数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 186-196

『大成算經』巻之四　三要（象形，満干，数）の謎

東京理科大学　理学研究科　　尾﨑　文秋 (FUMIAKI Ozaki)
Graduate School of Science,　Tokyo University of Science

大成算經について

1683 年 (天和 3) に，関孝和，建部賢明，賢弘の 3 人が協力して数学の集大成を行うことになり，28 年かかって 1710 年 (宝永 7) に《大成算經》(20 巻) として完成した。構成は，主に首篇（巻之一の初めの部分）・前集（巻之一～巻之三）・中集（巻之四～巻之十五）・後集（巻之十六～巻之二十）の 4 つである。大成算經の原本は存在せず，写本のみが存在する。

三要について

大成算經巻之四は『三要』と名づけられている，象形，満干，数の 3 つで三要である。巻之四は中集の最初である，巻之五から七を象法，巻之十から十五を形法と名がついており，これらを読むにあたっての，なにか基盤になるものが書かれているのではないかと思われる。

先行研究

この巻について，明治前日本数学史 [2] では,「すこぶる異様なるもので，数学の理論としての意義のないものである，しかし大成算經の組織の基礎となってゐる概念を含む。」とあり，象形，満干，数の説明が一応されているが，それぞれに「かかる分析をしても意味がない」などと書かれている。算聖関孝和の業績 [4] では,「頗る異様なもので数学的意義に乏しいものである。」とあり，こちらは，象形，満干まで触れていて，数の説明は書かれていない。
なお今手元に，中国の和算研究家徐沢林[1]氏が巻之四についてまっこうから取り組んだ論文があるが，まだ読んでいない。

1　象形

象形は象と形 2 つに分けて考えられており，象は顕れざるもの，形はすでに顕れたものとされている。しかし，象の演段では，実際に目に見えないものを題材にしている問題は 2 題だけであり，実際に日常にある目で見ることができるものや，図を伴った問題がでてくる。本文には続いて，

自然界，我々の日常生活で，一象一形それぞれにその名がそなわり，更に，長短ならば度，軽重ならば秤，容受ならば量，名目ならば計のように，みな物に応じて自然に定まる数を主(はか)ることによって事物を特定することができる。しかし，この分類の仕方が非常に難解である，一応の解釈はついたものの皆が納得できるものとは言い難い，よって紹介も含め象の代表的な演段を使い説明する。

1.1　象

序文では,「象には二義がある。状がないもの，状があっても図に描いたものは使わないものを■といい，長短の形を比べ，物の並べ方を図とするものをを□という」とある。

[1] 徐沢林, 天津師範大学数学系, 科学史博士

「象有二義焉本無状者雖有状不用畫図者謂之■比長短之形成行伍之図謂之□也」

上で■□と書いたところは本文では空白になっている部分である，この空白は私の手元にある八種類の写本すべてで空欄になっていることから，筆者がここに当てはめる言葉を思いつかなかったのであろうと推測した。では■□に当てはまる言葉は何なのであろうか？

続く演段，すなわち実際の詳しい説明を読んで考察した。

1.1.1 ■象

巻之四では，他の和算書のように「答曰〜」「術曰〜」という書き方はされておらず，問題の次の行から解説文が書かれている。この解説文だけではよくわからないので，すべての問題を解いてみて，それと解説から解釈をした。

「假如有物不知総數幾數剰若干幾數剰若干問総數」

これは中国剰余定理の問題。続いて，

「假如有三乗方積若干問毎面」

三乗方，つまり四次元の図形があり，体積は若干である，一辺の長さを問う問題。

両問の解説とも，これらは目に見えるものではない，しかし若干つまり現代でいう文字を使用すれば，方程式を立てることができ問題を解くことができる。
とあるが，実際に式は立てられていない。

