数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 163-173

ヨハン・ベルヌーイの微分計算

九州大学大学院数理学研究院　高瀬　正仁（Masahito Takase）
Graduate School of Mathematics
Kyushu University

1．はじめに

オイラーの著作『無限解析序説』全二巻のうち，第一巻の翻訳を完成して刊行したのは平成13年（2001年）6月のことであった．それ以来，微積分の源流を自分の目で見たいという念願が強まり，いわゆる「オイラーの三部作」（『無限解析序説』と『微分計算教程』と『積分計算教程』）を念頭に置きつつ，現在『無限解析序説』の第二巻の翻訳を進めているところである．しかしオイラーの世界は微積分の源流ではない．

微積分の原点を通説にしたがってニュートンとライプニッツに求めることにすると，オイラーからさらに数学史をさかのぼって源流に向かうとき，まず直面するのがベルヌーイ一族の数学者たちである．現在，ベルヌーイ家が生んだ著名な数学者たちの一人ひとりについて個人全集の編纂が進められ，相当の程度まで完成している模様である．これらの全集を読み解く作業は微積分の形成過程を知るうえで不可欠というほかはないが，これとは別に，フランスの数学者ロピタルの著作

> "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes "(1696)（『曲線の理解のための無限小解析』）

も見落とすことのできない作品である．ロピタルの著作は数学史上で最初の微積分の教科書として知られるが，その成立にはヨハン・ベルヌーイの影響が認められる

ことも，しばしば語られる通りである.

最近，オストワルト・クラシカーのシリーズに入っているヨハン・ベルヌーイの講義録『微分計算講義』（1691／92年，オストワルト・クラシカー211）を発見し，ヨハン・ベルヌーイとロピタルの数学上の交流について知るところがあった．そこでここではまずはじめにこの交流の模様を概観し，続いてヨハン・ベルヌーイの微分計算について若干の考察を払いたいと思う.

2．ヨハン・ベルヌーイ『微分計算講義』の緒言

バーゼル大学の附属図書館でヨハン・ベルヌーイの『微分計算講義』の原稿が発見されたのは，二十世紀になってからのことで，パウル・シャフハイトリンが図書館の数学手稿を閲覧し，「ヨハン・ベルヌーイの微分計算」という文書を発見した．ただしヨハン本人の手書きの原稿ではなく，ヨハンの甥のニコラウス（II）が作った写しである．1922年，ベルヌーイ家のバーゼル市民権300年記念祭のおりにテキストが公表された．これを典拠としてドイツ語訳（原文はラテン語）が作られて，オストワルト・クラシカーのシリーズの一冊として刊行された（第211巻）．シャフハイトリンが緒言と注釈をつけ，33個の図が挿入されている．刊行されたのは1924年である.

しばらく「緒言」の拾い読みを続けよう．はじめに語られるのは，ヨハン・ベルヌーイは積分法の講義に先立って微分法の講義を行っていたという一事である.

《ヨハン・ベルヌーイは1667年から1748年まで生きた人物だが，死の数年前，「積分法に関する数学講義」という標題の論文を出版した．この論文が世に出たのはずっと後年（1742年）のことではあるが，そこで取り上げられている話題は1691年に現れたベルヌーイの最初の数学研究の一つである．この論文は，「われわれはこれに先立つ箇所で，量の微分を作るにはどうしたらよいか，という様子を観察した」という言葉とともに始まっている．先行する

ものが何も存在しない研究に寄せる不思議な書き出しの言葉である！　この言葉に対する脚註は，これを説明しようとしている．》

ここで言われている「脚註」は次の通りである．

《著者は，先行する微分計算講義の公表を差し止めなければならないと考えた．なぜなら，それはマルキ・ド・ロピタルの広く普及した本『無限小解析』に完全に包含されているからである．》

ここにはヨハン・ベルヌーイの微分計算講義は実在したこと，およびその講義とロピタルの教科書との親密な関わりが示唆されている．続いて，この脚註の論拠が明かされる．

《そうこうするうちに1696年に刊行された『無限小解析』はロピタルの知的所有物なのかどうか，あるいはむしろヨハン・ベルヌーイのものなのではないかという論点をめぐって，活気のある論争が発生した．モンチュクラはベルヌーイの側に立ったが，ボスは自分の同国人［フランス人］のために非常にエネルギッシュに論陣を張り，カントールもまたロピタルに味方している．エネストレームはいくつかのノートにおいて，ストックホルムに保管されているベルヌーイとロピタルの往復書簡を調べて，この問題をはっきりさせようとする試みを行った．エネストレームは一番初めのノートにおいて，ベルヌーイは『無限小解析』を刊行するというロピタルの意図を知っていて，それに同意していたこと，1697年の始めにこの著作を受け取った後にロピタルにお礼を述べていること，その際，何か自分に関わりのある異論を唱えているわけではないことを確認している．ロピタルの死（1704年）の後になってようやく，ベルヌーイは，『無限小解析』のさまざまな発見はベルヌーイの知的所有物なのだという主張を携えて，公の場に出てきた．もっとはっきり言うと，ベルヌーイはテイラーに宛てた公開書簡の中で，引用箇所の申し立てをしながら，『無限小解析』の根幹と素材は大部分，ベルヌーイに由来することを説明しているのである．結局の

