数理解析研究所講究録 1393 巻 2004 年 1-8

同変写像の写像度について

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate School of Science, Osaka University

1　序

$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の単位球面 S^n に群 $\boldsymbol{Z}_2$ の作用を $g\cdot x=-x$ (g は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) により与える (この作用を対心作用という). Borsuk-Ulam の定理は次のような同変写像の存在に関する定理と見ることができる.

Borsuk-Ulam の定理. S^m から S^n への $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在するならば $m\leqq n$ である.

Borsuk-Ulam の定理は球面をより一般の空間で考えたり, 他の群の場合を考えるなど様々な形での拡張が考えられている (c.f. [7]). Fadell と Husseini は [2] において (ideal-valued cohomological) index を定義し, Borsuk-Ulam の定理の拡張を考えた. G をコンパクト Lie 群, $EG\to BG$ を G の普遍 G-空間とするとき, Fadell と Husseini の index は, G-空間 X に対して, $c_X:X\to *$ (1 点からなる空間 $*$ への定値写像) から誘導される同変コホモロジーの準同型の kernel

$$\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K})=\mathrm{Ker}(c_X^*:H_G^*(*;\boldsymbol{K})\to H_G^*(X;\boldsymbol{K}))\quad (\boldsymbol{K}\text{ は体})$$

により定義されるものである. $H_G^*(*;\boldsymbol{K})\cong H^*(BG,;\boldsymbol{K})$ であり, $\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K})$ は $H^*(BG;\boldsymbol{K})$ の ideal になる. また, X が自由な G-空間のときには, $\tilde{\alpha}:X\to EG$ を G-写像とするとき, $\tilde{\alpha}$ より定まる写像 $\alpha:X/G\to BG$ より誘導されるコホモロジーの準同型 $\alpha^*:H^*(BG;\boldsymbol{K})\to H^*(X/G;\boldsymbol{K})$ の kernel が $\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K})$ と一致する. index に関して次の命題が成り立つ.

命題 ([2]). X,Y を G-空間とするとき, G-写像 $f:X\to Y$ が存在するならば,

$$\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K})\supset\mathrm{Ind}^G(Y;\boldsymbol{K}).$$

この命題を用いることにより同変写像の存在について調べることができる. 例えば, 対心作用を考えた球面の $\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{Z}_2}(S^n,\boldsymbol{Z}_2)$ を計算することにより Borsuk-Ulam の定理も証明できる. 一方, Borsuk-Ulam の定理の証明については, S^n からそれ自身への $\boldsymbol{Z}_2$-写像の写像度が奇数になることを用いる方法がよく知られている. このことから, 上で定義した index と同変写像の写像度には関係があると考えられる. [4] において同変写像のホモトピー型

をトランスファーを用いることにより調べているが, そのアイディアを推し進めていくことにより index と同変写像の写像度の関係を見ていきたい.

コホモロジーについてもう少し詳しく見るために, $k \in \boldsymbol{Z}$ に対して,

$$\mathrm{Ind}_k^G(X;\boldsymbol{K}) = \mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K}) \cap H^k(BG;\boldsymbol{K}) = \mathrm{Ker}(c_X^* : H_G^k(*;\boldsymbol{K}) \to H_G^k(X;\boldsymbol{K}))$$

と定義をする.

G をコンパクト Lie 群, M, N をコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とし, M, N 上の G-作用は自由であることを仮定する. このとき, $H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ より $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2)$ の $H^{n-\dim G}(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2)$ における指数は 1 か 2 である. $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2)$ についても同じことがいえる. したがって, G-写像 $f: M \to N$ が存在するならば index $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2)$, $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2)$ については上で紹介した命題を考慮すると,

$\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$
$\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) \neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$
$\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$

の 3 通りが考えられる. 上の 2 つのケースについては, 次のことが成り立つ.

定理 1.1. G をコンパクト Lie 群, M, N をコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とし, M, N 上の G-作用は自由であることを仮定する. このとき,

(1) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ であれば, 任意の G-写像 $f: M \to N$ に対して $f^*: H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型である. 特に, M および N が向き付けられているとき, 任意の M から N への G-写像の写像度は奇数である.

(2) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) \neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ であれば, 任意の G-写像 $f: M \to N$ に対して $f^*: H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は零写像である. 特に, M および N が向き付けられているとき, 任意の M から N への G-写像の写像度は偶数である.

