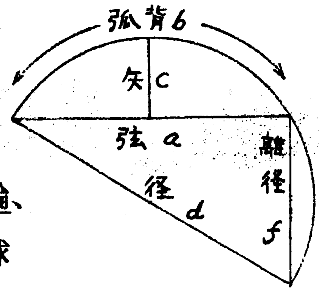
# 関孝和による球と球欠の表面積と体積の計算

杉本敏夫 (Sugimoto Toshio)

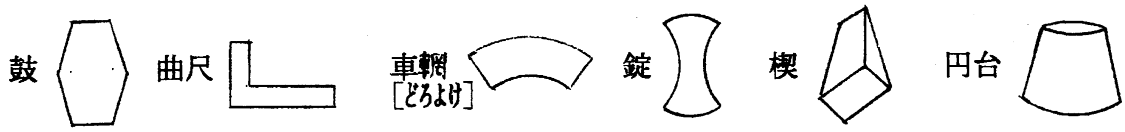
## 1節　関の著作

主題に関する関の著作は、〔1〕『解見題之法』(1683頃)、〔2〕『括要算法巻四』(1709刊)、〔3〕『求積』(?)、〔4〕『毬闕〔球欠〕変形草』(?)。いずれも平山諦他編『関孝和全集』大阪教育図書(1978)に収録。本稿では文献批判には立ち入らない。

## 2節　用語




円の部分を右図のように定め、$b$ と $a$ で囲まれた面図形を弧（弓形）、円弧を特に弧背と言う。回転体を環、切り口の円を輪、回転する面の重心を中心、中心間の距離を中心径と言う。また球を立円、それを平面で截り取った部分を球欠と言う。本稿ではその他に西洋流の用語（共通の場合もある）を用いる。なお関は特別な図形に、当時の日用品の名称を用いる。




私はこれに倣い、後述の特別な図形に指輪、洋傘の名称を与えることにした。

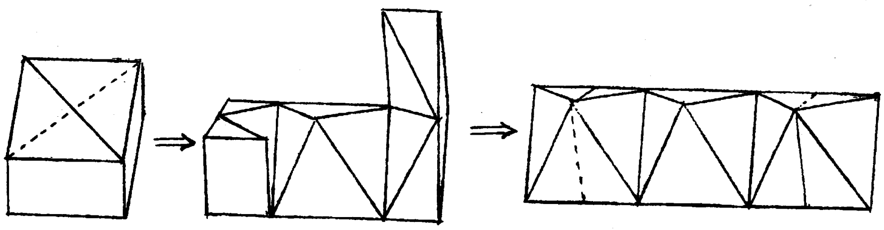
## 3節　弓形（弧）の面積

矢 $c$, または弦 $a$ を与えて弧背 $b$ を求める計算は〔5〕『求弧背術』に譲り、「別に得る」として〔5〕の数値を用いる。西洋流の逆正弦に相当するが、関はまだ級数展開に達せず、典型的な弓形を補間して公式を得た。　弓形面積＝$[br-a(r-c)]/2$（半径 $r$）

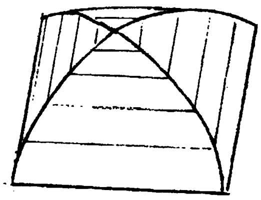
## 4節　錘率三分之一

〔1〕にある、角柱に内接する角錐の体積が前者の三分之一に等しいと言う証明は省く。関は錘率三分之一を定理のように扱う。私は「底面が方（正方形）、高さが辺の半分なる角柱が三つの角錐に分解する」ことを表わす、甚だ直観的な立体模型を示すことにしよう。

中央の角錐の他の二つの角錐は、各々角柱の六分之一なる立体二つから成り、つなぎ目は蝶番(ちょうつがい)（紙細工ならば和紙）でつながっている。



### 5節　半球の体積



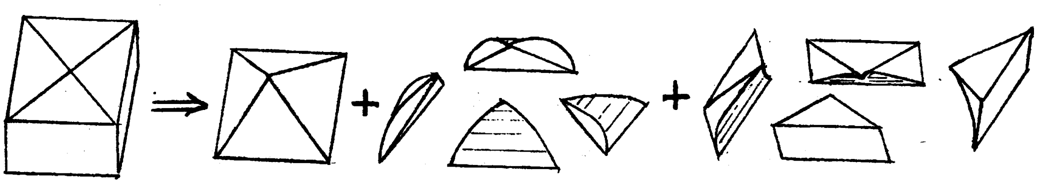
真上から見れば正方形、真横から見れば円なる立体は次節の合蓋に相当する。関は特別な名称を与えない。関は〔2〕において、右図の半合蓋を正方形の板を多数枚重ねたと仮定して体積を求め、二を乗じて合蓋の体積、さらに円積法（$\pi/4=355/452$)を乗じて球の体積を得た。 $2n$ 枚切りを $A$, $4n$ 枚切りを $B$, $8n$ 枚切りを $C$ と名付けるとき、増約術の公式によって約積を得た。　約積$=B+(B-A)(C-B)/[(B-A)-(C-B)]$