ここで余談だが明治前日本数学史の本文に，
「一例。假如有物不知総數，三々數の剰若干，五々數之剰若干，問総數」
と書かれているのだが，この問題は私が見たどの写本にも無い問題であり，上の一問目に似ている。これは著者が見た写本がこう書いてあった可能性もあるし，ただ間違えただけなのかもしれない。

上の2題は，実際に目に見えないものであり，象は顕れざるものであるとわかるが，次の問題は，

「假如有酒若干斛毎若干斗価銭若干文問該銭」

のように，目に見える「酒」と「銭」を題材にしている問題が扱われている。

解説では，属衆酒之銭を題中で言い，属総酒の銭を問う。とあり，これは前者が「価銭若干文」，後者が「該銭」を表しており，互いの比例関係を示している。つまり，有酒 (a) 斛，毎 (b) 斗，価銭 (c) 文，問該銭 (x)，とおけば，

$$a : x = b : c$$

と文字を使って式を立てて解くことができる。
当然このような数式は書かれてはいないが比の関係に注目していることがわかる。
以下目に見えるものを扱った問題が続くが未知数と式の数が増えるだけで問題文中の「若干」をなにか文字で表せばすべて方程式を立てることのできる問題である。

1.1.2 □象

上の■象に対し，ここでは問題の隣に図が描かれている。当然見えるものなのだが象なのである。

「假如有樹高若干尺春生嫩枝至秋長若干尺問該高」

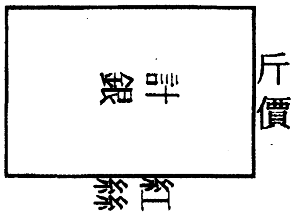
図をみてわかるとおり木の枝はあまりまっすぐ伸びてはいない。

解説には，以下のように書かれており，
「是本雖有状主株根數而宛物則不用其畫今主長而托事増之枝為用故釈題意而写一根之稟状唯原高與通高及杪長相具也」
最後の「原高與通高及杪長相具也」のところで通高と杪長という新たな長さが必要であることを言っている。この□象の定義は,「長短の形を比べ，物の並べ方の図」である。
最初は，長さを測り相似を利用して木の長さを求めるとか，三平方の定理の利用などを考えたが，これだと前の■象と同じになってしまう。

解説には，木は枝がたくさんあるが，この問題では一番長く伸びた枝だけに注目してその長さをはかればよい，とあるので杪長が一番長く伸びた枝，そして通高が問われているものつまり，春の木の高さと枝の長さを足したものであるとわかる。木を特定するのに必要なすべての数値が問題なのではなく，まっすぐな線になぞらえて長さだけを考えればよいといっている。

「假如有紅絲若干尺毎斤価銀若干両問計銀」

紅絲の代金を求める問題。



本文には「総重と属一の重が相具わる」とあり式を立てることはしている。
それと解説の後半には，
「其乗除之理則摸直形也」
とあるから長方形が乗除を表すことがあることをいっているだけで，図形が現れてもすべてが幾何の問題ではないことを言っている。

そして最後の2題は，方陣と継子立ての問題なのだが，両方とも，若干方陣，円陣若干隊となっており，問うているものは図である。当然若干では正しい図を書くこはできない。
こちらは,「物の並べ方の図」の例になるわけだが，これらも実際の軍隊などを用いて考えるのではなく，図で例えて考えることをいっている。
ここで，■□に何が入るかを考えてみる。

■は，式を立てて解ける問題。
□は，図を道具にして解く問題。
である。
当然■と□は対立した概念をもっている言葉が当てはまると考えられる。
続く形では，平と立に分かれている，このことより1文字だとバランスがよいのであてはまる字を考えてみた。
候補としては，
■：具，有，固，単，捨
□：抽，無，変，複，借
の5組であり，今の段階では,「捨」,「借」が一番よいのではないかと思うが，今後も探求が必要である。