$\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ のときについては任意の整数に対して, その整数を写像度として持つような同変写像が存在するような例があり, 定理のような写像度に関する制限は得られない.

M, N および $M/G, N/G$ が向き付け可能であれば, $\boldsymbol{Z}_p$ 係数 (p は素数) のコホモロジーで次のように定理 1.1 と同様の結果が得られる.

定理 1.2. G をコンパクト Lie 群, M, N を向き付けられたコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とする. また, M, N 上の G-作用は自由であり, $M/G, N/G$ が向き付け可能であることを仮定する. このとき, p を素数とすると

(1) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_p) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_p) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_p)$ であれば, 任意の M から N への G-写像の写像度は p で割り切れない.

(2) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_p) \neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_p) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_p)$ であれば, 任意の M から N への G-写像の写像度は p で割り切れる.

本稿は [3] の主要部分の解説がほとんどであるが, そこには書かなかった応用についても少し述べている.

2 トランスファーおよび定理 1.1の証明

G をコンパクト Lie 群とし, X を free G-CW 複体とする. X/G で X の軌道空間を表わす.

G が有限群のときは, $p: X \to X/G$ は有限被覆である. 特異複体のチェイン写像 $\tau: S(X/G) \to S(X)$ を

$$\tau(c) = \sum_{g \in G} g_\sharp \tilde{c},$$

により定義する. ここで, $\tilde{c}$ は $p_\sharp(\tilde{c}) = c$ をみたす $S(X)$ の元であり, $g_\sharp : S(X) \to S(X)$ は $g \in G$ を X から X への写像と見たときにそれから誘導される写像である. これよりトランスファー

$$\tau_* : H_*(X/G; \Gamma) \to H_*(X; \Gamma), \quad \tau^* : H^*(X; \Gamma) \to H^*(X/G; \Gamma)$$

を得る. ここで Γ は可換群である.

次に G が有限でない場合のトランスファーを定義するためにファイバーに沿う積分について述べておこう. $F \to E \xrightarrow{p} B$ をファイブレーションで, F は弧状連結であり, $i > n$ で $H^i(F; \boldsymbol{Z}) \cong 0$, $H^n(F; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ を満たすものと仮定する. また, $\pi_1(B)$ は $H^n(F; \boldsymbol{Z})$ 上に自明に作用するものと仮定する. このとき, Serre スペクトル系列を考えて, ファイバーに沿った積分を次の合成により定義する.

$$p_! : H^i(E; \Gamma) \twoheadrightarrow E_\infty^{i-n,n} \rightarrowtail E_2^{i-n,n} \cong H^{i-n}(B; \{H^n(F; \Gamma)\}) \cong H^{i-n}(B; \Gamma).$$

さて, G をコンパクト Lie 群とし, G_0 を G の単位元を含む連結成分とする. G_0 は G の正規部分群であり, G/G_0 は有限群である. $p_1 : X \to X/G_0$ はファイバー G_0 のファイバー空間と考えられるので, ファイバーに沿う積分 $(p_1)_! : H^i(X; \Gamma) \to H^{i-\dim G}(X/G_0; \Gamma)$ が与えられる. また $p_2 : X/G_0 \to \frac{X/G_0}{G/G_0} \cong X/G$ は有限被覆なのでトランスファー $\tau^* : H^*(X/G_0; \Gamma) \to H^*(X/G; \Gamma)$ を考えることができる. これらを用いて, $p : X \to X/G$ のトランスファー $p_! : H^i(X; \Gamma) \to H^{i-\dim G}(X/G; \Gamma)$ を $p_! = \tau^* \circ (p_1)_!$ により定義する. 次の補題は τ^* と $(p_1)_!$ の自然性からわかる.

補題 2.1. X, Y を free G-CW 複体とし, $f : X \to Y$ を G-写像とする. $p_X : X \to X/G$ および $p_Y : Y \to Y/G$ により軌道写像を表わす. このとき次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd}
H^i(Y; \Gamma) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "(p_Y)_!"'] & H^i(X; \Gamma) \arrow[d, "(p_X)_!"] \\
H^{i-\dim G}(Y/G; \Gamma) \arrow[r, "\bar{f}^*"'] & H^{i-\dim G}(X/G; \Gamma)
\end{tikzcd}$$

ここで $\bar{f} : X/G \to Y/G$ は G-map $f : X \to Y$ より定まる写像である.