関の場合 $n=25$ として、1稜 10 なる立方体に内接させたとき、約積 $666^{2}/_{3}$ を得、355/452 を乗じて定積 $523^{203}/_{339}$ を得た。実は $n=1$ でも同じ約積が得られる。その理由は、究極の体積が $V=f+g+gr+gr^2+gr^3+\cdots=f+g/(1-r)$ （$r$は公比）と表され、部分体積を $A=f+g$, $B=f+g+gr$, $C=f+g+gr+gr^2$ と仮定して、増約術の公式に入れれば出る。

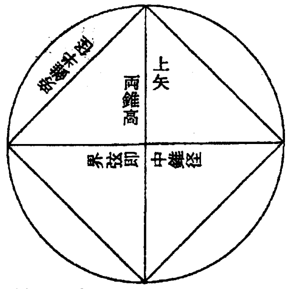
なお、関が立体の求積に数値積分に相当する方法を用いたのは、この〔2〕のみである。

### 6節　祖沖之・祖暅の合蓋

暅(こう)は沖之の子、二人の『綴術』(500頃）は失われたが、『九章算術』（1世紀）にたいする劉徽注(263) および李淳風注(656) から内容が推定できる。祖父子は、関よりも明確に（立体幾何の範囲で）立方体上半から合蓋上半を抜き去った立体が、中央の四角錐の体積に等しいことを主張した。なお合蓋は「牟盒方蓋」(ぼうごうほうがい)すなわち正方形の皿を覆う正方形の蓋を意味する言葉の略形である。4節の立体分解に対応する図を次に掲げよう。

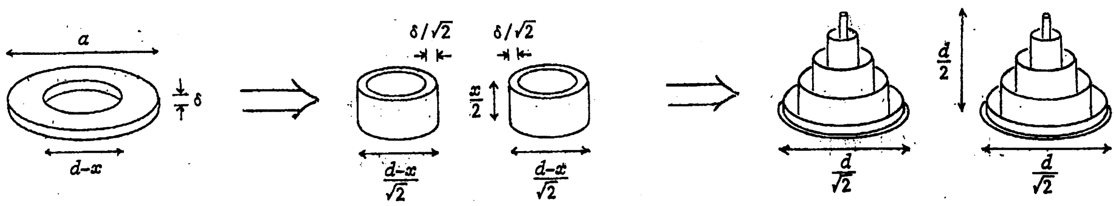


### 7節　旁錐経由の球の体積

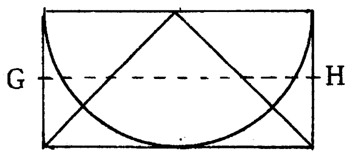



関は〔3〕において、球の体積を求めるため旁錐と称する立体を経由した。いまは半球のみを考察する。右図（原図）により関は「半球＝中錐＋旁錐」を主張するが、中錐の意味は明白、旁錐の意味が分からない。私は中錐は、半球と同じ底面円の上に立つ円錐と考える（異論は少ないだろう）。そこで旁錐は、半球から中錐を抜き去った残形となる。それは斜めの弓形を回転させてできる回転体であり、関の用語で偏弧環、私は直観的に洋傘と名付ける。

この回転体の体積は１６節のように、回転体の体積公式によって求められる。私が曾て試みたのは、洋傘を水平面で截り、穴明き円板を作り（次の左図）、これを二本の桶の箍(たが)状の帯とし（中図）、箍状の帯を集めて二つの半旁錐を作る（右図）。私の試みは、上記の原図に「旁錐半径」と書き込まれている事実に忠実ならんとしている。

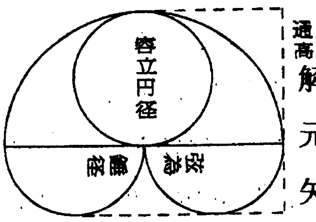



### 8節　ガリレイの椀

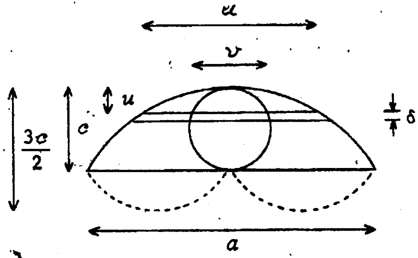



ガリレイは『新科学対話』(1638)に、円柱から半球を抜き去った残形を椀と名付けた。円柱の内接円錐を、頂点が上の向きに置く。この置き方が肝腎！　椀と円錐を水平面ＧＨで截れば、椀の穴明き円と円錐の円板が等面積なることから、両立体の等体積が出る。