ところ，上記の脚註はここに根拠をもつわけである．》

ヨハン・ベルヌーイは公の文書を通じてロピタルを批判したことはないが，私的な書簡ではロピタルへの不満を隠さなかったという．

《これらの公にされたあらゆる文書のどこを見ても，ロピタル自身が中傷されているところはない．その代わりベルヌーイは個人的な書簡の中で，ロピタルへの不満を思うままに表明している．しかもロピタルの死後はじめてそうしたのではなく，エネストレームが述べているように，これは『無限小解析』の一本を受け取った直後の出来事なのである．1698年2月8日付のライプニッツ宛の手紙において，著名な数学者オザナムが前に一度，他の鳥の羽で身を飾ったことについて苦情を申し立てた後で，こんなふうに続けている．》

《ところでこれはおおかたのフランス人の称賛に値する習慣なのです．私の身にもまた（ここだけの話なのですが）ロピタルのところで似たことが起こりました．数年前，ロピタルはホイヘンスのところで私の研究からまんまと空虚な名声を手に入れました．私は少し後になってそれを知ったのですが，喜んでそれを許しました．それも，まるで初めから知っていたかのように装ってそうしたのです．ロピタルはホイヘンスへの手紙でそう［ベルヌーイは知っていたと］書いています．ロピタルは，近ごろ『無限小解析』を出版したとき，私に対してそれほど誠実には振る舞いませんでした．ロピタルが序文で私に多くを負っていると告白していることは認めますが，この告白はあまりにもあいまいですし，パリの"Journal des Sçavans"［1665年に創刊された最初の科学雑誌］でこの作品を批評した人物が，この告白をおおらかな謙虚さから生まれたものと見ているからといって，この告白がよりよいものになるわけでもありません．たとえ彼が本当に控えめな人物であるとしても，彼はエラスムス・バルトリヌスを見習うべきです．エラスムスは，彼の著作中のすべての事柄はスクーテンの数学に学んだのだと率直に語りました．ロピタルを彼の著作の著者と見る正当性はありません．なぜと申しますと，彼はほんの数頁を除いて（それらの頁については，私は

あなたのお耳には入れていますが，ほかにはだれにも話していません）すべての事柄を，一部分は私に書いてもらい，一部分は私の話を口述筆記し，他の一部分は私がパリを離れた後に手紙を通じて手に入れたからのです．書簡については私のところに証拠がたくさん保管されていますが，適切な時期を見て公にできるかもしれないと考えています．あの著作の出版の前にもいろいろな友人が手紙に目を通して，相当の箇所を書き写しました．それと，なによりも私は，ロピタルが私に対してどれほど多くの言葉をかけてきたのかを示す私宛の手紙をもっています．彼の主な功績は，私が彼に一部分はラテン語で，また一部分はフランス語で乱雑に説明した事柄を整頓して，きちんとフランス語で執筆したことです．すでに申しましたように，自分自身で付け加えた部分は３頁もしくは４頁を越えません．ではありますが，私があなたの口の堅さを信頼してお伝えしたことのうちのいくらかを，あなたが彼に知らせることは望みません．さもないと，彼の私に対する友好的な態度はまちがいなく反対側に傾いてしまうでしょうから．》

このような文面から判断すれば，ヨハン・ベルヌーイはロピタルの著作をヨハンからの剽窃と見ていたように思う．これに対し，ロピタルは『無限小解析』の緒言で次のように述べている．

《ところで私は，ベルヌーイ家の方々，とりわけ今ではブロニンゲンの教授である若いベルヌーイ氏の啓発に多くを負っていることを承認する．私はこれらの人たちとライプニッツ氏が発見したさまざまな事柄を無造作に使用した．それゆえ私は，彼らが彼らの意のままにすべてを自分で利用することに同意する．私としては彼らが私に対して非常に親切に接してくれることで満足したいと思う．》

『微分計算講義』の「緒言」に見られる記述によれば，「このようにほめそやして語ることにより，さしあたりベルヌーイは満足し，それから上記のような礼状を書いた」という．そのうち"Journal des Sçavans"に『無限小解析』に寄せる熱狂的な