注意. X が自由な G 作用をもつ連結閉多様体のとき, X/G もまた閉多様体である. このとき, $\boldsymbol{Z}_2$ 係数のコホモロジーにおけるトランスファーは Gysin 準同型と一致する. さ

らに, X と X/G がともに向け付け可能であれば, 任意の係数のコホモロジーでトランスファーは Gysin 準同型と符号を除いて一致する.

定理 1.1 の証明. M, N が連結な n 次元閉多様体で自由な G 作用をもつとき, $M/G, N/G$ も連結な閉多様体で次元は $n-\dim G$ である. このとき, $H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$, $H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$, $H^n(N;\boldsymbol{Z}_2)$, $H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ はすべて $\boldsymbol{Z}_2$ に同型であることに注意しておこう. $p_M : M \to M/G$, $p_N : N \to N/G$ をそれぞれ M, N の G 作用の軌道写像とするとき, トランスファー $(p_M)_! : H^n(M;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ および $(p_N)_! : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型写像である.

$f : M \to N$ を G-写像とし, $\overline{f} : M/G \to N/G$ を f より決まる写像とする. $\tilde{\alpha} : N \to EG$ を G-写像とするとき, $\overline{f}$ と $\tilde{\alpha}$ より定まる写像 $\alpha : N/G \to BG$ の合成 $\alpha\circ\overline{f}$ より誘導されるコホモロジーの準同型 $(\alpha\circ\overline{f})^* : H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ の kernel は $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M,\boldsymbol{Z}_2)$ と一致する. したがって, $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ のとき, $(\alpha\circ\overline{f})^* = \overline{f}^*\circ\alpha^*$ は自明な写像ではない. このことから, $\overline{f}^* : H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ は自明な写像ではないことがわかるが, $H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ なので $\overline{f}^*$ は同型写像である. 補題 2.1 より $(p_M)_!\circ f^* = \overline{f}^*\circ(p_N)_!$ であり, $\overline{f}^*$, $(p_M)_!$, $(p_N)_!$ が同型写像なので, $f^* : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ が同型写像であることがわかる.

次に $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_2) \neq \mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ のとき, $\overline{f}^*\circ\alpha^* : H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ の kernel は $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M,\boldsymbol{Z}_2)$ と一致し, $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_2)$ は $\alpha^* : H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ の kernel であることから, $\overline{f}^* : H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ は単射ではないことがわかる. $H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ なので $\overline{f}^*$ は自明な写像である. 補題 2.1 より $(p_M)_!\circ f^* = \overline{f}^*\circ(p_N)_!$ であり, $(p_M)_!$, $(p_N)_!$ が同型写像なので, $f^* : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ も自明な写像であることがわかる. ∎

定理 1.2 の証明については M および M/G が向き付け可能であるとき, トランスファー $(p_M)_! : H^n(M;\boldsymbol{Z}_p) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_p)$ が同型写像であることに注意すれば定理 1.1 の証明と同様に証明される.

3 応用

Borsuk-Ulam の定理は球面上の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用（対心作用）に関するものであるが, 球面上の対心作用について index を計算すると,

$$\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{Z}_2}_n(S^n;\boldsymbol{Z}_2) = \{e\} \neq H^n(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$$

がわかる. このことに主定理の (1) を適用すると, 序章で紹介した S^n からそれ自身への $\boldsymbol{Z}_2$-写像の写像度が奇数になることが導かれる.

ところで, $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する n 次元多様体は必ず S^n への同変写像が存在するが (ここで S^n 上には対心作用を考えている), $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する n 次元多様体の index を計算する方法として, 次のように球面への写像の写像度を調べる方法がある.

補題 3.1. M を向きつけられたコンパクト連結 n 次元 $\boldsymbol{Z}_2$-多様体とし, M 上の $\boldsymbol{Z}_2$-作用は自由であることを仮定する. また, S^n 上には対心作用を考えるものとする. このとき,

(1) M から S^n に写像度が奇数の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在するならば, $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_2}(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^n(BG;\boldsymbol{Z}_2)$.