### 9節　容立円を用いる球の体積




従来〔1〕の左の奇妙な図に解釈が施されなかった。私の復元は右図のように径 $g$, 弦 $a$, 矢 $c$ なる球欠に一般化される。




$$\left.\begin{array}{l}\text{球欠の体積 } U=(\pi/4)\Sigma u^2\delta=\pi\Sigma(gx-x^2)\delta.\\ \text{径 } c \text{ の小球の体積 } V=(\pi/4)\Sigma v^2\delta=\pi\Sigma(cx-x^2)\delta.\end{array}\right\}\text{差 } W=U-V=\pi(g-c)\Sigma x\delta.$$

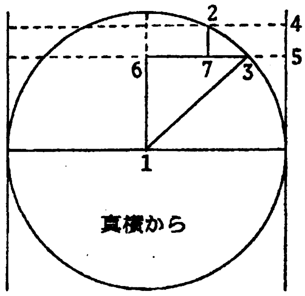
$g-c=a^2/4c$,　$\Sigma x\delta=c^2/2$　を代入して、$W=(\pi/8)a^2c=(\pi/12)\cdot a^2\cdot(3c/2)$.

これは明らかに底面の径 $a$, 高さ $3c/2$ なる円錐の体積に等しい。原図に付された は通高 $3c/2$ を示すためのお飾りに過ぎない。従来は に惑わされたのであろう。

### １０節　球の表面積

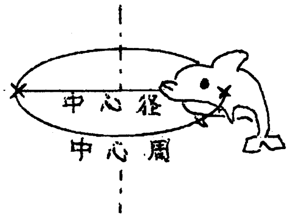
球の表面積 $S$ と体積 $V$ は一方を知れば他方を得る。 $S$ については特に〔6〕村田全『建部賢弘の数学とその思想　第１回』（数学セミナー1982年８月号）に、イチジク割り論法（球の体積を無数の小三角錐の和と見做す）と薄皮饅頭論法（直径の近い二つの球の差を薄皮と見做す）がある。関は〔3〕において、前者の論法を用いた。

### １１節　アルキメデスのリボン



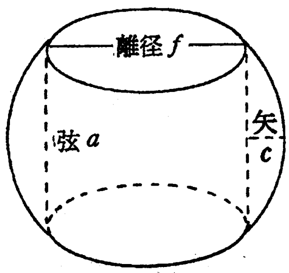

『球と円柱について』（前３世紀）に、球を二平面で截って帽子の鍔(つば)状のリボンを作れば、円錐の側面の一部で近似され、面積が得られる。球の外接円柱側面から対応するリボンを截り取れば、幅 $\overline{23}$ と幅 $\overline{45}$ の比は、軸 $\overline{61}$ から両リボンまでの距離 $\overline{67}$ と $\overline{65}$ に反比例するから、両リボンの面積は等しい。よって球の表面積は外接円柱側面の面積に等しい、とう趣旨を主張している。

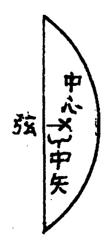
### １２節　回転体の体積



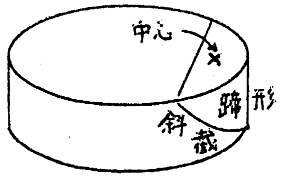

任意の面を軸の回わりに回転させた回転体の体積公式は、西洋流ではパッポス・ギュルダンの公式と呼ばれる。関も、〔3〕と〔4〕において、公式を「体積＝面積×中心周」として愛用した。ここに中心周とは中心径に周径率 355/113 を掛けたもの。関の公式は、切り口が円なる場合（輪環すなわち浮輪状の立体、トーラス）などの典型的な二三の図形の場合から類推によって一般化されたと思われる。和算においては、直観的に明らかな場合には西洋流の証明が付されない場合が多い。

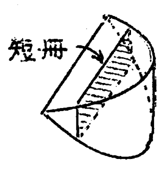
### １３節　指輪の体積と蹄形




弓形を軸の回わりに回転させた回転体を〔3〕と〔4〕で関は正弧環と呼ぶが、私は直観的に指輪と呼ぶ。弓形の面積 $D$ は３節により既知である。回転体の体積公式のためには重心（関の用語で中心）の位置が必要になる。関はまず