賛美が出た．その記事の末尾には次のように書かれているという．

《結局のところ，この著者は，多くの要求をしない少しばかりの年老いた人を除いてだれも引用しようとせず，ただ単に意図するところを読者の目から覆い隠そうとする類いの著作家たちとは遠く離れた地点にいる．この著者は緒言において，論じられたテーマをめぐって発見を行ったすべての人々を公正に扱っている．しかも，この著者の書物全体のうち，それらの人々自身がこの著者に容認するつもりの事柄のみを自分自身に帰着させるという誠実さと節度とをもって，そのようにしているのである．》

次に挙げるのは，この論評に対するパウル・シャフハイトリン（『微分計算講義』の「緒言」の筆者）の所見である．ロピタルをひいきするかのような極端な論評が"Journal des Sçavans"に出た理由が推測されている．

《この論評の結語をロピタルの緒言に見られる対応するコメントと比較すると，ベルヌーイの名が故意に避けられた点が特に際立っている．他方，ホイヘンスの業績の論評の中で，ライプニッツや他の人々は名前を挙げて言及されているが，ベルヌーイの名は完全に欠けている．これは，自分の値打ちを確信しているヨハンを激しく傷つけたにちがいなく，そのすぐあとにライプニッツ宛の憤慨した手紙が現れたのである．ところでなぜ，秘密にしたいとか，ロピタルの反目に対する心配などという，たっての願いになるのであろうか．この時期にはヨハンとヨハンの年上の兄ヤコブとの間で，活気に満ちた学問上の論争が荒れ狂っていた．この論争は，残念ながら二人の兄弟の家族関係をも大きくそこねることになった．この論争はまず初めにライプチヒ学報に，それから主として"Journal des Sçavans"に掲載されたが，後者の雑誌はロピタルおよび彼の交友範囲と親密な関係にあった．》

ロピタルの著作に向けられたヨハン・ベルヌーイの憤懣と，"Journal des Sçavans"の記事に見られるような同時代の賛美とは著しく乖離しているが，1922年になって

ヨハン・ベルヌーイの微分法講義録が発見された．それをロピタルの著作と比較することによってようやく正確な判定が可能になり，ヨハン・ベルヌーイの主張が裏づけられたのである．

《この手稿をロピタルの『無限小解析』と比較すると，ベルヌーイの主張は本質的に正しいことが明らかになる．ロピタルの決して過小評価するべきではない功績は教育である．ベルヌーイがライプニッツに宛てて書いているように，ロピタルは，ベルヌーイが必ずしも非の打ちどころがないとは言えない混乱した形でロピタルに提供した事柄を，明晰で洗練された表現様式で，しかも巧みな改訂を行って理解しやすいものにした．

ベルヌーイの手稿を見ると，そこには即座に，ロピタルがその著作のはじめの四つの章において血肉で取り囲んだ骨格が認められる．『無限小解析』の第一章で与えられた諸規則は，若干の変更を別にすると，ベルヌーイの手稿の諸規則を借用しているし，いくつかの例については，たとえば$d\dfrac{\sqrt[3]{ax+x^3}}{\sqrt{xy+y^2}}$の計算のように，そっくりそのまま同じである．・・・・・》

パウル．シャフハイトリンがこのように書いたのは1924年のことで，ロピタルの著作が刊行された1696年から数えると，228年後の出来事である．

ロピタルの著作には有名な「ロピタルの法則」も出ているが，実際にはこれは「ヨハン・ベルヌーイの法則」と言うべきである．この確証が得られたのも1922年になってからであった．

3．ヨハン・ベルヌーイ『微分計算講義』の概要

微分計算に関するライプニッツの第一論文が公表されたのは1684年のことであった．論文の表題は，

「分数量も無理量も妨げない極大と極小ならびに接線を求める新しい方法．またそれらのための特別の計算法」

というのであるから，ひとことで言えば，ライプニッツの微分法とは「万能の接線法」にほかならず，どのような曲線に対しても，その上の任意に指定された点において接線を引く方法を教えているのである．ただし，これには二つの前提を承認しなければならない．ひとつは接線を引くことができるのは「接線が存在する場合」に限ること，もうひとつは，「与えられた曲線が方程式を通じて記述されていること」である．ヨハン・ベルヌーイは12歳年長の兄のヤコブ・ベルヌーイといっしょにライプニッツの論文の解読につとめ，それからパリに行き，研究の成果をパリの数学者たち，わけてもロピタルに伝えた．これに基づいてロピタルが『無限小解析』を著したのは1696年であるから，ライプニッツの第一論文が公表された時点から数えると，この間，わずか12年にすぎない．

ロピタルの著作では，微分計算の大前提として，次のような二つの「公理」が設定されている．

1．　ある量が無限小量だけ減少するかまたは増大するとき，その量は減少もせず増大もしない．

2．　どの曲線も，それ自身が無限に小さい無限個の線分で構成されている．

これはヨハン・ベルヌーイの『微分計算講義』と同じである．ただし，ベルヌーイの講義録にはもう一つ，

3．　Eine Figur, die zwischen zwei Ordinaten, der Differenz der Abszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve enthalten ist, wird als Parallelogramm betrachtet.