(2) M から S^n に写像度が偶数の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在するならば, $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_2}(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^n(BG;\boldsymbol{Z}_2)$.

証明. $\tilde{\alpha}: S^n \to E\boldsymbol{Z}_2$ を $\boldsymbol{Z}_2$-写像とすると, それより決まる写像 $\alpha: \boldsymbol{RP}^n \to B\boldsymbol{Z}_2$ から誘導されるコホモロジーの準同型 $\alpha^*: H^n(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型写像である. また, $f: M \to S^n$ を $\boldsymbol{Z}_2$-写像とするとき $(p_M)_! \circ f^* = \overline{f}^* \circ (p_{S^n})_!$ で, $(p_M)_!: H^n(M;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M/\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2)$ および $(p_{S^n})_!: H^n(S^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型なので, f の写像度が奇数ならば $\overline{f}^*: H^n(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型写像であり, f の写像度が偶数ならば $\overline{f}^*: H^n(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は自明な準同型である.

したがって, f の写像度が奇数ならば $\overline{f}^* \circ \alpha^*: H^n(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型写像で $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_2}(M;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ker}(\overline{f}^* \circ \alpha^*) \neq H^n(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2)$. f の写像度が奇数ならば $\overline{f}^* \circ \alpha^*: H^n(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は自明な準同型で $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_2}(M;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ker}(\overline{f}^* \circ \alpha^*) = H^n(BG;\boldsymbol{Z}_2)$.∎

定理の応用例として向き付けられた閉曲面間の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用について考えてみよう. Σ_k で genus k の有向閉曲面を表わすことにする.

k が偶数のとき, $g \in \boldsymbol{Z}_2$ を生成元とし, $\boldsymbol{R}^3$ に $g(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ により $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させる. $\boldsymbol{R}^3$ に Σ_k を図 1 のように $\boldsymbol{Z}_2$ 不変になるように埋め込むことにより, Σ_k 上の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える.

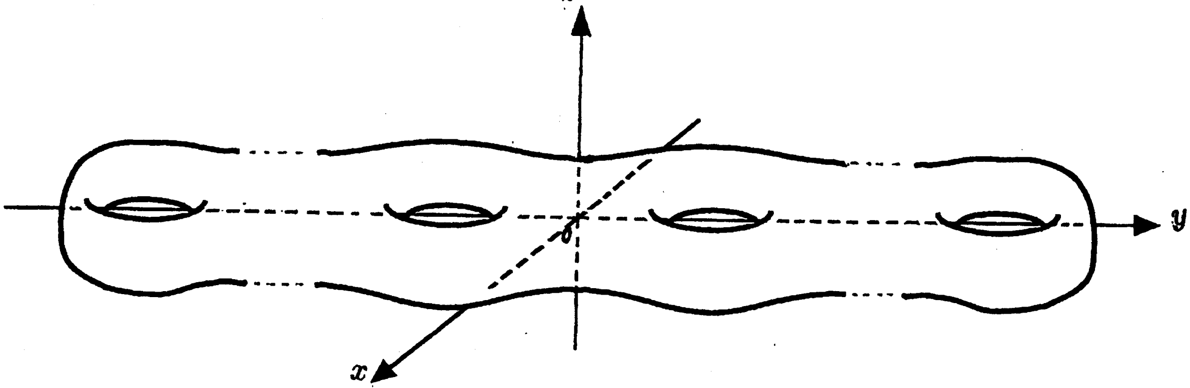

図 1

このとき, S^2 への写像度 1 の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在し, $\mathrm{Ind}_2^{\boldsymbol{Z}_2}(\Sigma_k;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^2(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2)$ がいえる.

k が奇数のときには 2 種類の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える．1 つは $\boldsymbol{R}^3$ に $g(x,y,z)=(-x,-y,-z)$ により $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させ, $\boldsymbol{R}^3$ に Σ_k を図 2 のように $\boldsymbol{Z}_2$ 不変になるように埋め込むことにより $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える．

もう一つは $\boldsymbol{R}^3$ に $g(x,y,z)=(-x,-y,z)$ により $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させ, $\boldsymbol{R}^3$ に Σ_k をやはり図 2 のように埋め込むことにより, $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える．