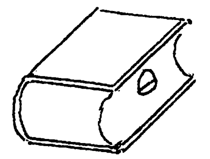


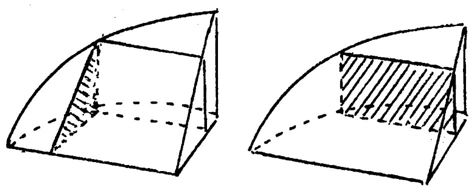

円柱を半直角に截った蹄形(ひづめがた)の体積 $U$ を考え、短冊の和として求めた。弦から重心までの距離（中矢とよぶ）は体積 $U$ を面積 $D$ で

割り U/D として求めた。弦から弦への距離に中矢の二倍を加えれば重心径（中心径）が得られるので、指輪の体積が求まる。

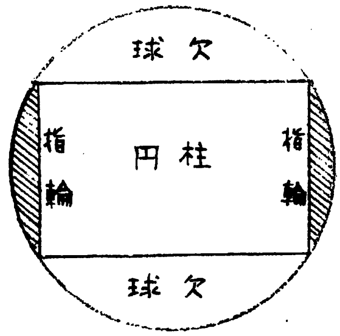
## １４節　パスカルと蹄形



パスカルは『直角三線図形とその蹄形の理論』(1658)において辞書の爪掛け(onglet)すなわち蹄形の体積を、三角の和もしくは短冊の和と両様に考えた（定積分の変数変換の例）。三角の和は関の思考の範囲内にあったてもよいと思われるが、関の著述の中には見当たらない。ついでに言えば、１１節のアルキメデスの考え方も同じく関の思考の範囲内にあっても不思議ではないが、実際は関はいづれも思いつかなかった。思考様式に何らかの違いがあるのかもしれない。

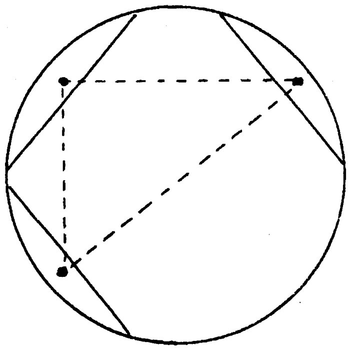


## １５節　指輪を経由する球欠の体積



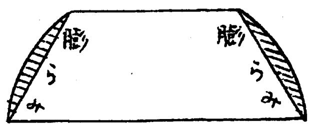

球から円柱と指輪とを取り去れば、上下に二つの同体積の球欠が残る。しかし〔3〕の中には、この方法は見当たらない。

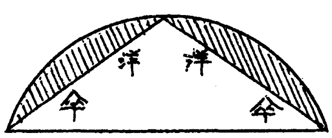
## １６節　洋傘を経由する球欠の体積



向かい合う弓形が斜めの位置に置かれていても、相互の重心間の距離を用いれば回転体の体積公式は成立する（あたかも重心が弓形の面を代表して軸の回りを回転するかのように）。関は〔3〕と〔4〕において、弓形が斜めの位置に置かれた場合、三方に弓形を配置した図の直角三角形の関係を援用して重心間の距離を求めた。

弓形が斜めに置かれた回転体を関は偏弧環と呼ぶ。関は〔3〕と〔4〕において上が開いた偏弧環を円錐台に加えた「膨らんだ円錐台」（右の上図）の体積を求めた。私は特に上が閉じた形を直観的に洋傘と呼ぶ。これは関が旁錐と呼んだ立体に相当し、これに中錐に相当する体積を加えれば球欠の体積が得られる（右の下図）。７節で引用した原図は実は球欠にも通ずる図であった。洋傘を用いるのは、半球および球欠を求める、もう一つの経路である。



## １７節　総括

関は５節に述べた場合を除いて、透徹した幾何学的な直観によって、立体の体積および表面積を図形の性質に即した部分形のそれに還元した。これらの基本的な部分形は少数の典型的な図形であり、十分論証的に求められている。これらを西洋流の定理のように用いて、複雑な立体の体積・表面積に適用し、幾何学的な解釈によって求積しようとした。

複雑な図形の場合に、何らかの模型を作った可能性も考えられるが、それを示す証拠はない。さらに複雑な図形の場合（今回取り上げた立体の場合には無かったが）、巧妙にも典型的な図形によって近似的に置き換えれられた場合がある。数値的に（西洋流の定積分によっ得られる）値に近接した値が得られることがある。時間の関係で省略したので、次の機会に報告したい。

### 後記

杉本敏夫（1929生まれ）　東京大学大学院修士課程終了(1956)、明治学院大学(1968-90)、 日本女子大学(1990-97) において心理学を講じた。専攻は思考心理学、特に発見の心理を主題とする。鹿取廣人・杉本敏夫編著『心理学』（東大出版会 1996) 7 章に「思考」を執筆。日本女子大紀要・人間社会学部第７号(1997)に「ガウスの発見と数値計算のはざまで－(5)数学における発見の心理学」を載せた。関孝和に関しては『明治学院論叢』に多数の論文を載せた。『論文集』を編集中。