という「公理」が添えられている．講義録の内容は次のように構成されている．

微分の和と微分の差

積の微分

分数の微分

根号量の微分

諸問題の解決のために微分計算を使用すること

問題1.　放物線に接線を引くこと.

問題2.　楕円に接線を引くこと.

問題3.　双曲線に接線を引くこと.

問題4.　直線上に三つの点を配置し,「それらの点までの距離が一定になる点」が描く曲線に接線を引くこと.

問題5.　接線影の長さがつねに等しい曲線を見つけること.［この問題は「逆接線法」に所属する問題である.］

問題6.　サイクロイドに接線を引くこと.

問題7.　［ニコメデスの］コンコイドの接線を見つけること.［「コンコイド」はshell formの意. ニコメデスは紀元前200年ころのギリシアの数学者.］

問題8.　キスソイドの接線を決定すること.

問題9.　カドラトリックスの接線を見つけること.

問題10.　カドラトリックスと垂直半径との交点を見つけること.

問題11.　アルキメデスの螺旋の接線を見つけること.

問題12.　極大と極小

問題13.　極大と極小

問題14.　極大と極小

問題15.　極大と極小

問題16.　極大と極小

問題17.　極大と極小

問題18.　極大と極小

問題19.　極大と極小

問題20.　極大と極小

問題21.　曲線の変曲点を見つけること.

全部で21個の問題が並んでいるが，10題までが接線法の問題である（問題1～4，6～11）．問題5は，接線に関する情報に基づいて元の曲線の全体像を復元せよというのであるから，逆接線法すなわち積分計算に所属する問題である．続く9個の問題12～20は曲線が極点を求める問題であるから，接線法の問題と同じく，変化量の一階微分の計算法に基づいて解決される．最後の問題21は曲線の変曲点を決定する問題で，これを解くためには変化量の二階までの微分計算を遂行しなければならない．

与えられている具体例は，

（1）　$$ax^2-yx^2-a^2y=0$$

という方程式で記述される曲線である．ここでまずはじめに記号xとyの意味するものが問題になるが，「公理1」で「ある量が無限小量だけ減少するかまたは増大するとき，その量は減少もせず増大もしない」と指示されていることから推して，「xとyは変化量を意味する」と見てさしつかえないと思う．これはオイラーの微積分でははっきりと指定されていて迷う余地はないが，ライプニッツの第一論文では必ずしもはっきりとそのように読み取れるわけではない．ベルヌーイはちょうど中間に位置していて，xとyが変化量になりつつある段階にさしかかっているように思う．

方程式（1）の両辺の微分を作ると，

（2）　$$2axdx-x^2dy-2xydx-a^2dy=0$$

となる．これより，

（3）　$$dy=\frac{2a^2xdx}{\left(a^2+x^2\right)^2}$$

となる．これをもう一度微分すると，

（4）　$$d^2y=\cdots=\frac{2a^2\left(a^2+x^2\right)^2-8a^2x^2\left(a^2+x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^4}(dx)^2+\frac{2a^2xd^2x}{\left(a^2+x^2\right)^2}$$

という方程式が得られる．ここでd^2yは「yの微分dyの微分」すなわち「yの二階微分」すなわち$d(dy)$を意味する．d^2xについても同様で，「xの微分dxの微分」すなわち「xの二階微分」すなわち$d(dx)$を意味するが，**ここでもし変化量xの変化の仕方が定速度なら，**$dx=C$（定量）であり，したがって$d^2x=0$となる．この

場合，方程式 $d^2y=0$ を解くことにより，すなわち上の方程式（4）の右辺の $(dx)^2$ の係数を0と等値して得られる方程式を解いて，変曲点の x 座標 $x=\pm a\sqrt{\frac{1}{3}}$ がみいだされる．

x と y を点の位置を明示する座標と見るだけにとどまらず，変化量と見ることにより，曲線が動的に生成されるという力学的なイメージが獲得されるように思う．しかも x のほうのみを定速度運動と思いなすことにより，変曲点の決定も可能になる．オイラーに移るとその点は明瞭に指示されていて，滑らかに微分計算が進行する．ヨハン・ベルヌーイの微分計算の講義録では，その点が明示されているわけではないが，上記の「問題21」の計算例を見る限り，暗々裡にそのような前提が設定されていると見ることが許されるように思われる．