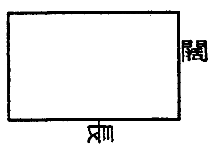
1.2 形

ここでは，幾何図形の問題が扱われている。
形が平面図形，立が立体図形の問題で，その図形を変形させて表れる新しい線分に注目している。

1.2.1 平，立

本文では，平と立に分けて説明されているが，2次元と3次元の違いだけである。
演段は，□象のときと同じように，問題の隣に図が描かれている。
□象と違い，一般的な幾何図形が扱われている。

「假如有直長若干闊若干問積」



面積は，長×闊 をすればよいのだが解説には，

直長というのは，縦は横より多い，そして，長と闊の長さを決めれば，斜晝，つまり対角線が現れると，問われているものにはふれず，長方形の説明をしている。縦と横があったら対角線があるのは当たり前のことだが，逆に縦と横があって対角線がなかったらそれは長方形としては成り立たないのである。

この図形が成り立つにはどのようになるべきか，という考え方は数の所で重要になってくる。数では図形が成り立った状態を「用」として論じられている。

他の演段は図形が複雑になっていくだけで，基本的な考え方はかわらない。

2　満干

満干は，象形に属しており，全極背の3つに分けることができる。満は増加であり，この上ないところまで行きつく。干は損であり，すべて無くなってしまう。

全は，通常考えられるものであり，極は窮まった状態，背は全と相反する状態である。

象形には，長短多少貴賤軽重のような大小関係があれば，必ず対物が有る，対物が無いときは，総数だけがある。

対物には，新旧の違いが有り，相対が元々具わったような値の関係は旧であり，後から付け足されたものは新である。

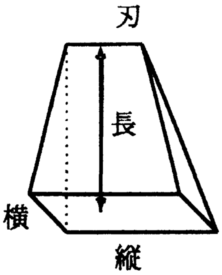
簡単な例を挙げると，

台形があったとすると，台形は上辺より下辺の方が長い図形である，よって，上辺は下辺の値以上にならないし，下辺は上辺の値以下にはならない，このような状態のとき，上辺と下辺は対物の関係である。そして，これは台形の性質上のことなので，これは「旧」である。

ここでもし,「台形の高さは上辺より長い」とあれば，高さと上辺が対物の関係になる。そしてこれは後から付け足されたためこれ「新」なのである。

いま，上辺は下辺の値以上にならない，といったが，この満干の項では，上辺が下辺より大きくなるところまで考えている。

「假如有楔積〔若干〕縦横差〔若干〕刃與横和〔若干〕縦與長和〔若干〕問縦横刃及長」

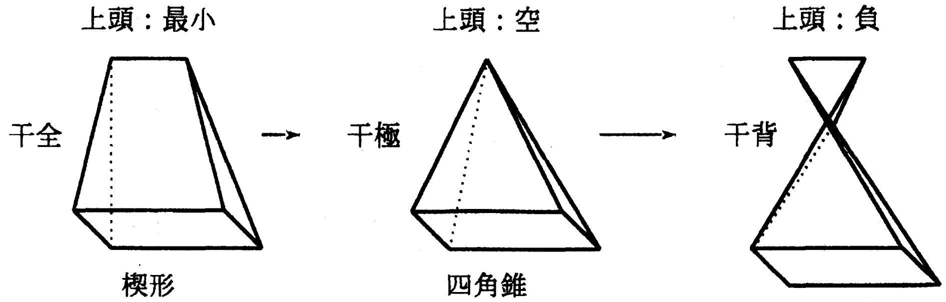


楔形というのはもともと，横より縦のほうが長く，刃は縦よりも短い，このことから，横と縦，刃と縦がそれぞれ相対する,（これが旧になる）また横，刃ともに広狭の広がりが問題文中で与えられた条件より決まる，よって横と刃が相対する。長は条件が足りないためにどれとも相対しない。