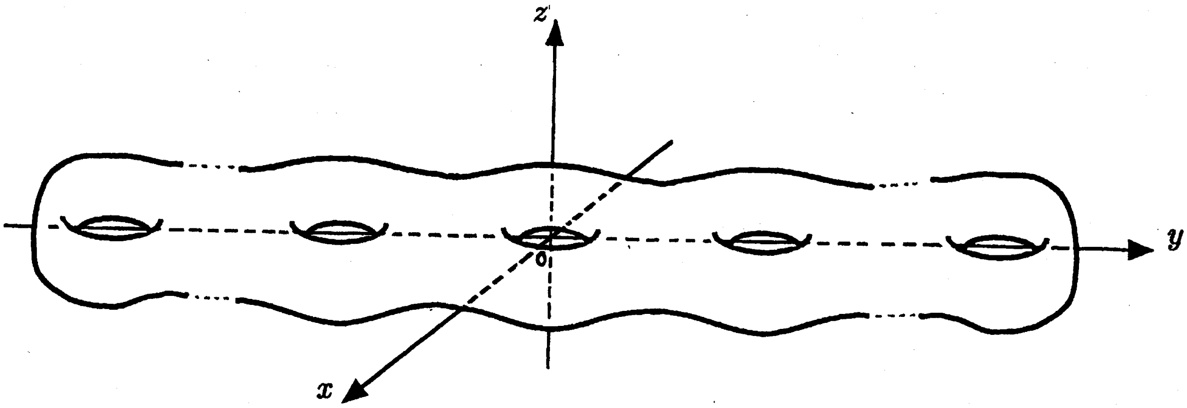

図 2

このとき, いずれの作用についても S^2 への写像度 0 の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在し, $\mathrm{Ind}_2^{\boldsymbol{Z}_2}(\Sigma_k;\boldsymbol{Z}_2)=H^2(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2)$ がいえる．

以上の結果を定理 1.1 および序章で紹介した命題に適用すると, 次のことが示される．

命題 3.2. コンパクトで連結な有向閉曲面上に上で与えた $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考えるときには次のことがいえる．(genus が奇数の場合にはいずれの作用でもよい.)

(1) k が偶数, l が奇数ならば, Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像は存在しない．

(2) k が奇数, l が偶数ならば, Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像の写像度は偶数である．

(3) k, l がともに偶数ならば, Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像の写像度は奇数である．特に, k, l がともに偶数で $k<l$ ならば Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像は存在しない．

(1), (2) と (3) の前半部分については容易にわかるので, (3) の後半部分について説明をしておこう．

k,l が共に偶数で $k<l$ のとき, $f:\Sigma_k\to\Sigma_l$ が存在すると仮定すると, $\dim_{\boldsymbol{Z}_2}H^1(\Sigma_l;\boldsymbol{Z}_2)>\dim_{\boldsymbol{Z}_2}H^1(\Sigma_k;\boldsymbol{Z}_2)$ なので $f^*:H^1(\Sigma_l;\boldsymbol{Z}_2)\to H^1(\Sigma_k;\boldsymbol{Z}_2)$ の kernel は 0 ではない．$x\in\mathrm{Ker}f^*-\{0\}$ とすると, $y\in H^1(\Sigma_l;\boldsymbol{Z}_2)$ で $x\cdot y\neq 0(\in H^2(\Sigma_l;\boldsymbol{Z}_2))$ を満たすものが存在する．このとき, $x\in\mathrm{Ker}f^*$ より $f^*(x\cdot y)=f^*(x)\cdot f^*(y)=0$ である．これは f の写像度が奇数であることに矛盾する．

この命題 3.2 の (3) の後半部分は同変写像の存在に関するものであり, コホモロジーを詳しく見ていくことにより, Fadell と Husseini の定義した index だけでは見ることができなかった同変写像の存在についての考察ができることがわかる．

球面以外で Borsuk-Ulam の定理のような同変写像の存在について調べられている空間としては Stiefel 多様体がある．[2] や [5] においては Borsuk-Ulam の定理の一般化として

Stiefel 多様体からユークリッド空間への写像について研究しているが, Stiefel 多様体間の同変写像の写像度については述べられていない. これについて以下では考えることにしよう.