ここでも上の問題と同じように，図を伴った各辺の満干の変化が書かれている。

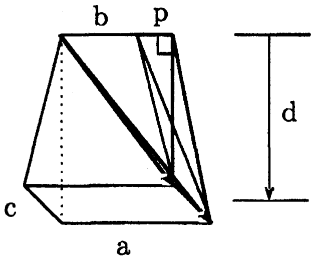
横　干では対物は刃　但し横＜刃の時，対物は刃
　　満では対物は縦　但し横＜刃の時，対物は横
縦　干では対物は横　但し横＜刃の時，対物は刃
　　満では対物は無
刃　干では対物は０　但し横＜刃の時，対物は横
　　満では対物は横 但し横＜刃の時，対物は縦
長　干では対物は０
　　満では対物は無

このように13種類の場合分けがされている。この中で刃の干の変化をあげると，



のように，干極を一般系の四角錐として，干全，干背の特異系を作り出しているようにみえる。このような変化を考えることによって，様々な図形を作り出すのと共に，求積の際の手がかりにしていたのではないかと思われる。

この図で，下の図のように補助線を引いて図形を二つにわけると，容易に体積を求めることができる。



$$V = \frac{1}{3}acd + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}cd(b+P) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}cdP = \frac{2acd+bcd}{6}$$

とこのように読み取ったわけだが，まだ不完全である。　このような内容は，大成算經巻之十三にもある。そして杉本氏の研究 [5] にも参考となる記述があることがわかっているので，今後それらを参考にして解明していきたい。

3　数

数は象形の用であり，動静の違いがある。象の多くは，総計と属幾之物に分けることができ，形の多くは，縦横斜囲の畫がある。これらは無為であり，もともと具わっている数なので計算により求めるものではない，よってこれらは靜である。

和，差，積，商の技を利用したとき，これらは動である。しかし
もし求める数が割り算や方程式を解いて求めるものであっても，それらが元々具わっている数ならば，

それは動ではない。
ここでも象形，満干の演段同様，前半に図がない問題が5題，図がある問題も5題ある。代表的なものをいくつかみてみる。

「假如有出金若干両買米若干斛問毎斛価」

金と米は無為，つまりそれでしかないので，静である。
斛価を求めるには割り算をしなければいけないが，斛価がわかっているからこそその金で米を買えたので，斛価は元々具わっている数なので静である。
　このように，最初の2題は静しか現れない問題である。
次は，動と静が現れる問題。

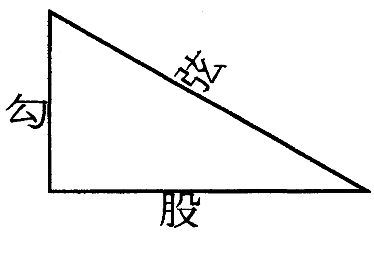
「假如有蜜蝋共若干斤蜜價銀若干両蝋價銀若干両蜜價銀不及蝋價銀若干両問蜜蝋數」

　蜜と蝋が合わせて若干斤，蜜が何両かで，蝋も何両かある，蜜價銀は蝋價銀に若干両及ばない。蜜と蝋の数を問う問題。
蜜＋蝋＝若干，は足し算をしているので，動。
蝋價銀－蜜價銀＝若干，は引き算をしているので，動。
　これらの式を利用して，方程式を解けば，問われている蜜，蝋の数がでてくるが，これら両数は元々具わっている数なので静である。

　次に，図が現れる問題。ここでも最初の1題のみ静しか現れない問題である。ここではそれは扱わずに，

「假如有勾股積若干股若干問股弦」

　勾股があり，勾×股と股の大きさがわかっていて，勾と弦を問う問題。

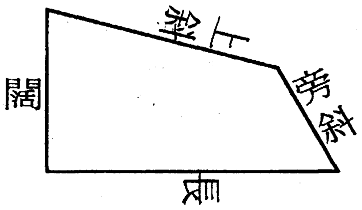


(この時代勾股は直角三角形を表す。)

この問題では，直角三角形の性質，つまりどれか2つの辺の長さがわかれば，残されたもう1つの辺の長さは，三平方の定理や比の値より求めることができる，このことを前提にしており，解説中の「弦者開方」(弦は方程式を解いて求める。)から読み取ることができる。
ここでも，句×股＝若干は，動。
図中にある勾，股，弦で描ける直角三角形は1つしかないので，これら3つの数は元々具わっている数であり，静である。もう一題，

「假如有四不等上斜若干旁斜若干闊為實平方開之得數與長再自乘數相併共若干長多於闊若干問長闊」

4本の辺があり，上斜と旁斜の値はわかっていて，闊と長の間に関係式があり，それらを求める問題。



問題で与えられた関係式は，
$\sqrt{闊}+長^3=$若干
長$-$闊$=$若干

これも今までの問題同様，図のような四角形になるには，4つの辺の長さはそれぞれ決まっており，それらは具わっている数，つまり静であり，それら以外の値だと図のような四角形は成り立たない。それに対して，関係式の値は動である。
どのような複雑な式でも，動数から静数を導くことができるのである。

3.1　全繁畸零

ここでは，数を全繁畸零の4つに分類してある。

- 数
  - 整(数窮する)
    - 全　(不帯約数、常に用いる所)
    - 繁　(逼帯約数、諸技を成し、過数の患有り)
  - 不尽(数窮無し)
    - 畸　(乗除の技に逢い、整を得る)
    - 零　(乗除の技に逢い、整を得ず)

数の分類が書かれているが，それだけでなく問題文中の値の関係，又問題文と解答のそれぞれの値の関係などが書かれており，それらについてある規則をつくり分類している。以下演段でそれを見てみる。演段はそれぞれ，5題づつある。

3.1.1　全

「假如有平方積四百尺問方」

面積が400尺の正方形があり1辺を問う問題。

解説には，

「是本来一畫之形而無当約之対數也」とあり，

この図形は正方形なので，すべての辺の長さは同じであり，問題文中に文字は1つしかないので対するものが無い。だから公約数は持たない。

とあるだけであり，問われている一辺の長さは計算されていない。

この場合は，答えは20尺になるわけだから，整数で表れているので全と分類されているわけである。

2問目は，紅羅を21尺を白絹84尺に換えることができたときの毎尺価を問うている。

これも同様に，問われているものは計算されておらず，問われているものは計算すれば4尺だが，

解説には，

「是羅絹各有約數而法實雖似繁不為患也」とあり，

絹と羅はそれぞれ21尺と84尺なので，約数をもつ。約したときには割り切れて，小数点以下の値が現れないので繁ではない，とある。

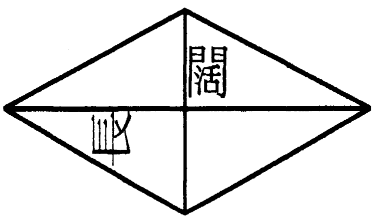
答えが整数になっていれば全である。

3.1.2 繁

問題文中の数字が約数を持つものが繁になるわけで，問われているものの計算結果，つまり答えは関係がないようである。

「假如有倰積一百寸長闊和三尺問長闊」

ひし形の図形があり，面積が100寸，長と闊の和が3尺で，長と闊の長さを問う問題。



闊をxとおくと，長は$30-x$

$$x(30-x)=100$$

$$x^2-30x+100=0$$

$$x=15\pm5\sqrt{3}$$

解説には，

「是両數各帯約法雖不成術式之煩及得答數各有約數也」とあり，

面積が寸，長闊和が尺なので，単位をそろえる必要がある。寸にあわせ，積100寸，長闊差を30寸とすれば，両数は約数をもつ。しかし約したところで意味はない，だから約さずに答えを計算してみると，その答えも約数を持っている。