$V_k(\boldsymbol{R}^m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ の直交 k-枠からなる Stiefel 多様体とする $(k < m)$. $(\boldsymbol{R}^m)^k$ には 行列の積により $O(k)$ を作用させることができるが, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ を $(\boldsymbol{R}^m)^k$ の部分空間と見なして $O(k)$ 作用を $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ に制限することにより $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ 上の自由な $O(k)$ 作用が得られる. これについて次が成り立つ.

命題 3.3. $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ から $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ への $O(k)$-写像の写像度は奇数になる.

証明. この $O(k)$ 作用の軌道空間 $V_k(\boldsymbol{R}^m)/O(k)$ は Grassmann 多様体 $G_k(\boldsymbol{R}^m)$ である. $BO(k) = G_k(\boldsymbol{R}^\infty)$ は自由な $O(k)$ 作用の分類空間であり, そのコホモロジー環は

$$H^*(BO(k); \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[w_1, w_2, \cdots, w_k]$$

である. ここで w_i は $BO(k)$ 上の普遍 k-バンドルの第 i Stiefel-Whitney 類である.

$i : G_k(\boldsymbol{R}^m) \to G_k(\boldsymbol{R}^\infty) = BO(k)$ を自然な包含写像とすると, $i^* : H^*(BO(k); \boldsymbol{Z}_2) \to H^*(G_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2)$ の kernel が $\mathrm{Ind}^{O(k)}(V_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2)$ になる.
$i^* : H^*(BO(k); \boldsymbol{Z}_2) \to H^*(G_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2)$ についてはこれが全射であり, $H^*(G_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2[w_1, w_2, \cdots, w_k]/\ker i^*$ であることが知られている (c.f. [5, 6]). $n = \dim G_k(\boldsymbol{R}^m)$ とすると $i^* : H^n(BO(k); \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(G_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ が全射なので, $\mathrm{Ind}_n^{O(k)}(V_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2) \neq H^n(BO(k); \boldsymbol{Z}_2)$. $n = \dim V_k(\boldsymbol{R}^m) - \dim O(k)$ なので定理 1.1 (1) より命題 3.3 が成り立つことがわかる. ∎

次に, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ に $\boldsymbol{Z}_2$ を

$$g(e_1, e_2, \cdots, e_k) = (-e_1, -e_2, \cdots, -e_k) \quad (g \text{ は } \boldsymbol{Z}_2 \text{ の生成元})$$

により作用させる. このとき, 次のことが成り立つ.

命題 3.4. $k \geqq 2$ のとき, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ から $S^{\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)}$ への $\boldsymbol{Z}_2$-写像の写像度は偶数になる. ここで, 球面上の $\boldsymbol{Z}_2$-作用は対心作用を考えている.

証明. $p : V_k(\boldsymbol{R}^m) \to S^{m-1}$ を $p(e_1, \cdots, e_k) = e_1$ により定義する. また, $i : S^{m-1} \to S^{\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)}$ を自然な包含写像とする. 以下, $n = \dim V_k(\boldsymbol{R}^m)$ とおくことにする. $i \circ p : V_k(\boldsymbol{R}^m) \to S^n$ の写像度が 0 であることは容易にわかる. したがって, 補題 3.1 より $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_2} V_k(\boldsymbol{R}^m) \neq H^n(B\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2)$ となり, 定理 1.1 (2) よりこの命題が成り立つことが証明される. ∎

注意. 命題 3.4 は [1] ですでに示されている. [1] では一致点数を調べることにより証明をしている.

参考文献

[1] J. A. Daccach, Nonexistence of equivariant degree one maps, Proc. Amer. Math. Soc. **101**(1987), 530–532.

[2] E. Fadell and S. Husseini, An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems, Ergodic Theory Dynamical Systems, **8**(1988), 73–85.

[3] Y. Hara, The degree of equivariant maps, to appear in Topology Appl.

[4] Y. Hara and N. Minami, Borsuk-Ulam type theorems for compact Lie group actions, Proc. Amer. Math. Soc. **132**(2004), 903–909

[5] J. Jaworowski, Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem, Proc. Edinb. Math. Soc. **32**(1989), 271–279.

[6] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, Characteristic classes, Ann. of Math. Stud., **76**, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[7] H. Steinlein, Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: A survey, Méthods topologiques en analyse non linéaire, (ed. A. Granas), Sém. Math. Sup.,**95**, Presses Univ. Montreal, 1985, pp. 166–235