確かに，答数は5を約数に持つ。これで条件は満たすわけだが，この問題は答えが二つ現れたが答えが1つの問題もとりあげている。

「假如有小麦二十五斛毎八斗磨成麵六斗問計麵」

小麦が25斛あって，麦8斗ごとに，6斗の麺を作ることができるとき，麺がどれだけできるかという問題。

実際に計算してみると，

$250 \times \frac{6}{8} = 187.5$

解説には，

「是三數雖似無遍約之法旧有數者不相対故毎與麺相対而帯二約也」とあり，

問題文中の3つの数字は約数を持たない。しかし8と6は相対して約数2をもつ。

とあり，この問題は，約数2で両数を割っても問題はない，相対して約数をもつとあるので，相対すれば約していいのかと思われたが，決してそうではない。逆に約してしまって計算をしてしまうと問題の答えとは全然関係ないものがでてきてしまい，しかもその計算結果に整数ではでてこない。

これらの規則に当てはまるものが繁である。

3.1.3 畸

後半の2つである，畸零は不尽とされている。不尽とは割り切れずに小数点以下数字が続くものである。この2つの分類はとてもわかりやすい。

畸は何かを掛けたら整数になるものとあり，

「假如有立方毎面三寸六分八釐四毫二絲一忽微強問積」

直方体があり，一辺3.68421寸，体積を問う問題。

これも実際に答えは出していない。解説には，

「是以十九分乗之則為整數也」とあり，この問題の数は19を掛けると整数になる。実際に，

$3.68421 \times 19 = 69.99999$

となり，3.68421微強なので，ほぼ70になるはずである。

ここで，

「假如有方台上方五尺下方八尺高四尺問積」

方台があって，上辺が5尺，下辺が8尺，高さが4尺で体積を問う問題なのだが，この体積を計算してみると，

$(5^2 + 8^2 + 40) \times 4 \times \frac{1}{3} = 172$

と全になってしまい，畸にはならない。

ここで京大B本の写本をみてみると「下方六尺」と修正が加えられている。

下辺が6尺だと，

$(5^2 + 6^2 + 30) \times 4 \times \frac{1}{3} = 121.33333$

となり，3を掛ければ整数になので畸に分類できる。

よって正しいのは，下方6尺である。

整数係数の方程式で，解が有理数ででてこないもの，つまり代数的数が畸である。

3.1.4 零

ここで扱われるのは，畸に反し何を掛けても整数が現れない数のことである。
実際の演段には，円周率や太陽日や太陰日の計算，米を二種類の人がどれだけ運ぶかを求めるもの，圭積（三角形）の面積がわかっていて長闊の長さを求めるもの，3つの正方形があってそれぞれの一辺の長さを求めるものがある。

「假如有円周三尺一寸四分一釐五毫九絲二忽六半強問径」
円周が3.1415926尺のとき，直径を問う問題。
解説には，
「是以若干數或通或約雖屡累其技而験之遂不得整也」とあり，
どうにかして整数をだそうとしたが無理である，と書かかれている。
このように何を掛けても整数にならない数が零である。

まとめ

異様であるといわれてきた巻之四だが，世の中にある数字の変化に着目し，それらに何か関係はないか検証した，そして実際関係はあった，そこから数学は生まれた。
逆に，世の中の物事は数字を使えばすべて現すことができるのである。
と，このような信念のもと書かれたといっても言い過ぎではないと思う。
検証した現象をすべて書ききることはできない。よって「若干」と置き一般化させて，代表的なものをあげた，またそれらの変化をどうように考えていったらよいかが書かれているのがこの巻之四であると私は思う。

文献

1. 「大成算經巻之四」
   東北大学狩野文庫所蔵，宮城県図書館　伊達文庫所蔵，東京大学所蔵，東京理科大学所蔵，京都大学所蔵 (2種類)，大阪府立図書館所蔵
2. 日本学士院編　『明治前日本数学史』　岩波書店　1954
3. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄　『關孝和全集』　大阪教育図書　1974
4. 加藤平左衛門　『算聖關孝和の業績』　槇書店　1972
5. 杉本敏夫　『關の求積問題の再構成 (八)』　未発表